

Selbstkonsistente Berechnung der Quark-Spektralfunktion in unendlich ausgedehnter Quarkmaterie

Diplomarbeit

vorgelegt von
Frank Frömel
aus Altenstadt/Hessen

Institut für Theoretische Physik I
Justus-Liebig-Universität Gießen

Gießen, Juni 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundbegriffe	5
2.1	Erwartungswerte bei endlichen Temperaturen	5
2.2	Greensfunktionen	6
2.2.1	Überblick	7
2.2.2	Die Bedeutung von $g^>$ und $g^<$	8
2.3	Spektralfunktion	10
2.4	Selbstenergie	11
2.4.1	Selbstenergie in der mean-field-Näherung	12
2.4.2	Der Kollisionsanteil der Selbstenergie	13
2.4.3	Die Bedeutung von $\Sigma^>$ und $\Sigma^<$	15
2.4.4	Eigenschaften von $\Sigma^>$ und $\Sigma^<$	17
2.4.5	Selbstkonsistente Ausdrücke für Σ^{\gtrless}	19
2.5	Zerfallsbreite	20
2.6	Retardierte Greensfunktion und Selbstenergie	21
2.7	Zusammenfassung	24
3	Das Modell für Nukleonen	25
3.1	Motivation	25
3.2	Realisierung des Modells	26
3.2.1	Überblick	26
3.2.2	Vereinfachungen und Näherungen	27
3.2.3	Formulierung des Modells	29
3.3	Ergebnisse	31
3.3.1	Breite	31
3.3.2	Spektralfunktion	32
3.3.3	Impulsverteilung in Kernmaterie	32
3.4	Zusammenfassung	34
4	Der Übergang zu Quarks	35
4.1	Überblick	35
4.2	Relativistische Formulierungen	36

4.2.1	Greensfunktionen	36
4.2.2	Spektralfunktion	37
4.2.3	Selbstenergie und Zerfallsbreite	38
4.3	Lorentzstruktur	39
4.3.1	Ruhsystem des Mediums	39
4.3.2	Lorentzstruktur der Spektralfunktion	39
4.3.3	Spektralfunktion in der chiral restaurierten Phase	44
4.3.4	Die Bedeutung von ρ_0	44
4.3.5	Lorentzstruktur der Selbstenergie	45
4.4	Das Nambu–Jona-Lasinio-Modell der QCD	46
4.4.1	Überblick	47
4.4.2	Symmetrien der QCD	47
4.4.3	Die SU(2)-NJL-Lagrange-Dichte	48
4.4.4	Schwächen des NJL-Modells	50
4.4.5	Parameter und Regularisierung	51
4.4.6	Dynamische Massengenerierung im NJL-Modell	51
4.5	Quarks und Antiquarks	54
4.5.1	Antiquarks in Streuprozessen	55
4.5.2	Zerlegung von $i\Sigma^>$ und $-i\Sigma^<$	56
5	Das Modell für Quarks	59
5.1	Einleitung	59
5.2	Vereinfachungen und Näherungen	59
5.2.1	Die chiral restaurierte Phase	59
5.2.2	Der Realteil von Σ^{ret}	60
5.3	Die Selbstenergie im SU(2)-NJL-Modell	61
5.3.1	Die Born-Diagramme	62
5.3.2	Auswertung der Born-Diagramme	63
5.4	Die retardierte Greensfunktion	67
5.4.1	Notation	67
5.4.2	Der Imaginärteil von $g^{\text{ret}}(p)$	67
5.5	Zusammenstellung des Modells	69
6	Phasenraumeffekte	71
6.1	Freie Spektralfunktion	71
6.2	Näherungen für $i\Sigma^>$ und $-i\Sigma^<$	72
6.3	Einschränkungen für $i\Sigma^>$	75
6.4	Einschränkungen für $-i\Sigma^<$	78
6.5	Zusammenfassung	83

7	Ergebnisse	85
7.1	Numerik und Parameter	86
7.2	Die Breite	87
7.3	Die Spektralfunktion	91
7.4	Variation des Cutoff-Parameters	94
7.4.1	Breite	94
7.4.2	Spektralfunktion	96
7.5	Variation der Quark-Quark-Kopplung	97
7.5.1	Breite	98
7.5.2	Spektralfunktion	99
7.6	Impulsverteilung	101
8	Zusammenfassung und Ausblick	105
A	Notation und Konventionen	109
B	Parität, Zeitumkehr und chirale Symmetrie	113
B.1	Parität	113
B.2	Zeitumkehr	115
B.3	Chirale Symmetrie	117
C	Störungstheorie im thermodynamischen Gleichgewicht	121
C.1	Störungsentwicklung im Grundzustand	121
C.2	Die pfadgeordnete Greensfunktion	123
C.3	Störungsentwicklung im Nichtgleichgewicht	126
C.4	Feldtheorie bei endlichen Temperaturen	127
C.5	Aufspaltung der Kontur in die Zweige	130
C.5.1	Feynman-Regeln im Ortsraum	130
C.5.2	Feynman-Regeln im Impulsraum	131
	Literaturverzeichnis	132

Kapitel 1

Einleitung

Es ist eine bekannte Tatsache, dass sich die Eigenschaften von Teilchen verändern, wenn sie sich in einem Medium befinden. Die Wechselwirkung mit den anderen Teilchen verursacht in der Regel Modifikationen in Masse und Breite der Teilchen. Zur Untersuchung dieser Modifikationen lässt sich die Spektralfunktion heranziehen. Sie gibt Auskunft über das Spektrum der möglichen Energien eines Teilchens mit gegebenem Impuls. Daher enthält sie alle Informationen über Masse und Breite des Teilchens und eignet sich sehr gut zur Beschreibung von In-Medium-Eigenschaften.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Spektralfunktion von Quarks in unendlich ausgedehnter Quarkmaterie. Es soll untersucht werden, wie sich die Eigenschaften von Quarks im Medium verändern. Damit wird physikalisches Neuland beschritten, denn bisher existieren nur störungstheoretische Rechnungen für sehr hohe Temperaturen und Dichten. Bei den Nukleonen sieht die Situation völlig anders aus. Die Eigenschaften von Nukleonen in Kernmaterie sind mittlerweile gut verstanden. Es gibt eine Vielzahl von theoretischen Ansätzen, die zu übereinstimmenden Ergebnissen für die Spektralfunktion kommen.

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit ist das Modell von Lehr et al. [Le00]. Es handelt sich dabei um ein Modell zur Berechnung der Nukleon-Spektralfunktion, das von einigen einfachen Annahmen ausgeht. Die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen wird in diesem Modell durch eine Punktwechselwirkung mit konstanter Kopplung beschrieben, Streuprozesse werden in der Bornschen Näherung betrachtet. Durch die Verwendung der vollen Propagatoren in der Störungsentwicklung ergibt sich ein vollständig selbstkonsistentes Modell, in dem die In-Medium-Eigenschaften der Nukleonen konsequent berücksichtigt werden.

Die Spektralfunktion wird in diesem Modell durch iterative Rechnungen bestimmt. Aufgrund der vereinfachenden Annahmen für die Wechselwirkung werden die Ergebnisse im Wesentlichen die Eigenschaften des zugrunde liegenden Phasenraums wiedergeben. Es zeigt sich, dass die Resultate trotzdem sehr gut

mit experimentellen Daten [dA91] und äußerst aufwändigen 'state-of-the-art'-Rechnungen aus der Vielteilchentheorie [Bh] übereinstimmen. Besonders überraschend ist, dass es mit nur einem freien Parameter gelingt, den Hochimpulsanteil in der Impulsverteilung der Nukleonen zu beschreiben.

Diese Ergebnisse legen zwei Schlussfolgerungen nahe. Zum einen scheinen Phasenraumeffekte die Eigenschaften der Nukleon-Spektralfunktion zu bestimmen. Zum anderen sieht es so aus, als sei die genaue Struktur der Wechselwirkung relativ unwichtig, solange die Rechnungen selbstkonsistent durchgeführt werden. Ähnliche Erfahrungen wurden auch bei der Untersuchung der thermodynamischen Konsistenz von Rechnungen für Kernmaterie gemacht [Bz01]. Es zeigte sich dort, dass eine selbstkonsistente T-Matrix-Näherung die thermodynamischen Eigenschaften wesentlich besser berücksichtigt als andere gängige Verfahren.

In dieser Arbeit wird nun die Annahme gemacht, dass für die Berechnung der Quark-Spektralfunktion ähnliche Bedingungen gelten. Es ist dann möglich, das Konzept des Lehrschen Modells zu übernehmen und darauf ein Modell für Quarks aufzubauen.

Im Prinzip sind nur wenige Veränderungen am bestehenden Modell notwendig. Zunächst muss der niedrigen Masse der Quarks Rechnung getragen werden. Diese macht es erforderlich, relativistisch zu arbeiten. Da es sich bei den Quarks um Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$ handelt, die durch Dirac-Spinoren beschrieben werden, führt das gleichzeitig zu einer komplizierteren Struktur der Spektralfunktion. Auch diese erhält eine Spinorstruktur, die sich in verschiedene Komponenten unterschiedlicher Bedeutung zerlegen lässt. Wie sich zeigen wird, ist es zunächst ratsam, einige einschränkende Annahmen zu machen. Um zu untersuchen, ob das Modell sinnvolle Ergebnisse liefert, ist es nicht notwendig, die vollständige Spinorstruktur der Spektralfunktion zu berücksichtigen.

Die Wechselwirkung zwischen den Quarks lässt sich durch das SU(2)-Nambu-Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) beschreiben. Die Lagrange-Dichte dieses Modells besitzt die gleichen Symmetrien wie die der Quantenchromodynamik (QCD), die Wechselwirkung wird aber durch eine Punktwechselwirkung mit konstanter Kopplung beschrieben. Diese effektive Quark-Quark-Wechselwirkung entspricht also in etwa der Näherung, die bei den Nukleonen gemacht wurde.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, auf dieser Basis ein funktionierendes Modell zu entwickeln, das die selbstkonsistente Berechnung der Quark-Spektralfunktion gestattet. Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Im zweiten Kapitel werden alle Größen vorgestellt, mit denen das Modell arbeiten soll. Der Schwerpunkt liegt darauf, die Bedeutung dieser Größen zu erklären und zu zeigen, wie sie miteinander zusammenhängen. Im dritten Kapitel wird das Modell von Lehr et al. [Le00] zusammen mit einigen Ergebnissen vorgestellt, die die gute Übereinstimmung mit den Daten zeigen.

Das vierte Kapitel diskutiert ausführlich die Veränderungen, die am Modell für Nukleonen vorgenommen werden müssen, um Quarks damit zu beschreiben. Zum einen wird auf die Struktur der relativistischen Spektralfunktion eingegangen, zum anderen wird das NJL-Modell vorgestellt, das die Wechselwirkungen zwischen den Quarks beschreiben soll. Im fünften Kapitel werden die einzelnen Komponenten dann fertig gestellt und zu einem abgeschlossenen Modell zusammengefasst.

Im sechsten Kapitel wird untersucht, welche Voraussagen einfache Phasenraum-betrachtungen über die Zerfallsbreite machen. Die so gewonnenen Erkenntnisse werden sich bei der Interpretation der Quark-Spektralfunktion als nützlich erweisen. Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen finden sich schließlich in Kapitel 7. Da Vergleichsdaten aus Theorie und Experiment fehlen, muss sich Diskussion der Ergebnisse auf den Vergleich mit den Phasenraumvorhersagen und eine Variation der freien Parameter beschränken. Zusammenfassung und Ausblick finden sich in Kapitel 8.

Anhang A beschreibt die Konventionen, die in dieser Arbeit verwendet wurden. Die übrigen Anhänge vertiefen bestimmte Sachverhalte, die im Verlauf der Arbeit von Interesse sind. In Anhang B wird das Verhalten der relativistischen Spektralfunktion unter verschiedenen Symmetrietransformationen diskutiert, Anhang C gibt eine kurze Einführung in die Störungstheorie im thermodynamischen Gleichgewicht.

Kapitel 2

Grundbegriffe

Bevor das eigentliche Modell vorgestellt wird, sollen zunächst die einzelnen Bausteine betrachtet werden. Wir beginnen mit den Greensfunktionen. Aus diesen erhält man mit geringem Aufwand die Spektralfunktion. Ein ganz ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen Selbstenergie und Breite, die wir anschließend untersuchen. In diesem Kapitel werden die genannten Größen und ihre Bedeutung in der Feldtheorie vorgestellt. Dabei wird nicht außer Acht gelassen, dass wir ein Modell für endliche Temperaturen konstruieren wollen. Sofern nichts anderes gesagt wird, setzen wir voraus, dass wir uns im thermodynamischen Gleichgewicht befinden.

2.1 Erwartungswerte bei endlichen Temperaturen

Unsere Betrachtungen sollen bei endlichen Temperaturen durchgeführt werden. Es ist daher notwendig, den Begriff des Erwartungswerts in Form eines Ensemblemittels zu definieren [Das, PB].

Um das statistische Verhalten eines Systems im thermodynamischen Gleichgewicht zu untersuchen, muss ein dem Problem angemessenes Ensemble gewählt werden. Zunächst definiert man die Dichtematrix ρ für das System:

$$\rho(\beta) = e^{-\beta\mathcal{H}}. \quad (2.1)$$

Dabei steht β für die inverse Temperatur ($\beta = 1/k_B T$); \mathcal{H} kann als ein verallgemeinerter Hamilton-Operator für das gewählte Ensemble aufgefasst werden. Unter Verwendung der Dichtematrix wird die Zustandssumme des Systems eingeführt:

$$Z(\beta) = \text{Tr}\rho(\beta) = \text{Tr}e^{-\beta\mathcal{H}}. \quad (2.2)$$

Hierbei ist mit 'Tr' die Spur über die Erwartungswerte bezüglich aller Zustände einer vollständigen Basis gemeint.

Aus der Dichtematrix und der Zustandsumme läßt sich nun das Ensemblemittel für eine Observable O konstruieren:

$$\langle \hat{O} \rangle = Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \rho(\beta) \hat{O} = \frac{\text{Tre}^{-\beta \mathcal{H}} \hat{O}}{\text{Tre}^{-\beta \mathcal{H}}}. \quad (2.3)$$

In Anbetracht der Fragestellung dieser Arbeit ist es zweckmäßig, mit einem großkanonischen Ensemble zu arbeiten. Dieses wird durch die makroskopischen Größen Temperatur und chemisches Potential charakterisiert. \mathcal{H} nimmt die folgende Form an:

$$\mathcal{H} = H - \mu N. \quad (2.4)$$

Dabei ist H der gewöhnliche Hamilton-Operator, N der Teilchenzahloperator und μ das chemische Potential. Das Ensemblemittel eines großkanonischen Ensembles hat somit die folgende Gestalt:

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\text{Tre}^{-\beta(H-\mu N)} \hat{O}}{\text{Tre}^{-\beta(H-\mu N)}}. \quad (2.5)$$

Wenn in den folgenden Kapiteln vom Erwartungswert im thermodynamischen Gleichgewicht ($\langle \cdot \rangle$) die Rede ist, dann ist damit stets dieser Ausdruck gemeint.

Da im Anhang auch Systeme im Nichtgleichgewicht betrachtet werden, sei die Bedeutung des Erwartungswerts für solche Fälle kurz erwähnt. Man betrachtet in der Regel die zeitliche Entwicklung eines Systems, dessen Anfangszustand zu einer Zeit t_0 durch eine Dichtematrix ρ_{initial} festgelegt wird. Die Bezeichnung $\langle \cdot \rangle$ gibt dann den Erwartungswert bezüglich des Anfangszustandes wieder. Die Definition erfolgt analog zu (2.3) :

$$\langle \hat{O} \rangle_{\text{non equil.}} = \frac{\text{Tr} \rho_{\text{initial}} \hat{O}}{\text{Tr} \rho_{\text{initial}}}. \quad (2.6)$$

2.2 Greensfunktionen

Greensfunktionen zur Beschreibung von Vielteilchensystemen wurden 1955 von Matsubara eingeführt [Ma55]. Martin und Schwinger entwickelten auf dieser Basis weiter gehende Techniken zur Behandlung von Vielteilchensystemen (Martin-Schwinger Hierarchie) [Mt59]. In den Greensfunktionen waren nur rein imaginäre Zeitargumente zulässig, ihre Anwendung war daher auf Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht beschränkt.

1962 stellten Kadanoff und Baym eine vollständige In-Medium-Feldtheorie vor, die auf diesen Techniken basierte [KB]. Es gelang ihnen auch die analytische Fortsetzung von imaginären hin zu reellen Zeiten. Dadurch war es möglich, Systeme im Nichtgleichgewicht zu beschreiben.

In etwa zur selben Zeit entwickelte Schwinger die Darstellung der Greensfunktionen für reelle Zeiten [Sch61]. Diese werden auf einer Kontur entlang der Zeitachse definiert und deshalb auch als pfadgeordnete Greensfunktionen bezeichnet.

Der Matsubara-Formalismus stellt einen einfachen Zugang zu den statischen Eigenschaften eines System im Gleichgewicht wie Dichte, Druck und Entropie dar. Weil er keine reellen Zeiten zulässt, ist es aber nicht möglich, mit ihm dynamische Probleme zu behandeln. Bei einem Streuprozess im Wärmebad beispielsweise beschreibt ein Propagator die Reaktion des Systems, wenn ein Teilchen an einem Raum-Zeit-Punkt ins System gesetzt und an einem anderen Punkt wieder entfernt wird.

Im Realzeit-Formalismus dagegen lassen sich solche dynamische Prozesse völlig problemlos beschreiben. Wir werden daher in den folgenden Kapiteln mit diesem Ansatz arbeiten. Da nicht vorausgesetzt werden kann, dass die damit verbundenen Techniken allgemein bekannt sind, wird die Störungsentwicklung im thermodynamischen Gleichgewicht in Anhang C ausführlich diskutiert.

2.2.1 Überblick

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um ein Vielteilchensystem identischer Fermionen zu beschreiben. Am einfachsten geschieht dies in der Teilchenzahldarstellung (zweite Quantisierung). Man führt Feldoperatoren ein, die bestimmte Anti-Vertauschungsrelationen erfüllen, und erhält eine Darstellung, in der die Antisymmetrie der Zustände gegenüber Teilchenvertauschung intrinsisch enthalten ist.

Der Einfachheit halber wird im Folgenden ein nichtrelativistisches System von Fermionen betrachtet, in dem nur Zweiteilchen-Wechselwirkungen auftreten. Der Hamilton-Operator hat dann in der Heisenberg-Darstellung (zeitunabhängige Zustände, zeitabhängige Operatoren) die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \int d^3x \psi_H^\dagger(\vec{x}, t) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi_H(\vec{x}, t) \\
 &+ \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \psi_H^\dagger(\vec{x}, t) \psi_H^\dagger(\vec{y}, t) V(\vec{x} - \vec{y}) \psi_H(\vec{y}, t) \psi_H(\vec{x}, t). \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Die auftretenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\psi_H^\dagger(\vec{x}, t)$ und $\psi_H(\vec{x}, t)$ erfüllen die folgenden Anti-Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned}\psi_H(\vec{x}, t)\psi_H^\dagger(\vec{y}, t) + \psi_H^\dagger(\vec{y}, t)\psi_H(\vec{x}, t) &= \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \psi_H(\vec{x}, t)\psi_H(\vec{y}, t) + \psi_H(\vec{y}, t)\psi_H(\vec{x}, t) &= 0 \\ \psi_H^\dagger(\vec{x}, t)\psi_H^\dagger(\vec{y}, t) + \psi_H^\dagger(\vec{y}, t)\psi_H^\dagger(\vec{x}, t) &= 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Um die zeitliche Entwicklung eines gegebenen Systems zu untersuchen, können wir nun aus diesen Operatoren Greensfunktionen konstruieren. Diese enthalten alle dynamischen Informationen des Systems und sind daher die fundamentalen Größen der Theorie.

Wenn man sich mit dem Grundzustand eines Systems beschäftigt, betrachtet man in der Regel die zeitgeordnete (chronologische) Einteilchen-Greensfunktion g^c :

$$ig^c(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) = \langle T^c[\psi_H(\vec{x}_1, t_1)\psi_H^\dagger(\vec{x}_2, t_2)] \rangle.\tag{2.9}$$

T^c ist der chronologische Zeitordnungsoperator, der Operatoren in der Reihenfolge ihrer zeitlichen Argumente so ordnet, dass der Operator mit der niedrigsten Zeit ganz rechts steht. Für Fermionen ergibt sich zusätzlich ein Faktor (-1) , wenn es sich bei der zeitgeordneten Reihenfolge der Operatoren um eine ungerade Permutation der ursprünglichen Reihenfolge handelt:

$$T^c[\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)] = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) & \text{für } t_1 > t_2, \\ -\hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1) & \text{für } t_1 < t_2. \end{cases}\tag{2.10}$$

Für die weiteren Überlegungen ist es notwendig, zwei nichtzeitgeordnete Greensfunktionen einzuführen. Wir zerlegen g^c in die Korrelationsfunktionen $g^>$ und $g^<$:

$$\begin{aligned}ig^c(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) &= \Theta(t_1 - t_2)g^>(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) \\ &\quad + \Theta(t_2 - t_1)g^<(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2)\end{aligned}\tag{2.11}$$

mit

$$-ig^<(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) = \langle \psi_H^\dagger(\vec{x}_2, t_2)\psi_H(\vec{x}_1, t_1) \rangle\tag{2.12}$$

$$ig^>(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) = \langle \psi_H(\vec{x}_1, t_1)\psi_H^\dagger(\vec{x}_2, t_2) \rangle.\tag{2.13}$$

2.2.2 Die Bedeutung von $g^>$ und $g^<$

Bei der Betrachtung von $-ig^<$ ist festzustellen, dass man für $t_1 = t_2$ gerade die Einteilchen-Dichtematrix erhält. Setzt man zusätzlich $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, liefert $-ig^<(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_1, t_1)$ die räumliche Dichte der besetzten Zustände (Teilchendichte):

$$\begin{aligned}-ig^<(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_1, t_1) &= \langle \psi_H^\dagger(\vec{x}_1, t_1)\psi_H(\vec{x}_1, t_1) \rangle \\ &= \langle \hat{n}_H(\vec{x}_1, t_1) \rangle = n(\vec{x}_1, t_1).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Nun führen wir die relativen Koordinaten $t = t_1 - t_2$, $T = (t_1 + t_2)/2$, $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ und $\vec{R} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)/2$ ein und drücken $g^<$ in Abhängigkeit von diesen Größen aus:

$$-ig^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T) = \langle \psi_H^\dagger(\vec{R} - \vec{r}/2, T - t/2) \psi_H(\vec{R} + \vec{r}/2, T + t/2) \rangle. \quad (2.15)$$

Die Dichtematrix hat dann die Form $-ig^<(\vec{r}, 0; \vec{R}, T)$. Durch eine Fourier-Transformation in der Relativkoordinate \vec{r} erhält man die Wigner-Funktion. Diese korrespondiert¹ zu einer klassischen Teilchendichte in Orts- und Impulsraum (Weyl-Postulat [We]):

$$f(\vec{p}; \vec{R}, T) = \int d^3r e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \langle \psi_H^\dagger(\vec{R} - \vec{r}/2, T) \psi_H(\vec{R} + \vec{r}/2, T) \rangle. \quad (2.16)$$

Wird stattdessen die vollständige Greensfunktion $g^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T)$ in beiden Relativkoordinaten \vec{r} und t transformiert (bei festem \vec{R} und T), dann ergibt sich als Ergebnis so etwas wie eine verallgemeinerte Wigner-Funktion:

$$-ig^<(\omega, \vec{p}; \vec{R}, T) = \int d^3r \int dt e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r} + i\omega t} (-i)g^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T). \quad (2.17)$$

Nach dem bisher Gesagten ist klar, dass auch diese Funktion zu einer Dichte korrespondiert. In der Tat beschreibt $-ig^<(\omega, \vec{p}; \vec{R}, T)$ eine Dichteverteilung in Orts- und Impulsraum sowie in der Energie.

In ähnlicher Weise lässt sich nun die Greensfunktion $g^>$ betrachten:

$$ig^>(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) = \langle \psi_H(\vec{x}_1, t_1) \psi_H^\dagger(\vec{x}_2, t_2) \rangle. \quad (2.18)$$

Für $t_1 = t_2$ entspricht $ig^>$ der räumlichen Dichte der unbesetzten Zustände, die für das Hinzufügen eines zusätzlichen Teilchens zur Verfügung stehen (Lochdichte). Entsprechend korrespondiert die Fourier-Transformierte in den relativen Koordinaten \vec{r} und t , $g^>(\omega, \vec{p}; R, T)$, zu einer Dichte freier Zustände in Orts- und Impulsraum sowie der Energie.

Der Hamilton-Operator (2.7) ist translations- und rotationsinvariant. In dem Modell, das wir entwickeln wollen, wird ein unendlich ausgedehntes System im thermodynamischen Gleichgewicht betrachtet. Unter diesen Umständen hängen die Greensfunktionen nicht von den Schwerpunktskoordinaten \vec{R} und T ab. Außerdem besteht nur noch eine Abhängigkeit vom Betrag der Relativkoordinate \vec{r} .

Anstelle von $g^{\lessgtr}(\vec{r}, t; \vec{R}, T)$ und $g^{\lessgtr}(\omega, \vec{p}; R, T)$ genügt es dann, die Ausdrücke $g^{\lessgtr}(r, t)$ bzw. $g^{\lessgtr}(\omega, p)$ zu betrachten:

¹An dieser Stelle ist Vorsicht geboten. Im Allgemeinen muss f nicht positiv definit sein und kann daher nicht einfach als klassische Dichte aufgefasst werden. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist aber sichergestellt, dass f immer positiv definit ist.

- $-ig^<(\omega, p)$ – mittlere Dichte der besetzten Zustände in Energie- und Impulsraum (Teilchendichte)
- $ig^>(\omega, p)$ – mittlere Dichte der unbesetzten Zustände in Energie- und Impulsraum (Lochdichte)

Eine wichtige Beziehung zwischen den beiden Greensfunktionen $g^>$ und $g^<$ erhält man aus den Anti-Vertauschungsrelationen für die Feldoperatoren (2.8):

$$i[g^>(r_1, 0) - g^<(r_2, 0)] = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (2.19)$$

2.3 Spektralfunktion

Wie der Name bereits nahe legt, soll die Spektralfunktion Informationen über die spektrale Verteilung der möglichen Energien eines Teilchens bei gegebenem Impuls liefern. Sie korrespondiert daher zur Zustandsdichte in Energie- und Impulsraum.

Im Falle von nichtwechselwirkenden Teilchen ist zu erwarten, dass die Spektralfunktion proportional zu einer δ -Funktion ist, die Energie und Impuls miteinander verknüpft. Bei einem System von wechselwirkenden Teilchen sollte die Spektralfunktion allerdings die Form einer kontinuierlichen Verteilung annehmen.

Aus den letzten Abschnitten ist die mittlere Dichte der besetzten Zustände, $-ig^<(\omega, p)$, sowie die mittlere Dichte der unbesetzten Zustände, $ig^>(\omega, p)$, bekannt. Die Dichte aller verfügbaren Zustände ergibt sich gerade als Summe über $ig^>$ und $-ig^<$. Das führt zur Definition der Spektralfunktion:

$$\mathcal{A}(\omega, p) = i[g^>(\omega, p) - g^<(\omega, p)]. \quad (2.20)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Spektralfunktion bei festgehaltenem p normiert ist. Dies folgt direkt aus den Anti-Vertauschungsrelationen für die Feldoperatoren $\psi_H(x, t)$ und $\psi_H^\dagger(x, t)$ (vgl. (2.19)):

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{A}(\omega, p) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} i[g^>(\omega, p) - g^<(\omega, p)] \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d^3x \int dt e^{i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{x})} i[g^>(x, t) - g^<(x, t)] \\ &= \int d^3x \int dt e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} i[g^>(x, 0) - g^<(x, 0)] \delta(t) \\ &\stackrel{(2.19)}{=} \int d^3x \int dt \delta(\vec{x}) \delta(t) = 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nun sollen die Dichten $\pm ig^{\lessgtr}$ durch die Spektralfunktion ausgedrückt werden. Ganz allgemein lässt sich schreiben:

$$-ig^<(\omega, p) = \mathcal{A}(\omega, p)f(\omega, p) \quad (2.22)$$

$$ig^>(\omega, p) = \mathcal{A}(\omega, p)[1 - f(\omega, p)], \quad (2.23)$$

wobei die Funktion $f(\omega, p)$ durch diese Gleichungen definiert wird.

Für die Gültigkeit dieser Zerlegung spielt die explizite Form von $f(\omega, p)$ zunächst keine Rolle. Man erhält völlig unabhängig von $f(\omega, p)$ die Definition der Spektralfunktion, wenn man beide Gleichungen addiert.

Aus physikalischer Sicht ist jedoch sofort klar, welche Bedeutung $f(\omega, p)$ haben muss. $f(\omega, p)$ verknüpft die Dichte aller Zustände mit der Dichte der besetzten Zustände, $(1 - f(\omega, p))$ verknüpft die Dichte aller Zustände mit der Dichte der unbesetzten Zustände. Es liegt also nahe, $f(\omega, p)$ mit der Besetzungswahrscheinlichkeit für einen Zustand mit Energie ω und Impuls p zu identifizieren.

Im thermodynamischen Gleichgewicht hängt die Besetzungswahrscheinlichkeit nur von der Energie und nicht mehr vom Impuls ab. Im Falle von Fermionen wird $f(\omega, p)$ dann zur bekannten Fermi-Verteilung:

$$f(\omega, p) \rightarrow n_F(\omega) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\omega - \omega_F)}}. \quad (2.24)$$

Diese Beziehung lässt sich auch explizit berechnen. Dazu zeigt man [KB, Bo90], dass im Gleichgewicht folgende Beziehung zwischen $g^>$ und $g^<$ gilt:

$$g^>(\omega, p) = -e^{\beta(\omega - \omega_F)} g^<(\omega, p). \quad (2.25)$$

Man erhält diesen Ausdruck durch die gezielte Ausnutzung der Eigenschaften des in Gleichung (2.5) definierten Erwartungswertes. Entscheidend sind die explizite Form des Dichteoperators, der einem Zeitentwicklungsoperator ähnelt, und die zyklische Invarianz der auftretenden Spur. Eine detaillierte Rechnung findet sich beispielsweise in [KB].

Wird (2.25) in die Definition der Spektralfunktion eingesetzt, so ergeben sich gerade die Ausdrücke (2.22) und (2.23). Die Funktion $f(\omega, p)$ ist jetzt allerdings festgelegt, es gilt $f(\omega, p) = [1 + \exp(\beta(\omega - \omega_F))]^{-1} = n_F(\omega)$.

2.4 Selbstenergie

In einem Vielteilchensystem kann es zu Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen kommen. Diese Wechselwirkungen beeinflussen die Eigenschaften

Wird die Zweiteilchen-Greensfunktion in der gleichen Näherung (störungstheoretische Entwicklung in niedrigster Ordnung) betrachtet, so zeigt sich, dass sie in zwei Einteilchen-Greensfunktionen faktorisiert. Es treten ein direkter und ein Austauschterm auf, um der Ununterscheidbarkeit der Teilchen Rechnung zu tragen:

$$g_2(1, 2, 1', 2') \approx g_0(1, 1')g_0(2, 2') - g_0(1, 2')g_0(2, 1'). \quad (2.28)$$

In Abbildung 2.2 ist dieser Ausdruck graphisch dargestellt. Durch $g_2(1, 2, 1', 2')$ wird die Propagation zweier Teilchen von $1'$ und $2'$ nach 1 bzw. 2 beschrieben. In der gemachten Näherung ist die Bewegung der einzelnen Teilchen durch unabhängige Einteilchen-Greensfunktion gegeben, eine Wechselwirkung findet nicht statt. Das bestätigt die Aussage, dass in der mean-field-Näherung nichtwechselwirkende Teilchen betrachtet werden.

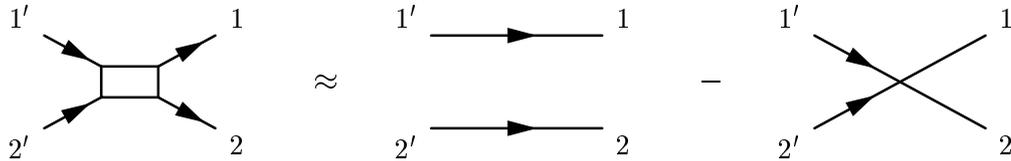


Abbildung 2.2: Zweiteilchen-Greensfunktion in Hartree-Fock-Näherung

Das Medium macht sich nur in Form eines Potentials V bemerkbar. Für die Spektralfunktion bedeutet das, dass sich gegenüber der Situation für freie Teilchen lediglich die Energie der einzelnen Teilchen um $V(\omega, p)$ verschiebt:

$$\mathcal{A}(\omega, p) = 2\pi\delta(\omega - p^2/2m) \rightarrow 2\pi\delta(\omega - E(\omega, p)). \quad (2.29)$$

Die Lebensdauer der einzelnen Zustände bleibt unbegrenzt, der Übergang zu einer kontinuierlichen Verteilung ist mit einer reinen mean-field-Näherung für die Selbstenergie also nicht zu erreichen. Um eine Verbreiterung der Peaks zu erhalten, müssen in der Selbstenergie auch Terme höherer Ordnung, die Stöße zwischen den Teilchen beschreiben, berücksichtigt werden.

2.4.2 Der Kollisionsanteil der Selbstenergie

Durch Stöße kommt es zum Austausch von Energie und Impuls zwischen den Teilchen. Dadurch ergibt sich eine endliche Lebensdauer für die Teilchenzustände und die Spektralfunktion ist nicht länger eine δ -Funktion.

Die Terme niedrigster Ordnung, die zum Kollisionsanteil der Selbstenergie beitragen, sind die Born-Diagramme. Wie im Falle der Hartree-Fock-Näherung gibt es einen direkten und einen Austauschterm. Beide Diagramme sind in Abbildung 2.3 zu sehen.

$$-i\Sigma_B(1, 1') = \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2}$$

Abbildung 2.3: Born-Terme der Selbstenergie

Die Anwendung der Feynman-Regeln liefert für das direkte Diagramm (die Wechselwirkung ist nach wie vor zeitlich lokal) folgenden Beitrag zur Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Sigma_{Bd}(1, 1') &= \int d^3x_2 \int d^3x_{2'} V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) V(\vec{x}_{2'} - \vec{x}_{1'}) \\ &\quad \times [g_0(1, 1')g_0(2, 2')g_0(2', 2)]_{t_2=t_1, t_{2'}=t_{1'}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Für das Austausch-Diagramm ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Sigma_{Be}(1, 1') &= - \int d^3x_2 \int d^3x_{2'} V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) V(\vec{x}_{2'} - \vec{x}_{1'}) \\ &\quad \times [g_0(1, 2')g_0(2, 1')g_0(2', 2)]_{t_2=t_1, t_{2'}=t_{1'}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Wie man sieht, sind diese Terme im Gegensatz zur mean-field-Näherung nicht mehr zeitlich lokal. In Analogie zu den Greensfunktionen führen wir die folgende Zerlegung ein:

$$\Sigma_c(1, 2) = \Theta(t_1 - t_2)\Sigma^>(1, 2) + \Theta(t_2 - t_1)\Sigma^<(1, 2). \quad (2.32)$$

Die Gleichungen (2.30) und (2.31) lassen sich leicht so umformen, dass man Ausdrücke für $\Sigma_{Bd, Be}^{\gtrless}$ erhält. Ist t_1 größer als t_2 , so stimmen $\Sigma_{Bd, Be}(1, 2)$ mit $\Sigma_{Bd, Be}^>(1, 2)$ überein. Geht man in (2.30) und (2.31) davon aus, dass $t_1 > t_2$, und ersetzt entsprechend die Greensfunktionen g_0 durch Korrelationsfunktionen g_0^{\gtrless} , so resultieren Gleichungen für $\Sigma_{Bd, Be}^>$. Diese gelten unabhängig von t_1 und t_2 . Völlig analog erhält man Gleichungen für $\Sigma_{Bd, Be}^<$, wenn in (2.30) und (2.31) angenommen wird, dass $t_1 < t_2$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{Bd}^{\gtrless}(1, 1') &= \int d^3x_2 \int d^3x_{2'} V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) V(\vec{x}_{2'} - \vec{x}_{1'}) \\ &\quad \times [g_0^{\gtrless}(1, 1')g_0^{\gtrless}(2, 2')g_0^{\lesseqgtr}(2', 2)]_{t_2=t_1, t_{2'}=t_{1'}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma_{Be}^{\gtrless}(1, 1') &= - \int d^3x_2 \int d^3x_{2'} V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) V(\vec{x}_{2'} - \vec{x}_{1'}) \\ &\quad \times [g_0^{\gtrless}(1, 2')g_0^{\gtrless}(2, 1')g_0^{\lesseqgtr}(2', 2)]_{t_2=t_1, t_{2'}=t_{1'}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Wir betrachten nun wieder die störungstheoretische Entwicklung der Zweiteilchen-Greensfunktion bis zur entsprechenden Ordnung. Zusätzlich zur einfachen Faktorisierung treten nun Terme auf, die eine Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen enthalten. Die im Vergleich zu (2.28) neu hinzugekommenen Terme sind in Abbildung 2.4 dargestellt.

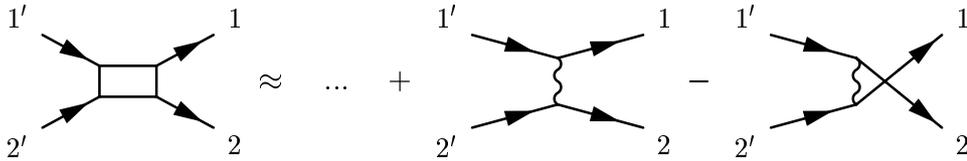


Abbildung 2.4: Zweiteilchen-Greensfunktion

Die Teilchen sind nicht länger unabhängig, es besteht die Möglichkeit von Stößen mit Teilchen aus dem Medium. Auf diese Weise kommt es zum Austausch von Energie und Impuls, die Lebensdauer der Zustände ist somit begrenzt. Wie groß die Lebensdauer ist, hängt von der Häufigkeit der Stoßprozesse ab.

2.4.3 Die Bedeutung von $\Sigma^>$ und $\Sigma^<$

Die Selbstenergien $\Sigma^>$ und $\Sigma^<$ besitzen eine einfache physikalische Interpretation im Sinne von Stoßraten. Um dies zu veranschaulichen, bestimmen wir zunächst die Fourier-transformierten Größen $\Sigma^{\gtrless}(\omega, p)$.

Mit den Feynman-Regeln für Größen mit fester Anordnung der Zeitargumente auf den Zweigen der Kontur, die im Anhang C.5 erläutert werden, erhält man:

$$\begin{aligned} \Sigma^>(\omega, p) &= i \left[\text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} \right] \\ &= \int \frac{d\omega_2 d^3 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_3 d^3 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_4 d^3 p_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(\vec{p} + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\ &\quad \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) [(V(p - p_3))^2 - V(p - p_3)V(p - p_4)] \\ &\quad \times g_0^<(\omega_2, p_2) g_0^>(\omega_3, p_3) g_0^>(\omega_4, p_4). \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie des Integranden und der Integrationsgrenzen bezüglich p_3 und p_4 ist innerhalb der Integration die folgende Umformung zulässig:

$$(V(p - p_3))^2 - V(p - p_3)V(p - p_4) = \frac{1}{2} [V(p - p_3) - V(p - p_4)]^2. \quad (2.35)$$

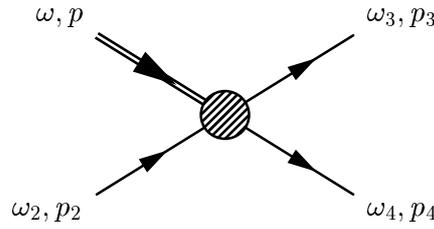


Abbildung 2.5: Zu $i\Sigma^>(\omega, p)$ korrespondierender Stoßprozess. Die Doppellinie trägt den Viererimpuls von $i\Sigma^>$, über die Viererimpulse der einfachen Linien wird integriert.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \Sigma^>(\omega, p) &= \int \frac{d\omega_2 d^3 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_3 d^3 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_4 d^3 p_4}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta(\vec{p} + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ &\quad \times |\mathcal{M}|^2 \cdot g_0^<(\omega_2, p_2) g_0^>(\omega_3, p_3) g_0^>(\omega_4, p_4) \end{aligned} \quad (2.36)$$

mit der Abkürzung $|\mathcal{M}|^2 \equiv \frac{1}{2} [V(p - p_3) - V(p - p_4)]^2$.

Wir erinnern uns, dass $-ig^<(\omega, p)$ die mittlere Dichte der besetzten und $ig^>(\omega, p)$ die mittlere Dichte der unbesetzten Zustände ist. Wir können $i\Sigma^>(\omega, p)$ daher mit der totalen Stoßrate für ein Teilchen mit Energie ω und Impuls p identifizieren:

Ein Teilchen mit Energie ω und Impuls p stößt mit einem Teilchen der Energie ω_2 und Impuls p_2 . Nach dem Stoß befinden sich die Teilchen in den Zuständen ω_3, p_3 und ω_4, p_4 . Der entsprechende Prozess ist in Abbildung 2.5 zu sehen.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess ist in der Bornschen Näherung proportional zu $[V(p - p_3) - V(p - p_4)]^2$ multipliziert mit δ -Funktionen für Energie- und Impulserhaltung während des Stoßes. Diese Faktoren treten auch in (2.36) auf.

Um eine Stoßrate zu erhalten ist es erforderlich, den Wirkungsquerschnitt mit der Dichte der zu Verfügung stehenden Stoßpartner (gegeben durch $-ig^<(\omega_2, p_2)$) sowie mit der Dichte der freien Endzustände ($ig^>(\omega_3, p_3)$ und $ig^>(\omega_4, p_4)$) zu multiplizieren.

Die totale Stoßrate resultiert, wenn über alle möglichen Impulse und Energien für die Stoßpartner und Endzustände integriert wird. Der Vergleich mit (2.36) zeigt, $i\Sigma^>(\omega, p)$ entspricht tatsächlich einer totalen Stoßrate ('scattering-out'- bzw. Verlustrate).

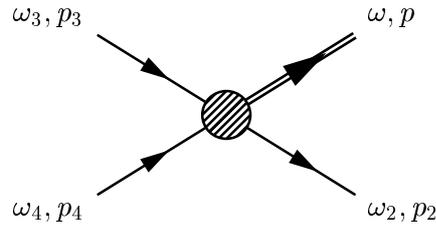


Abbildung 2.6: Zu $-i\Sigma^<(\omega, p)$ korrespondierender Stoßprozess. Die Doppel-
linie trägt den Viererimpuls von $-i\Sigma^<$, über die Viererimpulse der einfachen
Linien wird integriert.

Völlig analog betrachtet man nun $\Sigma^<(\omega, p)$:

$$\begin{aligned}
 \Sigma^<(\omega, p) &= i \left[\begin{array}{c} \text{Diagramm 1: Ein Kreis mit zwei inneren Linien (p₂, p₄) und zwei äußeren Linien (p, p₃).} \\ \text{Diagramm 2: Ein Kreis mit zwei inneren Linien (p₂, p₄) und zwei äußeren Linien (p, p₃).} \end{array} \right] \\
 &= \int \frac{d\omega_2 d^3 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_3 d^3 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_4 d^3 p_4}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times (2\pi)^4 \delta(\vec{p} + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\
 &\quad \times |\mathcal{M}|^2 \cdot g_0^>(\omega_2, p_2) g_0^<(\omega_3, p_3) g_0^<(\omega_4, p_4) \tag{2.37}
 \end{aligned}$$

mit der oben eingeführten Abkürzung $|\mathcal{M}|^2$.

Diesen Ausdruck können wir als totale Stoßrate in die Konfiguration ω, p hinein interpretieren ('scattering-in'- bzw. Gewinnrate), Abbildung 2.6 zeigt den zugehörigen Prozess. Die Argumentation ist im Wesentlichen die gleiche wie für $i\Sigma^>(\omega, p)$:

Zwei Teilchen mit Energie und Impuls ω_3, p_3 bzw. ω_4, p_4 stoßen miteinander und landen in den Endzuständen ω, p und ω_2, p_2 . Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist der gleiche wie beim umgekehrten Prozess; er hängt nicht von der Richtung ab, in der die Reaktion abläuft.

Diesmal muss aber mit der Dichte von zwei einlaufenden Teilchen und nur einem Endzustand multipliziert und darüber integriert werden, um eine totale Stoßrate zu erhalten. Das entspricht gerade Gleichung (2.37).

2.4.4 Eigenschaften von $\Sigma^>$ und $\Sigma^<$

Werden die Korrelationsfunktionen $g^{\lessgtr}(\omega, p)$ in (2.36) und (2.37) gemäß (2.22) und (2.23) durch Spektralfunktionen und Fermi-Verteilungen ersetzt, so erhält

man:

$$\begin{aligned} \Sigma^>(\omega, p) &\sim \int \cdots \delta(\vec{p} + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ &\quad \times n_F(\omega_2) [1 - n_F(\omega_3)] [1 - n_F(\omega_4)] \end{aligned} \quad (2.38)$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma^<(\omega, p) &\sim \int \cdots \delta(\vec{p} + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ &\quad \times [1 - n_F(\omega_2)] n_F(\omega_3) n_F(\omega_4). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Durch die n_F -Faktoren wird sichergestellt, dass an den Stoßprozessen nur Teilchen teilnehmen, die auch tatsächlich im Medium vorhanden sind. Die $[1 - n_F]$ -Faktoren sorgen dafür, dass nur in unbesetzte Endzustände gestreut wird, die nicht 'Pauli-geblockt' sind. In Verbindung mit der δ -Funktion für Energieerhaltung beim Stoß schränken diese Faktoren zusätzlich den Bereich ein, in dem die ein- bzw. auslaufende Energie ω liegen darf.

Besonders deutlich wird dies bei der Betrachtung eines Systems mit Temperatur Null. Die Zustände unterhalb der Fermi-Energie ω_F sind dann vollständig besetzt, alle Zustände, die darüber liegen, sind unbesetzt. Die Fermi-Verteilung geht in eine Θ -Funktion über.

Aus der δ -Funktion folgt die Bedingung:

$$\omega + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4.$$

Damit $\Sigma^>(\omega, p) \neq 0$ ist, müssen die Voraussetzungen $\omega_2 \leq \omega_F$ sowie $\omega_3 > \omega_F$ und $\omega_4 > \omega_F$ erfüllt sein. Einsetzen in obige Bedingung liefert:

$$\omega = \omega_3 + \omega_4 - \omega_2 > 2\omega_F - \omega_F = \omega_F.$$

Es werden zwei freie Endzustände benötigt. Deren Energie liegt immer oberhalb von ω_F . Daher muss die Gesamtenergie der einlaufenden Teilchen mindestens $2\omega_F$ betragen. Da ω_2 aus dem Medium kommt, ist seine Energie nicht höher als ω_F und die restliche Energie, die von ω abgedeckt werden muss, ist mindestens ω_F .

Soll dagegen $\Sigma^<(\omega, p)$ einen endlichen Wert annehmen, müssen gerade die umgekehrten Voraussetzungen erfüllt sein. Es folgt:

$$\omega = \omega_3 + \omega_4 - \omega_2 < 2\omega_F - \omega_F = \omega_F.$$

Die Gesamtenergie der beiden einlaufenden Teilchen aus dem Medium beträgt maximal $2\omega_F$. ω_2 muss größer als ω_F sein, damit ein freier Endzustand zur Verfügung steht. Für die Energie ω bleibt daher maximal ein Betrag von ω_F übrig.

Im Falle von $T = 0$ verschwindet also $\Sigma^>(\omega, p)$ unterhalb der Fermi-Energie während $\Sigma^<(\omega, p)$ nur dort endliche Werte annimmt. Beide Ausdrücke verschwinden

für $\omega = \omega_F$. Bei endlichen Temperaturen weicht die Fermi-Kante auf, es gibt dann auch besetzte Zustände oberhalb von ω_F und unbesetzte Zustände darunter. ω_F ist dann keine scharfe Grenze mehr für $\Sigma^{\gtrless}(\omega, p)$.

Ein quantitativer Ausdruck für diese Aussage ergibt sich, wenn die Beziehung (2.25) zwischen $g^>(\omega, p)$ und $g^<(\omega, p)$ ausgenutzt wird. Durch Einsetzen in (2.36) bzw. (2.37) findet man eine Beziehung zwischen $\Sigma^>(\omega, p)$ und $\Sigma^<(\omega, p)$, die der für die Greensfunktionen gleicht:

$$\Sigma^>(\omega, p) = -e^{\beta(\omega - \omega_F)} \Sigma^<(\omega, p). \quad (2.40)$$

$\Sigma^>$ ist oberhalb der Fermi-Energie immer größer als $\Sigma^<$, unterhalb ist es gerade umgekehrt. Mit zunehmender Entfernung von der Fermi-Energie wird der Unterschied zwischen $\Sigma^>$ und $\Sigma^<$ immer größer. Die Temperatur legt fest, wie schnell der Abfall der einen Funktion gegenüber der anderen abläuft.

2.4.5 Selbstkonsistente Ausdrücke für Σ^{\gtrless}

Wir haben bisher Σ^{\gtrless} nach den wechselwirkungsfreien Greensfunktionen g_0^{\gtrless} entwickelt. In die freien Greensfunktionen geht die Spektralfunktion der freien Teilchen ein ((2.22), (2.23)), also im Prinzip eine δ -Funktion, die Impuls und Energie verknüpft. Das ähnelt der Quasiteilchen-Näherung, in der nur der mean-field-Anteil der Selbstenergie berücksichtigt wird (vgl. (2.29)).

Nun wollen wir einen Schritt weiter gehen und konsequent berücksichtigen, dass wir uns in einem System wechselwirkender Teilchen befinden. Die Teilchen- und Lochzustände, die in der Entwicklung von $\Sigma^>$ und $\Sigma^<$ auftreten, sind eigentlich In-Medium-Zustände. Daher sollte ihre Spektralfunktion einer Verteilung mit endlicher Breite entsprechen.

Wir erreichen das, indem wir in (2.36) und (2.37) die freien Greensfunktionen g_0^{\gtrless} durch die vollen Greensfunktionen g^{\gtrless} ersetzen. Diese enthalten – im Rahmen der Näherung für die Selbstenergie – die In-Medium-Eigenschaften der Zustände. Mit anderen Worten: die Selbstenergie geht in die Berechnung der Selbstenergie mit ein. Daher wird

$$\Sigma^{\gtrless}(\omega, p) = \int \cdots g^{\lessgtr}(\omega_2, p_2) g^{\gtrless}(\omega_3, p_3) g^{\gtrless}(\omega_4, p_4) \quad (2.41)$$

als selbstkonsistenter Ausdruck für $\Sigma^{\gtrless}(\omega, p)$ bezeichnet.

In die Sprache der Feynman-Diagramme übertragen bedeutet die Verwendung der vollen Greensfunktionen in (2.36) und (2.37), dass nichtperturbativ über eine ganze Klasse von Diagrammen summiert wird². Zwei Beispiele für solche Diagramme finden sich in Abbildung 2.7.

²Man erhält diese Diagramme, wenn man eine oder mehrere der Linien in Abbildung 2.3 durch eines der dort abgebildeten Diagramme ersetzt. Diese Ersetzung ist auch rekursiv möglich.



Abbildung 2.7: Beispiele für Beiträge zur selbstkonsistenten Selbstenergie

In unserem endgültigen Modell werden Selbstenergie und Spektralfunktion direkt miteinander verknüpft sein. Durch die abwechselnde, iterative Berechnung der beiden Größen erreichen wir eine vollständig selbstkonsistente Behandlung der In-Medium-Eigenschaften von Teilchen und Löchern.

Abschließend sei erwähnt, dass es eine gebräuchliche Methode gibt, um alle Diagramme, die zur Streuung von zwei Teilchen gehören, in beliebiger Ordnung aufzusummieren. Dieses Verfahren heißt T-Matrix-Approximation und wird in [Da84] beschrieben. Wir verwenden dieses Verfahren allerdings nicht und beschränken uns auf die selbstkonsistente Bornsche Näherung.

2.5 Zerfallsbreite

Wir betrachten ein Vielteilchensystem. Wird zu diesem System ein Teilchen mit Impuls p und Energie ω hinzugefügt und nach einiger Zeit wieder ein Teilchen mit gleichem Impuls und Energie entfernt, so kehrt das System nur dann in seinen ursprünglichen Zustand zurück, wenn das hinzugefügte Teilchen zwischenzeitlich nicht mit den Teilchen des Mediums wechselgewirkt hat.

Das Inverse der Zerfallsbreite $\Gamma(\omega, p)$ ist ein Maß für die Zeit, die sich ein Teilchen im System aufhalten kann, ohne dass sich der Zustand durch die Korrelationen verändert. Im Falle von nichtwechselwirkenden Teilchen verschwindet $\Gamma(\omega, p)$. Die Teilchen beeinflussen sich gegenseitig nicht; es gibt daher keine Möglichkeit für sie, ihren Zustand zu ändern. Sind die Teilchen jedoch nicht unabhängig, dann hat das eine endliche Zerfallsbreite zur Folge.

Für Fermionen ergibt sich die Zerfallsbreite $\Gamma(\omega, p)$ als Summe der Streuraten in die Konfiguration ω, p hinein (Gewinnrate $-i\Sigma^<$) und aus ω, p heraus (Verlustrate $i\Sigma^>$):

$$\Gamma(\omega, p) = i(\Sigma^>(\omega, p) - \Sigma^<(\omega, p)). \quad (2.42)$$

Diese Definition kann man folgendermaßen interpretieren:

- Ein Teilchen mit Energie ω und Impuls p wird zu einem System hinzugefügt. Das Teilchen nimmt dann an Stoßprozessen teil,

$$p, \omega + p_2, \omega_2 \rightarrow p_3, \omega_3 + p_4, \omega_4.$$

Die Häufigkeit für diese Prozesse ergibt sich aus $i\Sigma^>(\omega, p)$.

- Zusätzlich unterbindet die Anwesenheit eines Teilchens mit Energie ω und Impuls p den inversen Prozess,

$$p_3, \omega_3 + p_4, \omega_4 \rightarrow p, \omega + p_2, \omega_2.$$

Dieser Prozess könnte normalerweise im Medium stattfinden, er wird nun aber durch Pauli-Blocking unterbunden. Die Rate für diese Unterdrückung folgt aus $-i\Sigma^<(\omega, p)$.

Die Wirkung von $i\Sigma^>(\omega, p)$ und $-i\Sigma^<(\omega, p)$ ist also gleich. Beide Prozesse sorgen dafür, dass sich Teilchen in den Konfigurationen p_3, ω_3 und p_4, ω_4 anhäufen. Daher müssen sie auch in gleicher Weise zur Zerfallsbreite beitragen.

Bei Bosonen ist es gerade umgekehrt. Dort gibt es kein Pauli-Blocking, stattdessen sorgt die Anwesenheit eines Teilchens in der Konfiguration ω, p für eine Zunahme der Streuung in diesen Zustand. In einem bosonischen System ergibt sich die Zerfallsbreite daher nicht aus der Summe, sondern aus der Differenz der Streuraten.

Für $T = 0$ verschwinden $\Sigma^>$ und $\Sigma^<$ bei der Fermi-Energie. Die Breite ist dann ebenfalls null und die Zustände entlang der Fermi-Kante haben eine unbegrenzte Lebensdauer (Quasiteilchen). Es ist nicht möglich hineinzustreuen, da alle Zustände besetzt sind, es kann aber auch nicht herausgestreut werden, da die Energie nicht genügt, um freie Endzustände zu erreichen.

2.6 Retardierte Greensfunktion und Selbstenergie

Die retardierte Greensfunktion ist definiert als

$$g^{\text{ret}}(1, 1') = \Theta(t - t') [g^>(1, 1') - g^<(1, 1')].$$

Im Gleichgewicht, wenn die Greensfunktionen nur von den Relativkoordinaten abhängen, gilt offensichtlich:

$$g^{\text{ret}}(x, t) = \Theta(t)(-i) \int \frac{d^3p d\omega}{(2\pi)^4} e^{-i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \mathcal{A}(\omega, p).$$

Durch eine Fourier-Transformation erhält man $g^{\text{ret}}(\omega, p)$. Wir interessieren uns für den Imaginärteil dieser Größe. Er ergibt sich aus der Differenz von $g^{\text{ret}}(\omega, p)$

und dem komplex konjugierten $g^{\text{ret}*}(\omega, p)$:

$$\begin{aligned}
2\text{Im}g^{\text{ret}}(\omega, p) &= \frac{1}{i}[g^{\text{ret}}(\omega, p) - g^{\text{ret}*}(\omega, p)] \\
&= - \int d^3x dt \Theta(t) \int \frac{d^3p d\omega'}{(2\pi)^4} e^{i(\omega-\omega')t - i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} \mathcal{A}(\omega', p') \\
&\quad - \int d^3x dt \Theta(t) \int \frac{d^3p d\omega'}{(2\pi)^4} e^{-i(\omega-\omega')t + i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} \mathcal{A}(\omega', p') \\
&= - \int dt \Theta(t) \int \frac{d\omega'}{2\pi} \mathcal{A}(\omega', p) \left(e^{i(\omega-\omega')t} + e^{-i(\omega-\omega')t} \right) \\
&= - \int \frac{d\omega'}{2\pi} \mathcal{A}(\omega', p) \left(\int_0^\infty dt e^{i(\omega-\omega')t} + \int_{-\infty}^0 dt e^{i(\omega-\omega')t} \right) \\
&= -\mathcal{A}(\omega, p).
\end{aligned}$$

In der Rechnung wurde mehrmals von der Beziehung $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ipx} = 2\pi\delta(p)$ Gebrauch gemacht. In der vorletzten Zeile wurde im rechten Teil des Integranden die Substitution $t \rightarrow -t'$ vorgenommen.

Es gilt also:

$$\mathcal{A}(\omega, p) = i[g^>(\omega, p) - g^<(\omega, p)] = -2\text{Im}g^{\text{ret}}(\omega, p). \quad (2.43)$$

Der Kollisionsanteil der retardierten Selbstenergie ist völlig analog definiert:

$$\Sigma_c^{\text{ret}}(1, 1') = \Theta(t - t') [\Sigma^>(1, 1') - \Sigma^<(1, 1')].$$

Es überrascht daher nicht, dass für den Imaginärteil von $\Sigma_c^{\text{ret}}(\omega, p)$ folgt:

$$\Gamma(\omega, p) = i[\Sigma^>(\omega, p) - \Sigma^<(\omega, p)] = -2\text{Im}\Sigma_c^{\text{ret}}(\omega, p). \quad (2.44)$$

Der Realteil von $\Sigma_c^{\text{ret}}(\omega, p)$ lässt sich im Prinzip ähnlich berechnen, $\text{Re}\Sigma_c^{\text{ret}} \sim \Sigma^{\text{ret}} + \Sigma^{\text{ret}*}$. Es ergibt sich die Dispersionsrelation

$$\text{Re}\Sigma_c^{\text{ret}}(\omega, p) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\Gamma(\omega', p)}{\omega - \omega'}. \quad (2.45)$$

Bei der Definition der vollständigen retardierten Selbstenergie muss beachtet werden, dass der mean-field-Anteil zeitlich lokal ist (vgl. (2.27)). Es macht daher keinen Sinn, diesen mit einer Θ -Funktion zu verknüpfen:

$$\Sigma^{\text{ret}}(1, 1') = \Sigma_{\text{mf}}(1, 1') + \Sigma_c^{\text{ret}}(1, 1').$$

Bei der Fourier-Transformation erhält der zeitlich lokale Beitrag keinen Imaginärteil. Die mean-field-Selbstenergie trägt daher nur zum Realteil von $\Sigma^{\text{ret}}(\omega, p)$ bei:

$$\begin{aligned}\text{Re}\Sigma^{\text{ret}}(\omega, p) &= \Sigma_{\text{mf}}(\omega, p) + \mathcal{P} \int \frac{d\omega' \Gamma(\omega', p)}{2\pi \omega - \omega'} \\ \text{Im}\Sigma^{\text{ret}}(\omega, p) &= \text{Im}\Sigma_c^{\text{ret}}(\omega, p) = -\frac{1}{2}\Gamma(\omega, p).\end{aligned}$$

Wir können diese Resultate nun nutzen, um eine Beziehung zwischen Selbstenergie und Spektralfunktion zu konstruieren. Dazu wird die explizite Form der retardierten Greensfunktion im Medium betrachtet:

$$g^{\text{ret}}(\omega, p) = \frac{1}{\omega - p^2/2m - \Sigma^{\text{ret}}(\omega, p)}.$$

Durch Erweiterung mit dem komplex Konjugierten des Nenners folgt sofort der Imaginärteil von g^{ret} und somit eine Gleichung für die Spektralfunktion. Wird der auftretende Imaginärteil der Selbstenergie durch die Breite ersetzt, erhält man einen Ausdruck für die Spektralfunktion als Funktion von $\Gamma(\omega, p)$:

$$\mathcal{A}(\omega, p) = \frac{\Gamma(\omega, p)}{[\omega - p^2/2m - \text{Re}\Sigma^{\text{ret}}(\omega, p)]^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2(\omega, p)}. \quad (2.46)$$

Die Spektralfunktion entspricht also einer Lorentzverteilung, deren Breite sich aus der Zerfallsbreite der Zustände ergibt. Der Realteil der Selbstenergie beeinflusst die Lage der Peaks, hat jedoch keinen Einfluss auf die Breite der Verteilung. Das bestätigt noch einmal die Aussagen über die Bedeutung von Σ_{mf} und Σ_c .

Sind die Teilchen nur schwach korreliert, sind die Stoßraten $\pm i\Sigma^{\text{ret}}$ und somit die Breite klein. Die rechte Seite von (2.46) nähert sich dann – wie zu erwarten – einer δ -Funktion, $\mathcal{A}(\omega, p) \rightarrow \delta(\omega - p^2/2m - \text{Re}\Sigma^{\text{ret}}(\omega, p))$ (Quasiteilchen-Näherung).

2.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden alle Größen vorgestellt, die wir benötigen, um unser Modell zu konstruieren. Wir fassen die wesentlichen Aussagen noch einmal kurz zusammen:

- **Greensfunktionen:**

Bei endlichen Temperaturen sind die Greensfunktionen als Ensemblemittel definiert (2.5). Die Korrelationsfunktionen $-ig^<(\omega, p)$ und $ig^>(\omega, p)$ entsprechen der mittleren Dichte der besetzten bzw. der unbesetzten Zustände.

- **Spektralfunktion:**

Die Spektralfunktion liefert die spektrale Verteilung der möglichen Energien für ein Teilchen mit gegebenem Impuls. Sie ist normiert und über die Besetzungswahrscheinlichkeit mit den Dichten $\pm ig^{\lessgtr}(\omega, p)$ verknüpft (2.22), (2.23).

Die Spektralfunktion hat die Form einer Lorentzverteilung (2.46), deren Breite durch die Zerfallsbreite der Zustände im System gegeben ist. Für kleine Breiten, d.h. nur schwach korrelierte Teilchen, geht diese Verteilung in eine δ -Funktion über.

- **Selbstenergie:**

Man unterscheidet verschiedene Anteile der Selbstenergie. Die Beiträge zum Kollisionsanteil, $i\Sigma^>(\omega, p)$ und $-i\Sigma^<(\omega, p)$, entsprechen den totalen Streuraten aus der Konfiguration ω, p heraus (2.36) bzw. in die Konfiguration ω, p hinein (2.37) (Verlust- und Gewinnrate). Aus kinematischen Gründen sind die Energien, für die $\Sigma^>(\omega, p)$ und $\Sigma^<(\omega, p)$ endliche Werte annehmen, begrenzt.

Werden in den Gleichungen für die Selbstenergien die vollen Greensfunktionen verwendet, ergeben sich selbstkonsistente Ausdrücke (2.41).

- **Breite:**

Die Zerfallsbreite ist ein Maß für die Lebensdauer eines Zustandes. Diese ist durch die mittlere Dauer zwischen den Wechselwirkungen im Medium gegeben. Für Fermionen ist die Breite durch die Summe über die Stoßrate in einen Zustand hinein und die Stoßrate aus dem Zustand heraus (2.42) bestimmt.

Über eine Dispersionsrelation ist die Zerfallsbreite mit dem Realteil der Selbstenergie verknüpft (2.45).

Kapitel 3

Das Modell für Nukleonen

Wir kennen jetzt alle Größen, die wir benötigen, um ein einfaches Modell zur Berechnung der Spektralfunktion von Nukleonen in unendlich ausgedehnter Kernmaterie zusammenzustellen. Die Idee wurde bereits vor 40 Jahren von Kadanoff und Baym formuliert [KB], der numerische Aufwand überstieg aber die damaligen Möglichkeiten.

Vor ca. zwei Jahren wurden die entsprechenden Rechnungen von J. Lehr et al. tatsächlich durchgeführt [Le00], motiviert durch die Einbindung von Off-Shell-Effekten in das am Institut eingesetzte Transportmodell [Ef99]. Von besonderem Interesse war dabei der Einfluss des kurzreichweitigen Anteils der Wechselwirkung auf die Eigenschaften von Kernmaterie.

In diesem Kapitel werden die Methoden und Ergebnisse aus [Le00] vorgestellt. Wie sich zeigen wird, stimmen die Resultate des einfachen Modells sehr gut mit den deutlich aufwändigeren 'state of the art'-Rechnungen aus der Vielteilchentheorie überein. Das soll als Motivation dienen, das Modell anschließend auf Quarks auszuweiten und deren Spektralfunktion mit dem gleichen Verfahren zu bestimmen.

3.1 Motivation

Zum größten Teil ergeben sich die Eigenschaften von Kernmaterie aus langreichweitigen mean-field-Effekten und sind gut verstanden. Aus Experimenten ist allerdings bekannt, dass die Spektralfunktion sich in Energie- und Impulsraum deutlich weiter ausdehnt als die mean-field-Rechnungen das erwarten lassen.

Durch kurzreichweitige Korrelationen werden Zustände mit Impulsen oberhalb der Fermi-Kante angeregt und es kommt zu einer Verschiebung bei der Besetzungswahrscheinlichkeit hin zu hohen Impulsen. Man beobachtet daher einen

langen 'Schwanz' in der Impulsverteilung, der weit über die Fermi-Kante hinausreicht.

Es zeigt sich, dass Größe und Form der Impulsverteilung bei hohen Impulsen weitestgehend unabhängig vom betrachteten System sind, während man bei niedrigeren Impulsen, speziell bei leichten Kernen, deutlich die Einflüsse von Hüllenstruktur und endlicher Größe der Kerne beobachtet. Der 'Schwanz' kann daher als universelle Eigenschaft der kurzreichweitigen Korrelationen angesehen werden.

Es gibt viele theoretische Ansätze, um die kurzreichweitigen Wechselwirkungen zu verstehen. Diese verwenden eine große Zahl von Techniken und sind zum größten Teil sehr aufwändig. In den meisten Fällen ist es notwendig, eine Quasiteilchen-Näherung vorzunehmen, d.h. während der Rechnungen werden die In-Medium-Eigenschaften der Teilchen ignoriert. Ein Überblick über die Ansätze findet sich in [Le00].

3.2 Realisierung des Modells

3.2.1 Überblick

Aus dem letzten Kapitel ist bekannt, wie Spektralfunktion, Korrelationsfunktionen, Selbstenergien und Breite miteinander zusammenhängen. Wir müssen jetzt allerdings Spin und Isospin der Nukleonen angemessen berücksichtigen. Die zu verwendende Punktwechselwirkung ist spin- und isospinunabhängig. Es genügt daher, spin- und isospingemittelte Nukleonen zu betrachten¹ und mit skalaren Feldern anstelle von Pauli-Spinoren zu rechnen. Es ergibt sich folgende Möglichkeit der iterativen Berechnung der Spektralfunktion:

- $\mathcal{A} \rightarrow g^>, g^<$:

$$\begin{aligned} -ig^<(\omega, p) &= \mathcal{A}(\omega, p)n_F(\omega) \\ ig^>(\omega, p) &= \mathcal{A}(\omega, p)[1 - n_F(\omega)] \end{aligned}$$

- $g^{\cong} \rightarrow \Sigma^{\cong}$:

$$\begin{aligned} \Sigma^{\cong}(\omega, p) &= 4 \int \dots \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &\quad \times g^{\cong}(\omega_2, p_2) g^{\cong}(\omega_3, p_3) g^{\cong}(\omega_4, p_4) \end{aligned}$$

¹ $|\mathcal{M}|^2$ sei die über Spin und Isospin der einlaufenden Nukleonen gemittelte und Spin und Isospin der auslaufenden Nukleonen summierte Streuamplitude.

- $\Sigma^>, \Sigma^< \rightarrow \Gamma$:

$$\Gamma(\omega, p) = i[\Sigma^>(\omega, p) - \Sigma^<(\omega, p)]$$

- $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(\omega, p) = \frac{\Gamma(\omega, p)}{[\omega - p^2/2m - \text{Re}\Sigma^{\text{ret}}(\omega, p)]^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2(\omega, p)}$$

Der Faktor 4 vor den Integralen ergibt sich aufgrund der Spin-Isospin-Entartung. Diese Beziehungen bilden ein abgeschlossenes System. Ausgehend von der Spektralfunktion gelangt man über die Korrelationsfunktionen und die Selbstenergien zur Breite, aus der sich wieder die Spektralfunktion ergibt.

Es wird an keiner Stelle eine Näherung gemacht, in der wir die In-Medium-Eigenschaften der Teilchen durch Eigenschaften von freien Teilchen ersetzen (keine Quasiteilchen-Näherung). Die einzige Einschränkung, die wir machen, ist die Begrenzung der Beiträge zur Selbstenergie auf die Born-Terme.

Wie bereits im letzten Kapitel erwähnt, haben wir somit einen vollständig selbstkonsistenten Ausdruck zur Berechnung der Spektralfunktion $\mathcal{A}(\omega, p)$. Da eine analytische Lösung der Gleichungen ausgeschlossen ist, muss die Spektralfunktion iterativ berechnet werden. Da nur numerisches Arbeiten möglich ist, müssen die Funktionswerte auf einem Gitter im Energie- und Impulsraum bestimmt werden.

Aus einer Abschätzung für die Breite ergibt sich die 'nullte' Näherung der Spektralfunktion. Mit dieser werden die aufgelisteten Beziehungen mehrmals hintereinander durchlaufen. Selbstkonsistenz ist erreicht, wenn sich die Spektralfunktion zwischen zwei Zyklen nicht mehr – oder nur noch schwach – ändert.

3.2.2 Vereinfachungen und Näherungen

An dieser Stelle soll diskutiert werden, wie sich die Rechnungen vereinfachen lassen und wie sich das auf die Ergebnisse auswirkt. Wir setzen dabei voraus, dass unendlich ausgedehnte Kernmaterie im thermodynamischen Gleichgewicht betrachtet wird.

Der aufwändigste Teil der Rechnungen sind die mehrdimensionalen Integrale, die gelöst werden müssen, um Σ^{\geq} zu bestimmen. Dort sollten Vereinfachungen daher den größten Nutzen haben.

Arbeitet man bei $T = 0$ vereinfacht das die Rechnungen stark. Wie wir bereits gesehen haben, gilt dann:

$$\begin{aligned} \Sigma^>(\omega, p) = 0 &\Rightarrow \Gamma(\omega, p) = -i\Sigma^<(\omega, p) && \text{für } \omega \leq \omega_F \\ \Sigma^<(\omega, p) = 0 &\Rightarrow \Gamma(\omega, p) = i\Sigma^>(\omega, p) && \text{für } \omega \geq \omega_F. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Es muss also immer nur eine der beiden Größen berechnet werden, um die Breite bei einer bestimmten Energie zu bestimmen. Zusätzlich muss man die Energieintegrale nur ab bzw. bis zur Fermi-Energie auswerten, da die Fermi-Verteilungen in Θ -Funktionen übergehen.

Im Prinzip genügt es bei jeder Temperatur, nur die größere der beiden Selbstenergien $\Sigma^{\lessgtr}(\omega, p)$ über die Integrale zu berechnen. Die kleinere Größe ergibt sich dann unmittelbar aus (2.40). Die Integrationen lassen sich aber bei endlicher Temperatur nicht einfach bei ω_F abschneiden.

Als Nächstes betrachten wir die Nukleon-Nukleon-Streuamplitude \mathcal{M} , die im Integranden auftritt. Sie ist eine Funktion von den drei Impulsen \vec{p}, \vec{p}_3 und \vec{p}_4 . Eine konstante Streuamplitude \mathcal{M} würde die Rechnungen deutlich vereinfachen, da dann einige der Integrale analytisch lösbar werden (g^{\lessgtr} hängen im unendlich ausgedehnten Medium im Gleichgewicht nur vom Betrag der Impulse ab):

$$i\Sigma^{\lessgtr}(\omega, p) \approx 4 \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_3 \int d\omega_2 \int dp_3 p_3^2 \int dp_2 p_2^2 \int \frac{d\cos\vartheta_2}{p_{tot} p_3} g^{\lessgtr}(\omega_2, p_2) \times g^{\lessgtr}(\omega_3, p_3) \int dp_4 p_4 g^{\lessgtr}(\omega_4, p_4) \quad (3.2)$$

mit $p_{tot} = |\vec{p} + \vec{p}_2|$ und $\omega_4 = \omega + \omega_2 - \omega_3$. Es wurden die zwei Integrationen über die Winkel φ_2, φ_3 ausgeführt. Zusätzlich wurden vier weitere Integrationen mit Hilfe der δ -Funktionen aufgelöst.

Die Verwendung einer konstanten Streuamplitude ist ein drastischer Schritt. Für den kurzreichweitigen Teil der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, der uns interessiert, ist diese Näherung aber gerechtfertigt. Ein konstantes \mathcal{M} korrespondiert zu einer räumlich und zeitlich lokalen Punktwechselwirkung. In den Rechnungen ist die Streuamplitude \mathcal{M} somit nur noch ein konstanter Faktor und wird als Parameter behandelt, dessen Wert empirisch abgeschätzt werden muss.

Die Annahme eines konstanten \mathcal{M} bringt ein Problem mit sich. Dazu betrachten wir die Gleichung für die Selbstenergie $\Sigma^>$. Im Wesentlichen wird dort über den Phasenraum der zur Verfügung stehenden Endzustände integriert. Je größer die Energie des einlaufenden Teilchens ist, desto größer wird die Zahl der möglichen Endzustände. $\Sigma^>$ wird daher mit ansteigender Energie immer größer. Eine energieabhängige Streuamplitude würde dieses Verhalten korrigieren, aufgrund unserer Näherung aber zeigt $\Sigma^>$ und somit auch die Breite Γ ein divergentes Verhalten für positive Energien (vgl. Abb. 3.1).

An sich ist das noch kein großes Problem, wenn bei der Interpretation der Ergebnisse der Bereich hoher Energien ignoriert wird. Es gibt aber trotzdem Schwierigkeiten. Dazu betrachten wir die Dispersionsrelation, aus der $\text{Re}\Sigma(\omega, p)$ berechnet werden soll:

$$\text{Re}\Sigma^{\text{ret}}(\omega, p) = \Sigma_{\text{mf}}(\omega, p) + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\Gamma(\omega', p)}{\omega - \omega'}$$

Um $\text{Re}\Sigma(\omega, p)$ zu erhalten, muss man die Breite Γ über die Energie integrieren. Das ist aber numerisch nur möglich, wenn die Breite bei hohen Energien hinreichend schnell gegen null konvergiert.

Der Realteil der Selbstenergie kann also nicht wie vorgesehen berechnet werden und muss durch eine Näherung ersetzt werden. Es könnte beispielsweise ein Cutoff für die Energie als zusätzlicher freier Parameter eingeführt werden. In [Le00] wurde stattdessen die Energie- und Impulsabhängigkeit von $\text{Re}\Sigma(\omega, p)$ vollständig vernachlässigt und ein konstantes $\text{Re}\Sigma$ verwendet.

Das hat offensichtlich Auswirkungen auf die Ergebnisse. Wie man anhand von (2.46) sehen kann, beeinflusst $\text{Re}\Sigma$ die Lage der Peaks in der Spektralfunktion. Ein konstanter Wert sorgt lediglich für eine gleichmäßige Verschiebung der gesamten Struktur. Interessanter sind deshalb eigentlich die energie- und impulsabhängigen Anteile, da diese Modifikationen innerhalb der Struktur der Spektralfunktion verursachen können.

Die Vernachlässigung der Impulsabhängigkeit sollte die Endergebnisse nur unwesentlich beeinflussen: Typischerweise besteht unterhalb der Fermi-Kante eine quadratische Impulsabhängigkeit, die zu einer Skalierung der kinetischen Energie mit einer effektiven Masse führt. Der Effekt wäre eine globale Verdichtung der Spektren.

Größere Unsicherheiten ergeben sich aus der Vernachlässigung der Energieabhängigkeit. Da die Dispersionsrelation nicht erfüllt wird, verletzen wir die Analytizität der Selbstenergie.

3.2.3 Formulierung des Modells

Wir geben nun die endgültigen Gleichungen an, mit denen unser Modell arbeiten soll. Unter Verwendung der diskutierten Näherungen gilt:

- $\mathcal{A} \rightarrow \Sigma^{\geq}$

$$i\Sigma^>(\omega, p) = 4 \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_3 \int d\omega_2 \int dp_3 p_3^2 \int dp_2 p_2^2 \int \frac{d\cos\vartheta_2}{p_{\text{tot}} p_3} \mathcal{A}(\omega_2, p_2) \\ \times n_F(\omega_2) \mathcal{A}(\omega_3, p_3) [1 - n_F(\omega_3)] \int dp_4 p_4 \mathcal{A}(\omega_4, p_4) [1 - n_F(\omega_4)]$$

bzw.

$$-i\Sigma^<(\omega, p) = 4 \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_3 \int d\omega_2 \int dp_3 p_3^2 \int dp_2 p_2^2 \int \frac{d\cos\vartheta_2}{p_{\text{tot}} p_3} \mathcal{A}(\omega_2, p_2) \\ \times [1 - n_F(\omega_2)] \mathcal{A}(\omega_3, p_3) n_F(\omega_3) \int dp_4 p_4 \mathcal{A}(\omega_4, p_4) n_F(\omega_4)$$

- $\Sigma^>, \Sigma^< \rightarrow \Gamma$

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega, p) &= -i\Sigma^<(\omega, p) && \text{für } \omega \leq \omega_F \\ \Gamma(\omega, p) &= i\Sigma^>(\omega, p) && \text{für } \omega \geq \omega_F\end{aligned}$$

- $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(\omega, p) = \frac{\Gamma(\omega, p)}{[\omega - p^2/2m - \text{Re}\Sigma^{\text{ret}}]^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2(\omega, p)}$$

Mit diesen Gleichungen werden die iterativen Rechnungen durchgeführt. Um das Modell zu vervollständigen, muss man noch das (ω, p) -Gitter spezifizieren, auf dem die Rechnungen durchgeführt werden sollen, und eine geeignete Wahl für die Streuamplitude \mathcal{M} treffen.

Wie die Rechnungen zeigen werden, liefert bereits die erste Iteration (mit einer kleinen Initialisierungsbreite) eine gute Näherung für die Spektralfunktion. Die weiteren Iterationen haben nur noch einen kleinen Effekt auf das endgültige Ergebnis. Aus diesem Grund geben wir an dieser Stelle auch die Ausdrücke an, die sich ergeben, wenn in '0ter Näherung' die Spektralfunktion in den Rechnungen durch eine δ -Funktion ersetzt wird (Quasiteilchen-Näherung):

Für sehr kleine Breiten geht die Spektralfunktion in eine δ -Funktion über:

$$\mathcal{A}(\omega, p) \stackrel{\Gamma \rightarrow 0}{\approx} 2\pi \delta\left(\omega - \frac{p^2}{2m} - \text{Re}\Sigma^{\text{ret}}\right). \quad (3.3)$$

Einsetzen in die Integrale für Σ^{\geq} liefert nach einigem Umformen:

$$\begin{aligned}i\Sigma^>(\omega, p) &= 4m \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{(2\pi)^3} \int dp_3 p_3^2 \int dp_2 p_2^2 \int \frac{d\cos\vartheta_2}{p_{\text{tot}} p_3} n_F(p_2^2/2m + \text{Re}\Sigma^{\text{ret}}) \\ &\quad \times [1 - n_F(p_3^2/2m + \text{Re}\Sigma^{\text{ret}})] [1 - n_F(\omega_4)]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}-i\Sigma^<(\omega, p) &= 4m \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{(2\pi)^3} \int dp_3 p_3^2 \int dp_2 p_2^2 \int \frac{d\cos\vartheta_2}{p_{\text{tot}} p_3} [1 - n_F(p_2^2/2m + \text{Re}\Sigma^{\text{ret}})] \\ &\quad \times n_F(p_3^2/2m + \text{Re}\Sigma^{\text{ret}}) n_F(\omega_4)\end{aligned}$$

mit $p_{\text{tot}} = |\vec{p} + \vec{p}_2|$ und $\omega_4 = \omega + p_2^2/2m - p_3^2/2m$.

Diese Ausdrücke sind numerisch wesentlich einfacher auszuwerten als die Integrale, mit denen unser Modell arbeitet. Trotzdem sollten sie eine brauchbare '0te Näherung' für die Spektralfunktion liefern, wenn man die Ergebnisse für Σ^{\geq} in (2.46) einsetzt. Iterative Rechnungen sind mit diesen Beziehungen natürlich nicht möglich.

3.3 Ergebnisse

In [Le00] wurden die Rechnungen auf einem (ω, p) -Gitter durchgeführt, dessen Ränder bei $|\omega| = 0.5$ GeV und $p = p_{max} = 1.25$ GeV lagen. Der Abstand zwischen zwei Gitterpunkten betrug 5 MeV in beiden Richtungen.

Die untersuchte Kernmaterie hatte einen Fermi-Impuls von $p_F = 1.33$ fm⁻¹, eine Dichte von $\rho = 0.16$ fm⁻³ und eine Bindungsenergie pro Nukleon von $\omega_F = -16$ MeV. Die Streuamplitude wurde so gewählt, dass die Ergebnisse von Benhar et al. [Bh] reproduziert werden. Es ergab sich ein Wert von $(\overline{|\mathcal{M}|^2})^{1/2} = 207$ MeV fm⁻³. Übertragen auf einen On-Shell-Prozess entspricht das einem Wirkungsquerschnitt von 20 mb.

Die Rechnungen wurden mit einer kleinen, konstanten Breite von $\Gamma = 0.1$ MeV initialisiert, anschließend wurden fünf vollständige Iterationen durchgeführt. Es waren dann keine Veränderungen in der Spektralfunktion mehr zu erkennen.

3.3.1 Breite

Zunächst werfen wir einen qualitativen Blick auf die berechnete Breite. Abbildung 3.1 zeigt einen repräsentativen Schnitt bei festem Impuls; die erwarteten Eigenschaften sind deutlich zu erkennen.

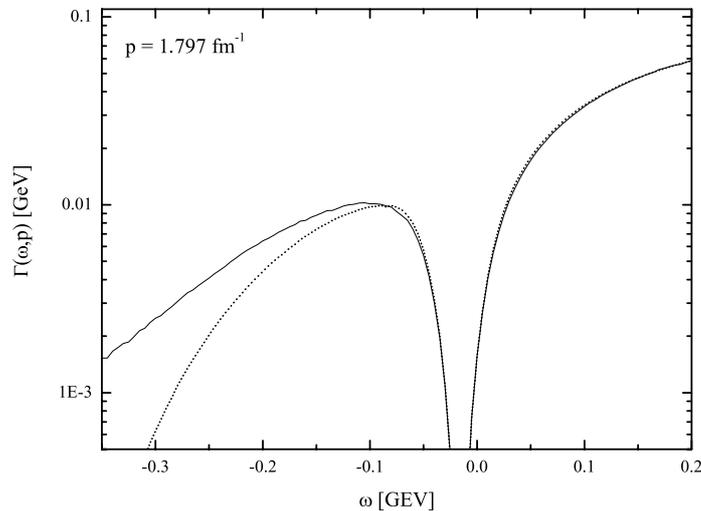


Abbildung 3.1: Breite der Nukleonenzustände bei $p = 1,797$ fm⁻¹. Die gepunktete Linie gibt das Ergebnis nach einer Iteration an.

Es ist zu beobachten, dass die Breite bei der Fermi-Energie tatsächlich verschwindet. Bei ansteigenden positiven Energien zeigt sich das explosive Anwachsen der

Breite, das der konstanten Streuamplitude zuzuschreiben ist. Diesem Bereich darf daher nicht zu viel physikalische Bedeutung beigemessen werden.

Wie man sieht, liefert bereits die erste Iteration eine brauchbare Näherung in der Nähe und oberhalb von ω_F . Von Bedeutung ist, dass durch das Iterieren Stärke hin zu den Regionen mit großem $|\omega|$ transportiert wird. Dieser Effekt ist der Selbstkonsistenz zuzuschreiben und wird im Zusammenhang mit der Diskussion der Spektralfunktion noch einmal aufgegriffen.

3.3.2 Spektralfunktion

Abbildung 3.2 zeigt Schnitte der Spektralfunktion² $P(\omega, p) = N\mathcal{A}(\omega, p)$ bei verschiedenen Impulsen. Dargestellt sind die Ergebnisse nach der ersten und der letzten Iteration, verglichen mit den Resultaten von Benhar et al.³ [Bh]. Aufgrund der unphysikalischen Ergebnisse für die Breite bei positiven Energien betrachten wir nur den Bereich unterhalb von ω_F (besetzte Teilchenzustände).

Es ist auf den ersten Blick erkennbar, dass die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen recht gut ist, wenn die Näherung für \mathcal{M} und die damit verbundene Verletzung der Analytizität berücksichtigt wird. Daraus lässt sich folgern, dass die Spektralfunktion für Kernmaterie im Lochsektor (unterhalb ω_F) nur sehr schwach von der Energie- und Impulsstruktur der Wechselwirkung abhängt, wenn man eine vollständig selbstkonsistente Rechnung durchführt.

Die Auswirkungen der Selbstkonvergenz zeigen sich im Vergleich der ersten Iteration mit dem Endergebnis. Bereits nach dem ersten Durchlauf werden Eigenschaften wie Position und Höhe der Peaks gut beschrieben. Während der weiteren Iterationen wird dann Stärke weg von den Peaks hin zu den Randgebieten verteilt. Die Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung in den Streuprozessen hat also den gleichen Effekt wie eine Vergrößerung der Kopplung.

3.3.3 Impulsverteilung in Kernmaterie

Abschließend betrachten wir die Impulsverteilung der Nukleonen. Man erhält diese durch Integration der Spektralfunktion bis zur Fermi-Energie:

$$n(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (-i)g^<(\omega, p) \stackrel{(2.22)}{=} \int_{-\infty}^{\omega_F} d\omega \mathcal{A}(\omega, p). \quad (3.4)$$

²N ist lediglich eine Normierungskonstante.

³Bei diesen Daten handelt es sich um 'state-of-the-art' Rechnungen aus der Vielteilchentheorie, die mit einem viel höheren theoretischen und numerischen Aufwand gewonnen wurden.

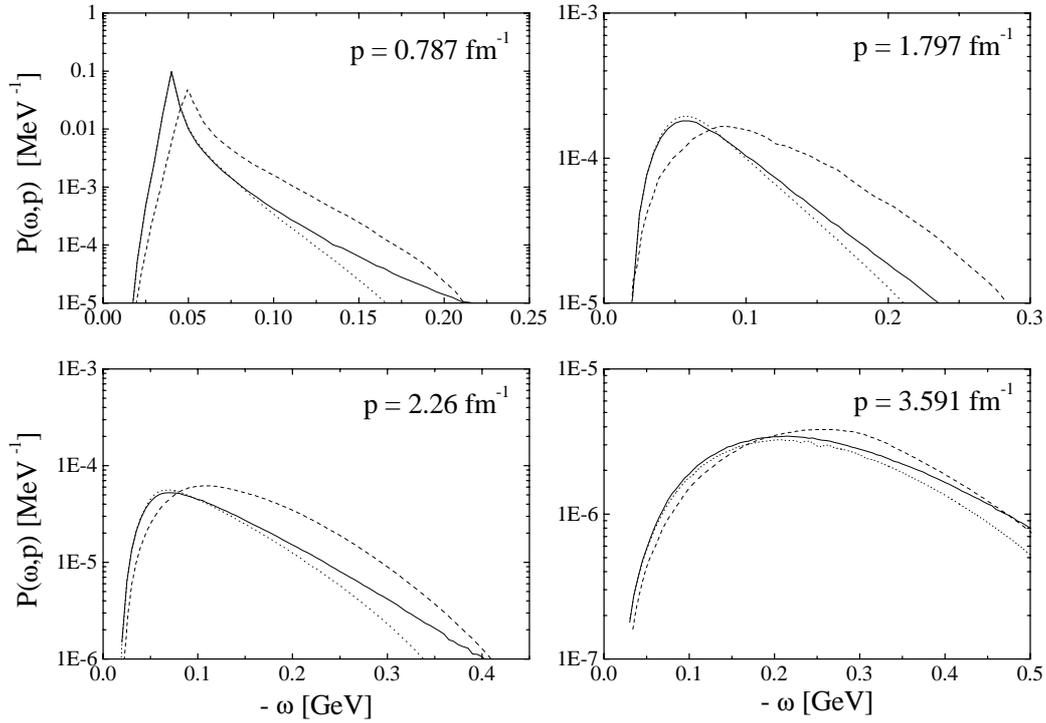


Abbildung 3.2: Nukleon-Spektralfunktion bei verschiedenen Impulsen für Energien unterhalb ω_F , entnommen aus [Le00]. Die gepunkteten Linien sind das Resultat der ersten Iteration, die gestrichelten Linien zeigen Ergebnisse von Benhar et al. [Bh].

In Abbildung 3.3 ist die Impulsverteilung dargestellt. Als Vergleich dienen die Daten von Benhar et al. und zusätzlich experimentelle Daten von degli Atti et al. [dA91].

Die Übereinstimmung ist wieder sehr gut. Es fällt lediglich ein leichter Anstieg der Verteilung hin zu p_F auf, der in den Resultaten von Benhar et al. nicht erkennbar ist. Genauere Untersuchungen zeigen, dass dieser Anstieg eine direkte Folge der Verletzung der Analytizität der Selbstenergie ist. Insgesamt hat also die Vernachlässigung von Energie- und Impulsabhängigkeit von $\text{Re}\Sigma$ nur geringe Auswirkungen.

Die Form der Impulsverteilung hängt stark vom verwendeten Wert für \mathcal{M} ab. Durch einen größeren Wert, also eine stärkere Wechselwirkung zwischen den Nukleonen, würde die Besetzung von Zuständen oberhalb von p_F zunehmen und die Fermi-Kante aufweichen. So ließe sich eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten in Abbildung 3.3 erreichen. Die Daten sind allerdings nicht für Kernmaterie. Der Sprung in den Rechnungen, der in den Daten fehlt, ist durchaus physikalisch.

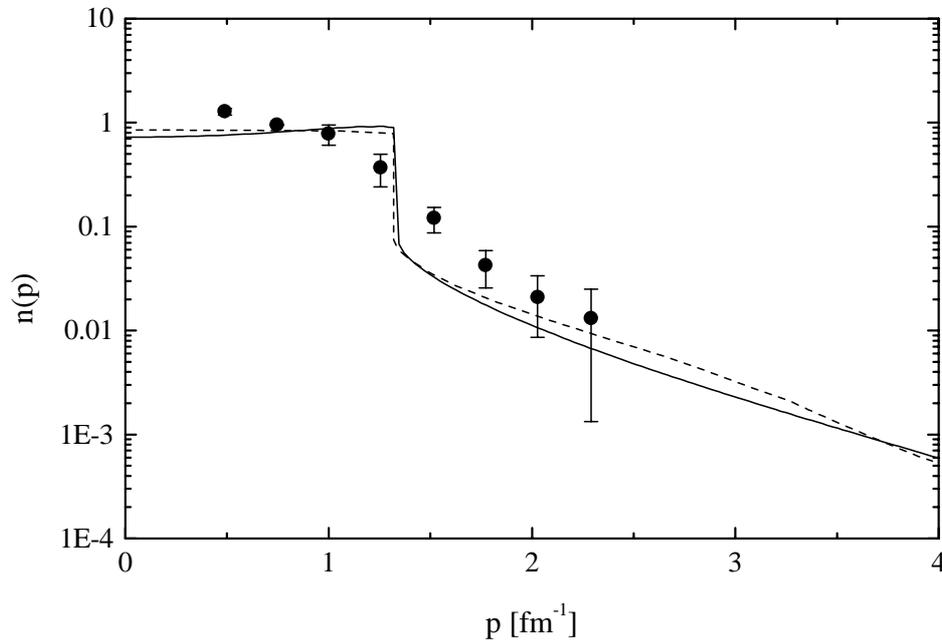


Abbildung 3.3: Impulsverteilung in Kernmaterie berechnet aus der Spektralfunktion, entnommen aus [Le00]. Die gestrichelte Linie ist das Ergebnis von Benhar et al. [Bh], die Daten stammen aus [dA91].

3.4 Zusammenfassung

Mit einem einfachen aber vollständig selbstkonsistenten Modell ist es gelungen, die Ergebnisse aufwändiger Rechnungen aus der Vielteilchentheorie zu reproduzieren. Besonders erstaunlich ist es, dass nur ein freier Parameter (\mathcal{M}) genügt, um sowohl Steigung als auch Höhe des 'Schwanzes' der Impulsverteilung zu reproduzieren.

Da die Wechselwirkung nur sehr vereinfacht durch ein konstantes \mathcal{M} modelliert wird, ist offensichtlich, dass die Eigenschaften der Spektralfunktion von Phasenraumeffekten dominiert werden. Das heißt, die Breite der Spektralfunktion ergibt sich im Wesentlichen aus dem Phasenraumvolumen der verfügbaren Anfangs- und Endzustände. Die Struktur der Wechselwirkung spielt dagegen nur eine untergeordnete Rolle.

Mittlerweile wurden auch Rechnungen mit einem zusätzlichen Formfaktor für die Wechselwirkung durchgeführt. Durch diesen wurde das divergente Verhalten der Breite korrigiert und es war möglich, den Realteil der Selbstenergie zu bestimmen. Die Ergebnisse für die Spektralfunktion ändern sich dadurch kaum. Es zeigt sich allerdings, dass der Anstieg in der Impulsverteilung verschwindet.

Kapitel 4

Der Übergang zu Quarks

4.1 Überblick

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass sich mit dem vorgestellten, selbstkonsistenten Modell sehr gute Ergebnisse für die Spektralfunktion und die Impulsverteilung von Nukleonen in Kernmaterie erzielen lassen. Die gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten und anderen Rechnungen dient uns als Motivation, einen Schritt weiter zu gehen. Wir wollen jetzt die Spektralfunktion der leichten Quarks¹ in unendlich ausgedehnter Quarkmaterie mit dem gleichen Ansatz bestimmen.

Das Konzept des Modells bleibt beim Übergang von Nukleonen zu Quarks unberührt. Durch die Beziehungen zwischen Spektralfunktion und den Selbstenergien Σ^{\geq} soll die Spektralfunktion iterativ berechnet werden. Eine wichtige Schlussfolgerung im letzten Kapitel war, dass Phasenraumeffekte die Eigenschaften der Spektralfunktion wesentlich stärker beeinflussen als die Struktur der Wechselwirkung. Daher werden wir auch die Wechselwirkung zwischen den Quarks durch eine einfache Näherung beschreiben.

In diesem Kapitel gehen wir ausführlich auf die Veränderungen ein, die wir am Modell vornehmen müssen, um mit Quarks zu arbeiten. Im Wesentlichen werden wir uns mit vier Aspekten beschäftigen:

- **Relativistische Rechnungen:** Wir betrachten up- und down-Quarks. Im Verlauf der Rechnungen werden wir uns auf die chiral restaurierte Phase beschränken, dort sind diese leichten Quarks praktisch masselos (< 10 MeV, [PD00]). Es ist daher unvermeidlich, die Rechnungen relativistisch durchzuführen.

¹up- und down-Quarks

- **Lorentzstruktur:** Da es sich bei den Quarks um Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen handelt, werden sie durch Dirac-Spinoren mit vier Komponenten beschrieben. Da wir mit einer spin- und flavorabhängigen Wechselwirkung arbeiten (vgl. Abschnitt 4.4), ist es nicht möglich, die Rechnungen mit spingemittelten Quarks durchzuführen. Im Gegensatz zu den nichtrelativistischen Rechnungen kann also nicht mit skalaren Feldern gearbeitet werden. Spektralfunktion und Selbstenergie werden dadurch zu 4×4 Matrizen. Es wird eine Clifford-Zerlegung durchgeführt, um die Lorentzstruktur der Spektralfunktion zu bestimmen.
- **Wechselwirkung:** Ein einfaches Modell für die Wechselwirkung zwischen den Quarks wird benötigt. Die $SU(2)$ -Version des Nambu–Jona-Lasinio-Modells beschreibt eine effektive Quark-Quark-Wechselwirkung und bietet sich als einfache Näherung für die starke Wechselwirkung an.
- **Quarks und Antiquarks:** In unseren Rechnungen werden Zustände mit negativer Energie auftreten, die wir als Antiteilchenzustände identifizieren. Wir müssen uns daher überlegen, wie sich das auf die Interpretation der Selbstenergien und der Ergebnisse unserer Rechnungen auswirkt.

4.2 Relativistische Formulierungen

4.2.1 Greensfunktionen

Quarks sind Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$. In der relativistischen Quantenfeldtheorie werden sie durch Dirac-Spinoren beschrieben. Es handelt sich dabei um vierdimensionale Felder, deren Dynamik durch die Dirac-Gleichung bestimmt wird [BD, PS]. Es gelten die Anti-Vertauschungsrelationen bei gleichen Zeiten:

$$\begin{aligned}
 \psi_\alpha(\vec{x}, t)\psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t) + \psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\psi_\alpha(\vec{x}, t) &= \delta(\vec{x} - \vec{y})\delta_{\alpha\beta} \\
 \psi_\alpha(\vec{x}, t)\psi_\beta(\vec{y}, t) + \psi_\beta(\vec{y}, t)\psi_\alpha(\vec{x}, t) &= 0 \\
 \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t)\psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t) + \psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Definition der relativistischen zeitgeordneten Greensfunktion erfolgt völlig analog zum nichtrelativistischen Fall. Da es sich bei den Feldern um Spinoren handelt, hat die Greensfunktion jetzt allerdings die Gestalt einer Matrix:

$$g_{\alpha\beta}^c(x, y) = \langle T^c[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] \rangle$$

mit $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ und den Vierervektoren im Ortsraum x und y . Für unsere Rechnungen benötigen wir wieder die Korrelationsfunktionen mit fester Anordnung der Feldoperatoren, $g^>(x, y)$ und $g^<(x, y)$:

$$g_{\alpha\beta}^c(x, y) = \Theta(x^0 - y^0)g_{\alpha\beta}^>(x, y) + \Theta(y^0 - x^0)g_{\alpha\beta}^<(x, y)$$

mit

$$ig_{\alpha\beta}^>(x, y) = \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle \quad (4.2)$$

$$-ig_{\alpha\beta}^<(x, y) = \langle \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) \rangle. \quad (4.3)$$

Diese Korrelationsfunktionen sind aufgrund ihrer Matrixstruktur nicht mehr direkt als Dichten zu identifizieren. Die Dichten lassen sich jedoch leicht aus $g_{\alpha\beta}^{\geq}$ bestimmen. Man multipliziert dazu mit γ_0 und bildet die Spur über den resultierenden Ausdruck. Unter Verwendung von $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ und $\gamma^0 \gamma^0 = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} -i \operatorname{tr}\{\gamma_0 g^<(x, x)\} &= \langle \gamma_{\alpha\beta}^0 \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) \rangle = \langle \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha \rangle \\ i \operatorname{tr}\{\gamma_0 g^>(x, x)\} &= \langle \gamma_{\beta\alpha}^0 \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle = \langle \psi_\alpha \psi_\alpha^\dagger \rangle. \end{aligned}$$

4.2.2 Spektralfunktion

Die Definition der Spektralfunktion bleibt formal unverändert. Allerdings haben die Korrelationsfunktionen jetzt eine Matrixstruktur, daher muss auch die Spektralfunktion eine Matrix sein:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) = i[g_{\alpha\beta}^>(p) - g_{\alpha\beta}^<(p)]. \quad (4.4)$$

Durch Invarianzforderungen wird die Struktur von $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ stark eingeschränkt. Eine ausführliche Diskussion dazu folgt in Abschnitt 4.3.

Die im ersten Kapitel eingeführten Beziehungen

$$-ig_{\alpha\beta}^<(p) = \mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) n_F(p_0) \quad (4.5)$$

$$ig_{\alpha\beta}^>(p) = \mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) [1 - n_F(p_0)] \quad (4.6)$$

gelten auch für die relativistische Spektralfunktion. n_F ist nach wie vor die Besetzungswahrscheinlichkeit in Form der Fermi-Verteilung.

Die Beziehung zwischen Spektralfunktion und retardierter Greensfunktion (2.43) bleibt erhalten, wenn der Begriff des Imaginärteils geeignet definiert wird. Dazu ist es notwendig, in der Definition das hermitesch Konjugierte ($\gamma_0 F^\dagger \gamma_0$) anstelle des komplex Konjugierten (F^*) zu verwenden (vgl. [BD], Anhang A):

$$\operatorname{Re} F := \frac{1}{2}(F + \gamma_0 F^\dagger \gamma_0), \quad \operatorname{Im} F := \frac{1}{2i}(F - \gamma_0 F^\dagger \gamma_0). \quad (4.7)$$

Für skalare komplexe Größen ändert sich durch diese Definition nichts. Es wird auf diese Weise aber sichergestellt, dass die γ -Matrizen – unabhängig von der gewählten Darstellung – wie reelle Größen behandelt werden:

$$\operatorname{Re} \gamma^\mu = \gamma^\mu, \quad \operatorname{Im} \gamma^\mu = 0.$$

Unter Verwendung des in (4.7) definierten Imaginärteils gilt:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) = -2\text{Im}g_{\alpha\beta}^{\text{ret}}(p) \quad (4.8)$$

mit der relativistischen retardierten Greensfunktion g^{ret} :

$$g^{\text{ret}}(p) = \frac{1}{\not{p} - m - \Sigma^{\text{ret}}(p)}.$$

Wir betrachten nun die Normierung der relativistischen Spektralfunktion bei festem Dreierimpuls \vec{p} . Mit Hilfe der Anti-Vertauschungsrelationen (4.1) ergibt sich analog zu (2.21):

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \mathcal{A}(p)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\sigma} \gamma_{\sigma\beta}^0 = \gamma_{\alpha\beta}^0 \quad (4.9)$$

und somit für die Zustandsdichte:

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \text{tr}\{\gamma^0 \mathcal{A}(p)\} = \text{tr}\{\gamma^0 \gamma^0\} = \text{tr}\{1\} = 4. \quad (4.10)$$

Sollen zusätzlich die Freiheitsgrade Flavor und Farbe berücksichtigt werden, so muss auch über diese die Spur gebildet werden. Die Spektralfunktion ist dann normiert auf $4N_f N_c$, mit der Zahl der Flavor N_f und der Zahl der Farben N_c .

4.2.3 Selbstenergie und Zerfallsbreite

Die ausführliche Diskussion der nichtrelativistischen Selbstenergie in Abschnitt 2.4 muss nur an wenigen Stellen modifiziert werden. Zunächst stellen wir fest, dass die relativistische Selbstenergie genau wie die Spektralfunktion eine Matrixstruktur besitzt. Wir werden später zeigen, dass die Lorentzstruktur beider Größen identisch sein muss.

Die Aufspaltung in mean-field- und Kollisionsanteil erfolgt unverändert:

$$\Sigma_{\alpha\beta}(x, y) = \Sigma_{\alpha\beta}^{\text{mf}}(x, y) + \Sigma_{\alpha\beta}^c(x, y)$$

mit

$$\Sigma_{\alpha\beta}^c(x, y) = \Theta(x_0 - y_0) \Sigma_{\alpha\beta}^>(x, y) + (y_0 - x_0) \Sigma_{\alpha\beta}^<(x, y).$$

Die Wechselwirkungen zwischen den Quarks werden wir durch das NJL-Modell, das in Abschnitt 4.4 vorgestellt wird, beschreiben. Bei der expliziten Berechnung der Selbstenergien werden wir uns wieder auf die Born-Terme beschränken.

$i\Sigma^>(p)$ und $-i\Sigma^<(p)$ lassen sich nach wie vor als Stoßraten interpretieren. Da auch Antiteilchen auftreten können, gibt es jetzt aber mehr als zwei Prozesse, die in Σ^{\geq} eingehen. Die Details diskutieren wir in Abschnitt 4.5.

Auch für die Zerfallsbreite ändert sich formal nichts. Es gelten weiterhin die bekannten Beziehungen zu Σ^{\geq} und Σ^{ret} :

$$\Gamma_{\alpha\beta}(p) = i[\Sigma_{\alpha\beta}^{\geq}(p) - \Sigma_{\alpha\beta}^{\leq}(p)]$$

und (mit dem in (4.7) definierten Imaginärteil)

$$\Gamma_{\alpha\beta}(p) = -2\text{Im}\Sigma_{\alpha\beta}^{\text{ret}}(p), \quad (4.11)$$

sowie die Dispersionsrelation

$$\text{Re}\Sigma^{\text{ret}}(p) = \Sigma^{\text{mf}}(p) + \mathcal{P} \int \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{\Gamma(p'_0, \vec{p})}{p_0 - p'_0}.$$

Man kann direkt ablesen, dass $\Gamma(p)_{\alpha\beta}$ die Lorentzstruktur der Selbstenergien übernimmt.

4.3 Lorentzstruktur

4.3.1 Ruhesystem des Mediums

Wir führen unsere Rechnungen in unendlich ausgedehnter Quarkmaterie im thermodynamischen Gleichgewicht durch. Unter diesen Umständen ist das Medium durch einen Impuls-Vierervektor $n_\mu = (n_0, \vec{n})$, der Energie und Bewegungsrichtung angibt, vollständig charakterisiert.

Im Ruhesystem des Mediums verschwindet der Dreierimpuls \vec{n} . Da der Lorentzskalar $n^2 = n^\mu n_\mu = n_0^2 - \vec{n}^2$ in allen Systemen den gleichen Wert haben muss, sollte die Energie des Mediums im Ruhesystem minimal sein. Durch Messung der Energieverteilung (effektive Temperatur, Blauverschiebung) und Lorentz-Boosts besteht daher immer die Möglichkeit, das Ruhesystem des Mediums zu bestimmen und dorthin zu 'boosten'.

Im Rest dieser Arbeit werden wir durchgehend davon ausgehen, dass wir uns im Ruhesystem des Mediums befinden, weil das Verschwinden der Dreierimpulse die Überlegungen erheblich vereinfacht. Eine Einschränkung stellt diese Festlegung für uns nicht dar.

4.3.2 Lorentzstruktur der Spektralfunktion

Welche Lorentzstruktur hat die Spektralfunktion? Diese Frage lässt sich nicht anhand der bekannten Beziehungen zu Selbstenergie und Breite beantworten, da auch die Struktur dieser Größen unbekannt ist. Wir werden deshalb nach einer

anderen Methode vorgehen. Dazu wird ein allgemeiner Ansatz für die Spektralfunktion gemacht und das Verhalten dieses Ansatzes unter bestimmten Symmetrietransformationen untersucht. Die Forderung nach Invarianz der Spektralfunktion unter den gegebenen Symmetrien sorgt dann für Einschränkungen in der allgemeinen Struktur.

Ein unendlich ausgedehntes System im thermodynamischen Gleichgewicht² ist sicherlich invariant unter den diskreten Symmetrien Parität (Raumspiegelung) und Zeitumkehr. Daher beschäftigen wir uns zunächst mit diesen beiden Symmetrien. Im Hinblick auf spätere Näherungen werden wir zusätzlich die chirale Symmetrie $SU_L(2) \otimes SU_R(2) = SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ betrachten. In einem System, das invariant unter dieser Symmetrie ist, sind die Quarks masselos und die Lorentzstruktur der Spektralfunktion vereinfacht sich zusätzlich.

Zunächst verwenden wir die Definition der Spektralfunktion, um diese durch die Feldoperatoren $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ auszudrücken:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) &= i[g_{\alpha\beta}^>(p) - g_{\alpha\beta}^<(p)] \\ &= i \int d^4x e^{ip \cdot x} [g_{\alpha\beta}^>(x) - g_{\alpha\beta}^<(x)] \\ &= \int d^4x e^{ip \cdot x} [\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle + \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle]. \end{aligned}$$

Da die Transformationseigenschaften der Felder bekannt sind, lässt sich so das Verhalten der Spektralfunktion unter den Symmetrietransformationen bestimmen. Im Anhang B wird anhand dieses Ausdrucks gezeigt, wie sich die Spektralfunktion unter Paritäts- (B.9) und Zeitumkehrtransformationen (B.16) verhalten muss.

Wir gehen davon aus, dass unsere Theorie invariant unter diesen diskreten Symmetrien ist. Da unser Medium sich im Gleichgewicht befindet, sollte es Parität und Zeitumkehr nicht verletzen. Aus den Regeln (B.9) und (B.16) wird dann

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) = \gamma_{\alpha\sigma}^0 \mathcal{A}_{\sigma\rho}(p_0, -\vec{p}) \gamma_{\rho\beta}^0 \quad (4.12)$$

für die Paritätstransformation und

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) = (-\gamma_{\alpha\sigma}^1 \gamma_{\sigma\rho}^3) \mathcal{A}_{\rho\mu}^*(p_0, -\vec{p}) (\gamma_{\mu\nu}^1 \gamma_{\nu\beta}^3) \quad (4.13)$$

für die Zeitumkehrtransformation.

Unser Ziel ist es jetzt, einen allgemeinen Ansatz für die relativistische Spektralfunktion zu bestimmen. Auf diesen Ansatz können wir dann die angegebenen

²Für endliche Systeme, wie z.B. Nukleonen, oder Systeme im Nichtgleichgewicht gelten die folgenden Überlegungen nicht.

Regeln anwenden und alle Terme ausschließen, die die falsche Parität bzw. das falsche Verhalten bei Zeitumkehr besitzen.

$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)$ ist eine 4×4 -Matrix, die wir nach den 16 linear unabhängigen Produkten der γ -Matrizen entwickeln können (Clifford-Zerlegung). Es stehen zur Verfügung:

1	Skalar
γ^μ	Vektor
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	Tensor
$\gamma^\mu \gamma^5$	Axial-Vektor
γ^5	Pseudo-Skalar

Die Spektralfunktion ist lorentzinvariant. Die Matrizen γ^μ , $\sigma^{\mu\nu}$ und $\gamma^\mu \gamma^5$ müssen daher mit Vierervektoren kontrahiert werden, um Lorentzskalare zu erhalten. Es existieren zwei Vierervektoren, die wir dazu verwenden können:

p^μ	Viererimpuls des betrachteten Zustands
$n^\mu (= (n_0, \vec{0}))$	Viererimpuls des Mediums (im Ruhesystem)

Die allgemeinste Clifford-Zerlegung, die wir mit den angegebenen Vierervektoren³ im Ruhesystem des Mediums konstruieren können, ist somit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(p) = & \rho_s(p_0, \vec{p}^2) + \rho_p(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma^5 \\
& + \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \cdot p_\mu \gamma^\mu + \rho_{vn}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 \\
& + \rho_t(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 p_i \sigma^{0i} + \rho_\epsilon(p_0, \vec{p}^2) \cdot n^0 p^i \epsilon_{0ijk} \sigma^{jk} \\
& + \rho_{ap}(p_0, \vec{p}^2) \cdot p_\mu \gamma^\mu \gamma^5 + \rho_{an}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 \gamma^5. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Die Entwicklungskoeffizienten ρ_x sind skalare Funktionen. Damit sie lorentzinvariant sind, dürfen sie nur von p^2 und $p \cdot n = p_0 n_0$ abhängen (bzw. von p_0 und $p^2 - p_0^2 = \vec{p}^2$). In den Tensor-Termen wurde ausgenutzt, dass $\sigma^{\mu\mu} = 0$ gilt. Es tritt außerdem kein Term $\sim p^\mu p^\nu \sigma_{\mu\nu}$ auf, da $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ und somit $p^\mu p^\nu \sigma_{\mu\nu} = 0$ gilt.

Wir setzen nun den Ansatz (4.14) in die Regel für die Parität (4.12) ein. Die Entwicklungskoeffizienten verändern sich dabei nicht. Man erhält ($\gamma^0 \gamma^0 = 1$):

$$\begin{aligned}
\gamma^0 \mathcal{A}(p_0, -\vec{p}) \gamma^0 = & \rho_s(p_0, \vec{p}^2) + \rho_p(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \\
& + \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \cdot (p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^0 \gamma^i \gamma^0) + \rho_{vn}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 \\
& + \rho_t(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 (-p_i) \gamma^0 \sigma^{0i} \gamma^0 + \rho_\epsilon(p_0, \vec{p}^2) \cdot n^0 (-p^i) \epsilon_{0ijk} \gamma^0 \sigma^{jk} \gamma^0 \\
& + \rho_{ap}(p_0, \vec{p}^2) \cdot (p_0 \gamma^5 \gamma^0 + p_i \gamma^0 \gamma^i \gamma^5 \gamma^0) \\
& + \rho_{an}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^5 \gamma^0.
\end{aligned}$$

³Man kann sich hier natürlich die Frage stellen, warum die Spektralfunktion vom Impulsvektor \vec{p} abhängen sollte, wenn ein unendlich ausgedehntes Medium ohne Vorzugsrichtung betrachtet wird. Diesen Punkt werden wir am Ende des Abschnitts noch einmal aufgreifen, wenn einige der Terme in (4.14) bereits eliminiert wurden.

Für γ^0 gelten die (Anti-)Vertauschungsrelationen $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$, $\{\gamma^0, \gamma^5\} = 0$, $\{\gamma^0, \sigma^{0i}\} = 0$ und $[\gamma^0, \sigma^{ij}] = 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \gamma^0 \mathcal{A}(p_0, \vec{p}^2) \gamma^0 &= \rho_s(p_0, \vec{p}^2) - \rho_p(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma^5 \\ &+ \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \cdot (p_0 \gamma^0 - p_i \gamma^i) + \rho_{vn}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 \\ &+ \rho_t(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 p_i \sigma^{0i} - \rho_\epsilon(p_0, \vec{p}^2) \cdot n^0 p^i \epsilon_{0ijk} \sigma^{jk} \\ &- \rho_{ap}(p_0, \vec{p}^2) \cdot (p_0 \gamma^0 \gamma^5 - p_i \gamma^i \gamma^5) - \rho_{an}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 \gamma^5. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Der Vergleich von (4.15) und (4.14) zeigt, dass die Bedingung (4.12) nur dann erfüllt werden kann, wenn gilt:

$$\rho_p = \rho_\epsilon = \rho_{ap} = \rho_{an} = 0,$$

da der pseudoskalare Term, die axialvektoriellen Terme und der ϵ -Tensor-Term ihr Vorzeichen gewechselt haben.

Unser Ansatz reduziert sich somit auf:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p) &= \rho_s(p_0, \vec{p}^2) + \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \cdot p_\mu \gamma^\mu + \rho_{vn}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 \\ &+ \rho_t(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 p_i \sigma^{0i}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Diesen Ausdruck setzen wir nun in die Regel für Zeitumkehr (4.13) ein. Die Entwicklungskoeffizienten und die Impulse sind reell, es müssen daher nur die γ -Matrizen komplex konjugiert werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p) &= (-\gamma^1 \gamma^3) [\rho_s(p_0, \vec{p}^2) + \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \cdot (p_0 \gamma^0 + p_i (\gamma^i)^*) \\ &+ \rho_{vn}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 + \rho_t(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 (-p_i) (\sigma^{0i})^*] (\gamma^1 \gamma^3). \end{aligned}$$

In unserer Darstellung sind die Matrizen γ^0, γ^1 und γ^3 reell. γ^2 ist rein imaginär, es gilt $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$. Für den Tensor σ^{0i} bedeutet das:

$$(\sigma^{02})^* = \sigma^{02}, \quad (\sigma^{01})^* = -\sigma^{01}, \quad (\sigma^{03})^* = -\sigma^{03}. \quad (4.17)$$

Nun müssen wir wieder die Eigenschaften der γ -Matrizen ausnutzen, um diesen Ausdruck weiter auszuwerten. Mit $(\gamma^1)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$ und den (Anti-)Vertauschungsrelationen $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2g^{ij}$ und $[\gamma^i, \sigma^{0j}]_{i \neq j} = 0$ erhalten wir⁴:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p) &= \rho_s(p_0, \vec{p}^2) + \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \cdot (p_0 \gamma^0 - p_i \gamma^i) \\ &+ \rho_{vn}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 - \rho_t(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 p_i \sigma^{0i} \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} -\gamma^1 \gamma^3 (\gamma^i)^* \gamma^1 \gamma^3 &= -\gamma^i \\ -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 &= \gamma^0 \\ -\gamma^1 \gamma^3 (\sigma^{0i})^* \gamma^1 \gamma^3 &= \sigma^{0i} \end{aligned}$$

Wenn man dieses Ergebnis mit (4.16) vergleicht, dann stellt man fest, dass der Tensor-Term nicht invariant unter Zeitumkehr ist. Es muss also gelten:

$$\rho_t = 0.$$

Damit verbleiben für die Spektralfunktion nur noch der skalare und die vektoriellen Terme:

$$\mathcal{A}(p) = \rho_s(p_0, \vec{p}^2) + \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \cdot p_\mu \gamma^\mu + \rho_{vn}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0.$$

Wir formen diesen Ausdruck ein wenig um, indem wir die γ^0 - von den γ^i -Beiträgen trennen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p) &= \rho_s(p_0, \vec{p}^2) + \rho_{vn}(p_0, \vec{p}^2) \cdot n_0 \gamma^0 \\ &\quad + \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \cdot p_0 \gamma^0 - \rho_{vp}(p_0, \vec{p}^2) \vec{p} \cdot \vec{\gamma}. \end{aligned}$$

Abschließend führen wir noch die neuen Koeffizienten $\rho_v = -\rho_{vp} \cdot |\vec{p}|$ und $\rho_0 = \rho_{vp} \cdot p_0 + \rho_{vn} \cdot n_0$ ein. Das endgültige Ergebnis für die relativistische Spektralfunktion in einem unendlich ausgedehnten Medium im thermodynamischen Gleichgewicht lautet somit:

$$\mathcal{A}(p) = \rho_s(p_0, \vec{p}^2) + \rho_0(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma^0 + \rho_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}. \quad (4.18)$$

Dieses Ergebnis gilt auch im Vakuum. Da dort $n_0 = 0$ gilt, unterscheiden sich ρ_0 und ρ_v lediglich durch einen Faktor $p_0/|\vec{p}|$ und ein Vorzeichen, $\rho_0 = -\rho_v p_0/|\vec{p}|$. Es sind also nur zwei unabhängige Koeffizienten (ρ_s und ρ_0), die im Vakuum bestimmt werden müssen (vgl. [BD]).

Im Nichtgleichgewicht ist die Spektralfunktion nicht mehr invariant unter Zeitumkehr; es macht dann einen Unterschied, ob man sich vorwärts oder rückwärts in der Zeit bewegt. Somit kann auch ein Tensor-Term mit $\rho_t \neq 0$ existieren. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt: In einem endlichen System, wie etwa einem Nukleon, kann die Zeitumkehrinvarianz auch im Gleichgewicht verletzt sein, z.B. durch ungepaarte Quark-Spins.

In der Spektralfunktion (4.18) tritt eine Abhängigkeit von der Richtung des Impulsvektors \vec{p} auf (vgl. Fußnote auf S. 41). Genauer gesagt enthält (4.18) einen Term $\sim \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}$, es liegt hier also eine Abhängigkeit von der Polarisation des Teilchens vor.

Obwohl ein unendlich ausgedehntes Medium betrachtet wird, ist es an dieser Stelle nicht möglich, eine Spinmittelung durchzuführen und so den Term $\rho_v \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}$ verschwinden zu lassen. Der Grund dafür liegt in dem Modell, das wir für die Quark-Quark-Wechselwirkung verwenden wollen. Das NJL-Modell, das in Abschnitt 4.4 vorgestellt wird, beschreibt eine spin- und flavorabhängige Wechselwirkung. Es ist daher nicht möglich, die iterativen Rechnungen mit spingemittelten Quarks durchzuführen. Erst am Ende der Rechnungen, wenn ein selbstkonsistentes Ergebnis für alle Komponenten von \mathcal{A} vorliegt, kann eine Spinmittelung in Erwägung gezogen werden.

4.3.3 Spektralfunktion in der chiral restaurierten Phase

Das Ergebnis (4.18) lässt sich noch weiter einschränken, wenn die Invarianz des Systems unter zusätzlichen Symmetrien angenommen wird. Für uns ist die Invarianz unter der chiralen Symmetrie $SU_L(2) \otimes SU_R(2) = SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ von besonderem Interesse, denn wir werden unser Modell später auf die chiral restaurierte Phase beschränken (gerade weil sich dort die Spektralfunktion vereinfacht).

In Anhang B wird gezeigt (Gleichung (B.25)), dass die Spektralfunktion genau dann invariant unter chiralen Symmetrietransformationen ist, wenn sie mit der Matrix γ^5 antivertauscht (vgl. (B.26)). Wir betrachten nun den Antikommutator der Spektralfunktion aus (4.18) und der γ^5 -Matrix. Unter Verwendung von $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ gilt:

$$\{\mathcal{A}, \gamma^5\} = \rho_s \{1, \gamma^5\} + \rho_0 \{\gamma^0, \gamma^5\} + \rho_v \frac{p_i}{|\vec{p}|} \{\gamma^i, \gamma^5\} = 2\rho_s \gamma^5. \quad (4.19)$$

In einem chiral invarianten System muss der skalare Term ρ_s also verschwinden. Dementsprechend hat die Spektralfunktion in einem solchen System die Form:

$$\mathcal{A}^{\text{chiral}}(p) = \rho_0(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma^0 + \rho_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}. \quad (4.20)$$

4.3.4 Die Bedeutung von ρ_0

Der interessanteste Beitrag der Zerlegung ist der $\rho_0 \gamma_0$ -Term. Das wird bei der Bestimmung der Zustandsdichte aus der Spektralfunktion deutlich. Wie bei den Korrelationsfunktionen g^{\geq} wird mit γ_0 multipliziert und die Spur gebildet, um eine Dichte zu erhalten:

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\gamma_0 \mathcal{A}(p)\} &= \rho_s(p_0, \vec{p}^2) \text{tr}\{\gamma_0\} + \rho_0(p_0, \vec{p}^2) \text{tr}\{1\} \\ &\quad + \rho_v(p_0, \vec{p}^2) \frac{p_i}{|\vec{p}|} \text{tr}\{\gamma_0 \gamma^i\} \\ &= 4 \cdot \rho_0(p_0, \vec{p}^2) \end{aligned} \quad (4.21)$$

unter Verwendung von $\text{tr}\{\gamma_0\} = 0$ und $\text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu}$.

Aus (4.10) folgt die Normierung von $\rho_0(p_0, \vec{p}^2)$:

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \rho_0(p_0, \vec{p}^2) = 1. \quad (4.22)$$

Somit ist die Dichte aller Zustände, mit der wir die nichtrelativistische Spektralfunktion identifiziert hatten, hier alleine durch den Koeffizienten $\rho_0(p_0, \vec{p}^2)$ gegeben.

Die Koeffizienten ρ_s und ρ_v sind nicht auf die gleiche Weise normiert. Der Ansatz, der auf (4.22) führt, liefert:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp_0}{2\pi} \text{tr}\{\gamma^i \mathcal{A}(p)\} &= - \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{p_i}{|\vec{p}|} \rho_v \stackrel{(4.9)}{=} \text{tr}\{\gamma^i \gamma^0\} = 0 \\ \int \frac{dp_0}{2\pi} \text{tr}\{1 \cdot \mathcal{A}(p)\} &= \int \frac{dp_0}{2\pi} \rho_s \stackrel{(4.9)}{=} \text{tr}\{\gamma^0\} = 0. \end{aligned}$$

Insbesondere für ρ_v ist diese Tatsache aber nicht überraschend, denn es ist nicht positiv definit (vgl. Definition von ρ_0 und ρ_v im vorletzten Abschnitt).

4.3.5 Lorentzstruktur der Selbstenergie

Die Lorentzstruktur der Selbstenergie lässt sich leicht aus der Lorentzstruktur der Spektralfunktion ableiten. Dazu betrachten wir die Dyson-Gleichung [Da84]:

$$g(p) = g_0(p) + g_0(p)\Sigma(p)g(p). \quad (4.23)$$

Wird die Dyson-Gleichung auf beiden Seiten mit $g^{-1}(p)$ und $g_0^{-1}(p)$ multipliziert, dann ergibt sich:

$$\Sigma(p) = g_0^{-1}(p) - g^{-1}(p).$$

Aus Gleichung (4.4) geht hervor, dass die Greensfunktionen $g_0(p)$ und $g(p)$ die gleiche Lorentzstruktur wie die Spektralfunktion haben. Die Struktur von Selbstenergie und Spektralfunktion ist somit eng verknüpft. Es genügt, die Lorentzstruktur der inversen Greensfunktionen (bzw. der Spektralfunktion) zu bestimmen, um die Struktur der Selbstenergie herauszufinden.

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} g_0(p) &= a_0(p_0, \vec{p}^2)\gamma^0 + a_v(p_0, \vec{p}^2)\vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} + b(p_0, \vec{p}^2) \\ &\equiv a_\mu(p_0, \vec{p}^2)\gamma^\mu + b(p_0, \vec{p}^2) \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_0^{-1}(p) &= [a_\mu \gamma^\mu + b]^{-1} = \frac{a_\mu \gamma^\mu - b}{(a_\mu \gamma^\mu + b)(a_\mu \gamma^\mu - b)} \\ &= \frac{a_\mu \gamma^\mu - b}{a_\mu a_\nu g^{\mu\nu} - b^2} = \frac{a_0 \gamma_0 + a_v \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} - b}{a_0^2 - a_v^2 - b^2} \\ &\equiv \tilde{a}_0 \gamma_0 + \tilde{a}_v \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} - \tilde{b}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

In der zweiten Zeile wurde die Anti-Vertauschungsrelation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ausgenutzt, es gilt $a_\mu a_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = a_\mu a_\nu g^{\mu\nu}$. Die Koeffizienten, die im letzten Schritt

eingeführt wurden, setzen sich aus Funktionen von p_0 und \vec{p}^2 zusammen. Daher gilt auch für sie: $\tilde{b} = \tilde{b}(p_0, \vec{p}^2)$, $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(p_0, \vec{p}^2)$ und $\tilde{a}_v = \tilde{a}_v(p_0, \vec{p}^2)$.

Völlig analog folgt für $g(p) = c_0\gamma^0 + c_v\vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} + d \equiv c_\mu\gamma^\mu + d$:

$$g^{-1}(p) = \tilde{c}_0\gamma_0 + \tilde{c}_v\vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} - \tilde{d} \quad (4.25)$$

mit $\tilde{d} = \tilde{d}(p_0, \vec{p}^2)$, $\tilde{c}_0 = \tilde{c}_0(p_0, \vec{p}^2)$ und $\tilde{c}_v = \tilde{c}_v(p_0, \vec{p}^2)$.

Die Lorentzstruktur der Selbstenergie lässt sich nun direkt ablesen:

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= [a_\mu\gamma^\mu + b]^{-1} - [c_\nu\gamma^\nu + d]^{-1} \\ &= (\tilde{a}_0 - \tilde{c}_0)\gamma_0 + (\tilde{a}_v - \tilde{c}_v)\vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} - (\tilde{b} - \tilde{d}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Somit ist die Lorentzstruktur der Selbstenergie mit der Struktur der Spektralfunktion identisch. Wir schreiben:

$$\Sigma(p) = \Sigma_s(p_0, \vec{p}^2) + \Sigma_0(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma_0 + \Sigma_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}. \quad (4.27)$$

In Abschnitt 4.3.3 wurde gezeigt, dass in einem System, das invariant unter chiralen Symmetrietransformationen ist, der skalare Term der Spektralfunktion ρ_s verschwindet. In Gleichung (4.26) bedeutet das, dass \tilde{b} und \tilde{d} null sein müssen. Dementsprechend verschwindet auch der skalare Term in der Selbstenergie:

$$\Sigma^{\text{chiral}}(p) = \Sigma_0(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma_0 + \Sigma_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}. \quad (4.28)$$

4.4 Das Nambu–Jona-Lasinio-Modell der QCD

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist als Theorie der starken Wechselwirkung anerkannt. Es besteht jedoch das Problem, dass die Quark-Gluon-Kopplungskonstante ('laufende Kopplungskonstante') nur im Bereich großer Impulsüberträge klein genug ist, um störungstheoretische Rechnungen zu gestatten. Dieses Phänomen wird als 'asymptotische Freiheit' bezeichnet, die bei kurzen Entfernungen auftritt.

Bei größeren Entfernungen und kleineren Impulsüberträgen, wie sie beispielsweise in der hadronischen Physik auftreten, wird die Kopplungskonstante groß. Die störungstheoretischen Verfahren, die aus der Quantenelektrodynamik (QED) bekannt sind, lassen sich dann nicht mehr anwenden. Die einzige Möglichkeit, die Bewegungsgleichungen der QCD exakt zu lösen, liegt in der Rechnung auf einem diskreten Gitter. Diese als Gitter-Eich-Theorie oder Lattice-QCD bekannten Methoden sind aber numerisch sehr aufwändig und nur auf Höchstleistungsrechnern einsetzbar. Außerdem sind sie nicht anwendbar bei dynamischen Berechnungen sowie bei endlichem chemischen Potential.

Es besteht daher die Notwendigkeit, eine einfachere Lagrange-Dichte zu bestimmen, die einige der wesentlichen Eigenschaften der QCD beinhaltet aber trotzdem mathematisch handhabbar bleibt.

4.4.1 Überblick

Das Nambu–Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) in seiner ursprünglichen Form wurde bereits 1961 für Nukleonen entwickelt, Quarks waren damals noch unbekannt. Es handelt sich dabei um eine effektive Theorie mit lokaler Zweiteilchen-Punktwechselwirkung, die mathematisch der Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie (BCS Theorie) zur Beschreibung der Supraleitung ähnelt. Heute werden die Freiheitsgrade des NJL-Modells neu interpretiert und mit den Quarks identifiziert.

Die Lagrange-Dichte des NJL-Modells wurde so konstruiert, dass sie die Symmetrien der QCD beinhaltet, die in der Natur beobachtet werden. Die QCD ist aber nicht nur für ihre Symmetrien bekannt, sondern auch für die Brechung derselben. Von besonderem Interesse ist dabei die spontane Brechung der chiralen Symmetrie, die zur dynamischen Generierung von Fermionen-Massen führt.

In der Tat ist das NJL-Modell sehr beliebt für die Untersuchung der chiralen Symmetriebrechung (z.B. [Ne01]). Genau wie die QCD beschreibt das NJL-Modell den Zusammenbruch der chiralen Symmetrie im Vakuum und die Wiederherstellung der Symmetrie bei hohen Temperaturen und Dichten. Die einfache Struktur des Modells erlaubt dabei eine klare Beobachtung der ablaufenden Prozesse.

Als Motivation für eine effektive Punktwechselwirkung ohne Gluonen kann die BCS-Theorie dienen. Dort kommt es durch Elektron-Phonon-Wechselwirkungen zu einer effektiven Elektron-Elektron-Wechselwirkung, die nichts mit der Coulombkraft zu tun hat. Ähnlich könnte es durch komplizierte Gluonaustauschprozesse zu einer effektiven Quark-Quark-Wechselwirkung kommen.

Ausführliche Beschreibungen des NJL-Modells für SU(2) und SU(3) finden sich in [Kl92, KW90].

4.4.2 Symmetrien der QCD

Wir beschränken uns hier auf die SU(2)-Variante des NJL-Modells, das heißt wir betrachten nur up- und down-Quarks. Für die Strangeness-freie Physik im MeV-GeV Bereich ist diese Einschränkung auf die leichtesten Quarks sicherlich gerechtfertigt.

Wir zerlegen die Lagrange-Dichte der QCD entsprechend:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{chiral}} - (m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d) + \mathcal{L}_{s\text{c}b\text{t}}. \quad (4.29)$$

Mit $\mathcal{L}_{s\text{c}b\text{t}}$ bezeichnen wir die Lagrange-Dichte der schwereren Flavor s, c, b, t . m_u und m_d sind die Stromquarkmassen. Der chirale Anteil $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ ist explizit gegeben als:

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a + \bar{\psi} i \not{D} \psi, \quad \psi = \begin{bmatrix} \text{u} \\ \text{d} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

mit dem Feldstärketensor $\mathcal{F}_a^{\mu\nu}$ und der kovarianten Ableitung \mathcal{D} . Beide Größen sollen hier nicht näher diskutiert werden. Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ invariant unter den Symmetrien $SU_V(2)$ und $SU_A(2)$ ist [Kl92]:

$$\begin{aligned} SU_V(2) : \quad \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi \\ SU_A(2) : \quad \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\gamma^5\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}/2}\psi \end{aligned} \quad (4.31)$$

mit den Isospin-Pauli-Matrizen τ_i und den konstanten Isevektoren α_i und β_i .

Die Invarianz unter der Symmetrie $\mathcal{S} = SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ können wir auch durch die äquivalente Zerlegung $\mathcal{S} = SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ mit den chiralen Symmetrien $SU_L(2)$ und $SU_R(2)$ ausdrücken. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} SU_L(2) : \quad \psi_L &\rightarrow \psi'_L = e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\tau}/2}\psi_L \\ SU_R(2) : \quad \psi_R &\rightarrow \psi'_R = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{\tau}/2}\psi_R \end{aligned} \quad (4.32)$$

mit den Basisvektoren $\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$ und $\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$.

Der Massenterm der Lagrange-Dichte ist nicht invariant unter $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$. Da die Stromquarkmassen sehr klein sind (< 10 MeV, [PD00]), bleiben die Effekte dieser expliziten chiralen Symmetriebrechung sehr gering. Die Auswirkung der spontanen Symmetriebrechung durch $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ und die dadurch generierten Massen, die wir später anhand des NJL-Modells untersuchen werden, sind wesentlich größer.

4.4.3 Die $SU(2)$ -NJL-Lagrange-Dichte

Wir konstruieren nun die Lagrange-Dichte des NJL-Modells. Es gibt dafür zwei Vorgaben. Zum einen soll eine einfache Vierpunkt-Wechselwirkung für die Quarks realisiert werden, zum anderen soll die Lagrange-Dichte genau wie die der QCD invariant unter den Symmetrien $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ sein. Der einfachste Ansatz für eine Punktwechselwirkung ist $(\bar{\psi}\psi)^2$. Dieser Ausdruck ist invariant unter $SU_V(2)$, aber nicht unter $SU_A(2)$. Für eine infinitesimale Transformation gilt [Mo99]:

$$SU_A(2) : \quad \bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi - \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \cdot \vec{\beta}. \quad (4.33)$$

Eine andere Möglichkeit wäre $(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2$. Auch dieser Ausdruck ist invariant unter $SU_V(2)$, aber nicht unter $SU_A(2)$:

$$SU_A(2) : \quad \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \rightarrow \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi + \bar{\psi}\psi\vec{\beta}. \quad (4.34)$$

Wir haben jetzt zwei Ausdrücke, die sich bei einer Transformation unter $SU_A(2)$ selbst reproduzieren und zusätzlich den jeweils anderen Term erzeugen. Quadriert

man nun (4.33) und (4.34) und addiert beide Ausdrücke, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \cdot \vec{\beta})^2 \\
&\quad -(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi\vec{\beta}) - (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi\vec{\beta})(\bar{\psi}\psi) \\
&\quad +(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}\psi)^2\beta^2 \\
&\quad +(\bar{\psi}\psi\vec{\beta}) \cdot (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi) + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi) \cdot (\bar{\psi}\psi\vec{\beta}) \\
&= (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Da wir eine infinitesimale Transformation betrachten, vernachlässigen wir Terme, die β^2 enthalten. $(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2$ ist also tatsächlich invariant unter $SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ und damit auch unter $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$.

Der gefundene Ausdruck ist die einfachste Möglichkeit, eine chiral symmetrische Punktwechselwirkung zu konstruieren. Er erfüllt beide Bedingungen, die wir an die Lagrange-Dichte stellen. Wir haben somit den chiralen Teil der $SU(2)$ -NJL-Lagrange-Dichte gefunden:

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}}^{\text{NJL}} = \bar{\psi}i\not{\partial}\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] \tag{4.36}$$

mit der positiven Kopplungskonstante G . Berücksichtigen wir noch einen expliziten Massenterm, ergibt sich analog zur QCD:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \tag{4.37}$$

m ist hierbei eine Matrix im Flavor-Raum, auf deren Diagonale die Stromquarkmassen eingetragen sind. Der Wert von G wird zusammen mit einem Regularisierungsschema festgelegt. Eine Beschreibung folgt im Abschnitt 4.4.5.

Die Lagrange-Dichte enthält einen skalaren $(\bar{\psi}\psi)^2$ und einen pseudoskalaren Anteil $(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2$. Da es sich bei der Wechselwirkung um eine Punktwechselwirkung handelt, sollten die Vertizes in Diagrammen eigentlich durch Punkte dargestellt werden:

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad 1 \qquad (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad (i\gamma_5\vec{\tau})^2$$

Diese Darstellung hat allerdings den Nachteil, dass unterschiedliche Prozesse durch die gleichen Diagramme beschrieben werden. Das lässt sich zeigen, indem die Punkte durch Wechselwirkungslinien endlicher Länge ersetzt und explizit alle Spinor- und Flavorindizes angegeben werden (auch die Linie soll aber eine Punktwechselwirkung beschreiben):

$$\begin{array}{c}
 \text{Contact Diagram} \\
 \text{with vertex } 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: Vertical wavy line} \\
 \text{Labels: } (1)_{cd}(1)_{c'd'} \text{ (top), } (1)_{ab}(1)_{a'b'} \text{ (bottom)}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 2: Horizontal wavy line} \\
 \text{Labels: } (1)_{ac}(1)_{a'c'} \text{ (left), } (1)_{bd}(1)_{b'd'} \text{ (right)}
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{c}
 \text{Contact Diagram} \\
 \text{with vertex } (i\gamma_5 \vec{\tau})^2
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: Vertical wavy line} \\
 \text{Labels: } (\gamma_5)_{cd}(\tau_j)_{c'd'} \text{ (top), } (\gamma_5)_{ab}(\tau_i)_{a'b'} \text{ (bottom)} \\
 \text{Wavy line label: } \delta_{ij}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 2: Horizontal wavy line} \\
 \text{Labels: } (\gamma_5)_{ac}(\tau_i)_{a'c'} \text{ (left), } (\gamma_5)_{bd}(\tau_j)_{b'd'} \text{ (right)} \\
 \text{Wavy line label: } \delta_{ij}
 \end{array}$$

Es ist an der Anordnung der Indizes an den Matrizen γ_5 und τ zu erkennen, dass die Diagramme auf der rechten Seite jeweils zwei unterschiedliche Prozesse beschreiben.

Die getrennte Darstellung unterschiedlicher Prozesse fällt in dieser Darstellung wesentlich leichter, denn bereits die Ausrichtung der Wechselwirkungslinie (horizontal oder vertikal) macht klar, um welchen Prozess es sich handelt. In der linken Darstellung lassen sich die Prozesse dagegen nur unterscheiden, wenn konsequent alle Indizes angegeben werden. Wir werden daher im Folgenden auch von der Darstellung mit Wechselwirkungslinie Gebrauch machen, wenn es nötig ist, bestimmte Prozesse zu unterscheiden.

4.4.4 Schwächen des NJL-Modells

Natürlich hat das NJL-Modell auch Schwächen. Aufgrund der punktförmigen Wechselwirkung zwischen den Quarks ist die Theorie nicht renormierbar. Somit ist das Modell durch die Angabe der Lagrange-Dichte nicht vollständig spezifiziert. Um ein effektives Modell zu erhalten, muss zusätzlich ein Regularisierungsverfahren angegeben werden. Dieses soll die divergenten Integrale, die bei Rechnungen mit der NJL-Lagrange-Dichte auftreten, unter Kontrolle bringen.

Durch das Regularisierungsverfahren wird eine Längenskala für die Theorie festgelegt, in der Regel geschieht dies durch einen Impuls-Cutoff. Dieser Cutoff kann

als primitiver Versuch interpretieren werden, das Konzept der asymptotische Freiheit der QCD in das NJL-Modell einzufügen. Durch die Unterdrückung der Wechselwirkung bei großem Impuls simuliert man das Verhalten der 'laufenden' Kopplungskonstante der QCD.

Eine andere Schwäche des Modells ist rein physikalischer Natur. Das NJL-Modell berücksichtigt kein Confinement. Für viele Fragen ist das Confinement jedoch relativ unwichtig. Die Wechselwirkung von Hadronen unterhalb der Schwelle für die Produktion freier Konstituentenquarks beispielsweise hängt sicherlich nicht von den Details ab, wie Confinement entsteht.

4.4.5 Parameter und Regularisierung

Die Wahl eines Regularisierungsschemas ist nicht eindeutig. Eine Möglichkeit ist die Einführung eines Cutoffs für den Dreierimpuls,

$$\vec{p}^2 < \Lambda^2.$$

Man kann aber auch einen kovarianten Ansatz wählen und den Viererimpuls im euklidischen Raum begrenzen,

$$p_E^2 = p_0^2 + \vec{p}^2 < \Lambda^2.$$

Weitere Möglichkeiten existieren, siehe z.B. [K192].

Unser Modell hat somit zwei freie Parameter, die Kopplungskonstante G und den Cutoff Λ . Üblicherweise werden G und Λ so gewählt, dass das Modell für die Pionzerfallskonstante f_π und die Konstituentenquarkmasse die experimentell bekannten Werte liefert. Das führt auf:

$$\begin{aligned} \text{Dreierimpuls-Cutoff: } & \Lambda = 653 \text{ MeV}, & G\Lambda^2 &= 2.14 \\ \text{Viererimpuls-Cutoff: } & \Lambda = 1015 \text{ MeV}, & G\Lambda^2 &= 3.93 \end{aligned}$$

In den Rechnungen, die in den späteren Kapiteln diskutiert werden, kommt der Dreierimpuls-Cutoff mit den hier angegebenen Werten für die Parameter zum Einsatz. Die Stromquarkmasse wurde an dieser Stelle als freier Parameter ignoriert. Man kann auch diese berücksichtigen und damit die vom Modell erzeugte Pionenmasse anpassen.

4.4.6 Dynamische Massengenerierung im NJL-Modell

Im NJL-Modell wird bei niedrigen Temperaturen und Dichten die chirale Symmetrie durch nichtverschwindende Quarkkondensate $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ spontan gebrochen. Dadurch kommt es zur dynamischen Generierung von Quarkmassen, den so genann-

Abbildung 4.1: Hartree-Fock-Beiträge zur Selbstenergie. Um den direkten und den Austauschterm unterscheiden zu können, wurde die Punktwechselwirkung auf der rechten Seite durch eine Wechselwirkung mit endlicher Reichweite ersetzt.

ten Konstituentenquarkmassen⁵. Wir wollen den Mechanismus, der zur spontanen Symmetriebrechung führt, nun kurz untersuchen.

In der Hartree-Fock-Näherung (Abb. 4.1) erhalten wir für die Selbstenergien, die zum skalaren Vertex $(\bar{\psi}\psi)^2$ und zum pseudoskalaren Vertex $(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2$ korrespondieren:

$$\begin{aligned}\Sigma^s &= 2iG[\text{Tr}g(x, x) - g(x, x)] \\ \Sigma^{ps} &= 2iG[(i\gamma_5\vec{\tau})\text{Tr}\{g(x, x)i\gamma_5\vec{\tau}\} - (i\gamma_5\vec{\tau})g(x, x)(i\gamma_5\vec{\tau})],\end{aligned}$$

wobei 'Tr' eine Spur über Farb-, Flavor- und Spinorindizes ist. Wie üblich haben wir einen direkten und einen Austauschterm erhalten.

Da wir eine Punktwechselwirkung betrachten, ist die Selbstenergie eine Konstante, die wir sofort mit der Masse der Teilchen im System identifizieren können:

$$\Sigma = \Sigma^s + \Sigma^{ps} = m^*.$$

Die Stromquarkmasse vernachlässigen wir an dieser Stelle.

Wir kennen die explizite Form des vollen Propagators $g(p)$. Es gilt:

$$g(x, x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m^*}{p^2 - m^{*2}}.$$

Wir setzen diesen Ausdruck nun in die Selbstenergie ein. Unter Verwendung von $\text{tr}\{\not{p}\} = 0$, $\text{tr}\{\gamma_5\} = 0$, $\text{tr}\{\not{p}\gamma_5\} = 0$ und $(\gamma_5)^2 = 1$ folgt:

$$m^* = \Sigma = 2iG \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[4N_f N_c \frac{m^*}{p^2 - m^{*2}} - \frac{\not{p} - m^*}{p^2 - m^{*2}} + 3 \frac{\not{p} - m^*}{p^2 - m^{*2}} \right],$$

wobei N_f und N_c für die Zahl der Flavor und Farben stehen, die im Modell verwendet werden.

⁵Bei hohen Temperaturen und Dichten wird die chirale Symmetrie wiederhergestellt, man spricht von der chiral restaurierten Phase. Die Quarks sind dort, abgesehen von den winzigen Stromquarkmassen, praktisch masselos.

Da die Integrationsgrenzen symmetrisch sind, verschwinden alle Terme, die ungerade in p sind:

$$m^* = 2iG \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[4N_f N_c \frac{m^*}{p^2 - m^{*2}} + 2 \frac{m^*}{p^2 - m^{*2}} \right].$$

Nun nutzen wir wieder $\text{tr}\{\not{p}\} = 0$, sowie $m^* = \frac{1}{4}\text{tr}\{m^*\}$:

$$m^* = 2iG[N_f N_c + \frac{1}{2}] \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}g(p) \approx 2iGN_f N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}g(p). \quad (4.38)$$

Im letzten Schritt haben wir den Summanden $1/2$ vernachlässigt. $N_f N_c = 2 \cdot 3 = 6$ ist mehr als zehnmal größer, daher ist diese Näherung in Ordnung.

Es gilt:

$$m^* = 2iGN_f N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}g(p) = 2iG \text{Tr} g(x, x).$$

Unter Verwendung von $\text{Tr}ig(x, x) = -\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ erhalten wir:

$$m^* = -2G\langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (4.39)$$

Die Konstituentenquarkmasse m^* steht also tatsächlich in direktem Zusammenhang mit dem Quarkkondensat $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Tritt ein nichtverschwindendes Quarkkondensat auf, so wird gleichzeitig eine Konstituentenquarkmasse erzeugt. Die Gleichung (4.39) sagt uns allerdings nicht, ob überhaupt ein endliches Quarkkondensat existiert, bzw. welche Bedingungen dafür erfüllt sein müssen.

Wir betrachten noch einmal (4.38). Das Energieintegral über $g(p)$ können wir mit Hilfe des Residuensatzes auswerten, die Pole liegen bei $p_0^2 = \vec{p}^2 + (m^*)^2$. Für das Dreierimpuls-Integral führen wir einen Cutoff $\vec{p}^2 < \Lambda^2$ ein:

$$m^* = 4GN_f N_c \int_{|\vec{p}| < \Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^{*2}}}. \quad (4.40)$$

Das ist die so genannte NJL-Gap-Gleichung⁶. Diese Gleichung wird trivialerweise von $m^* = 0$ gelöst. Es zeigt sich jedoch, dass auch endliche Lösungen für m^* und somit für das Quarkkondensat existieren, wenn die Kopplungskonstante G groß genug ist. Man erhält als Wert für die kritische Kopplungskonstante:

$$G_c \Lambda^2 = \frac{\pi^2}{N_f N_c}. \quad (4.41)$$

In Abbildung 4.2 ist der Zusammenhang zwischen Masse und Kopplungskonstante graphisch dargestellt. Die Untersuchung der jeweiligen Energie für die beiden Lösungen $m^* = 0$ und $m^* \neq 0$ zeigt, dass der Zustand $m^* \neq 0$ energetisch

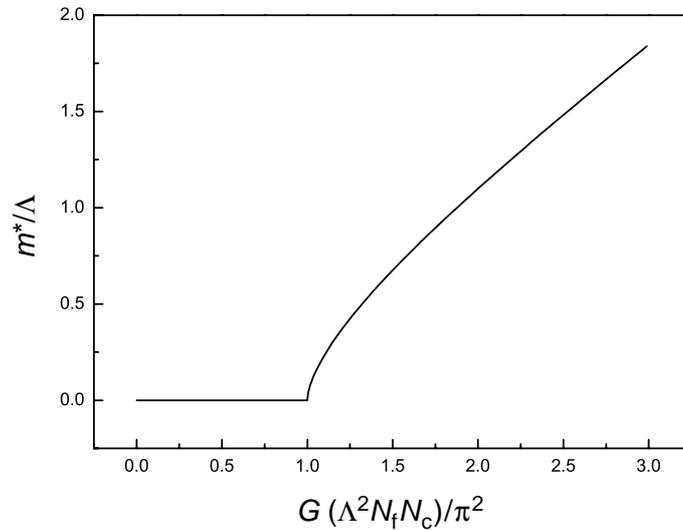


Abbildung 4.2: Die skalierte Quarkmasse m^*/Λ als Funktion der skalierten Kopplungskonstanten G/G_c .

günstiger ist. Somit ist im Vakuum der symmetriebrochene Zustand $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ realisiert.

Abschließend konstruieren wir eine effektive mean-field-Lagrange-Dichte [K192, Ne01]. Diese entsteht im Wesentlichen, indem je ein Feldoperatorenpaar in $\mathcal{L}_{\text{chiral}}^{\text{NJL}}$ durch seinen Erwartungswert ersetzt wird, $(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi) \rightarrow \langle \bar{\psi}\psi \rangle \bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\psi \langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Ausgehend von (4.36) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{NJL}} &= \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + 2G \langle \bar{\psi}\psi \rangle \bar{\psi}\psi + \dots \\ &\stackrel{(4.39)}{=} \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - m^* \bar{\psi}\psi + \dots \end{aligned} \quad (4.42)$$

Es entsteht ein effektiver Massenterm, der die chirale Symmetrie bricht wenn ein endliches Quarkkondensat $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ auftritt. Umgekehrt wird die chirale Symmetrie wiederhergestellt, wenn das Quarkkondensat verschwindet.

4.5 Quarks und Antiquarks

Die Quark-Spektralfunktion, die wir mit unserem Modell berechnen wollen, besitzt eine Struktur, die sich auch auf negative Energien ausdehnt. Wie in der Dirac-Theorie üblich führt das auf die Einführung von Teilchen- und Antiteilchenzuständen. Betrachtet man Quarks mit Viererimpuls p dann gilt: Zustände mit positiver Energie p_0 sind Teilchenzustände, Zustände mit negativer Energie p_0 sind Antiteilchenzustände mit Energie $|p_0|$.

⁶Der Name entstand aufgrund der Analogie zur BCS-Gap-Gleichung für die Supraleitung.

4.5.1 Antiquarks in Streuprozessen

Die Unterscheidung zwischen Quarks und Antiquarks macht die Zuordnung der Selbstenergien Σ^{\gtrless} zu bestimmten Streuprozessen komplizierter, da nun mehr Prozesse möglich sind. Für Zweiteilchen-Wechselwirkungen in Bornscher Näherung gilt ganz allgemein:

$$\begin{aligned} i\Sigma^>(p) &\sim \int \cdots \times \delta(p_0 + r_0 - q_0 - k_0)[1 - n_F(q_0)][1 - n_F(k_0)]n_F(r_0) \\ -i\Sigma^<(p) &\sim \int \cdots \times \delta(p_0 + r_0 - q_0 - k_0)n_F(q_0)n_F(k_0)[1 - n_F(r_0)]. \end{aligned}$$

In der nichtrelativistischen Rechnung haben wir Zustände mit Energien $\omega < \omega_F$ als einlaufende und Zustände mit Energien $\omega > \omega_F$ als auslaufende Teilchen interpretiert. Somit war $i\Sigma^>$ mit einer Stoßrate aus der Konfiguration ω, p heraus (Verlustrate) und $-i\Sigma^<$ mit einer Stoßrate in die Konfiguration ω, p hinein (Gewinnrate) zu identifizieren. An jedem Streuprozess waren zwei einlaufende und zwei auslaufende Teilchen beteiligt.

Diese einfache Interpretation ist nicht mehr möglich, wenn auch Antiteilchen berücksichtigt werden müssen. Ein Zustand mit $p_0 < \omega_F$ ist nicht mehr automatisch ein einlaufendes Teilchen p . Falls p_0 negativ ist, hat man stattdessen ein auslaufendes Antiteilchen \bar{p} . Zur Erklärung betrachten wir die δ -Funktion, die in den Integranden auftritt. Diese bringt die Energieerhaltung während des Stoßes zum Ausdruck:

$$\delta(p_0 + r_0 - q_0 - k_0).$$

Sind p_0, r_0, q_0 und k_0 positiv, treten also nur Teilchen auf, dann legen die Vorzeichen, mit denen die Energien in die Bilanz eingehen, die Art der Streuung (bis auf die Zeitrichtung) fest:

$$p_0 + r_0 = q_0 + k_0 \quad \Rightarrow \quad p, r \Leftrightarrow q, k.$$

Interessant wird es, wenn ein Antiteilchen am Stoß teilnimmt. Falls eine der Energien negativ ist, z.B. $q_0 < 0$, dann gilt:

$$\delta(p_0 + r_0 - q_0 - k_0) = \delta(p_0 + r_0 + |q_0| - k_0).$$

Die Energie des Antiteilchens \bar{q} ist durch $|q_0|$ gegeben und nicht durch q_0 . Die Art der Streuung ist daher an den Vorzeichen des rechten Ausdrucks abzulesen:

$$p_0 + r_0 + |q_0| = k_0 \quad \Rightarrow \quad p, r, \bar{q} \Leftrightarrow k.$$

Es sind jetzt drei Energien, die mit positivem Vorzeichen in die Bilanz eingehen; aus dem auslaufenden (einlaufenden) Teilchen ist somit ein einlaufendes (auslaufendes) Antiteilchen geworden.

Das Gleiche sieht man auch an der thermischen Verteilung für negative Energien. Wir betrachten die Besetzungswahrscheinlichkeit für ein einlaufendes Teilchen mit $q_0 < 0$:

$$n_F(q_0) = \frac{1}{e^{\beta(q_0 - \omega_F)} + 1} = \frac{e^{-\beta(q_0 - \omega_F)}}{1 + e^{-\beta(q_0 - \omega_F)}} = 1 - \frac{1}{e^{\beta(|q_0| + \omega_F)} + 1}. \quad (4.43)$$

Es ergibt sich ein Pauli-Blocking-Faktor für Antiteilchen⁷, d.h. das einlaufende Teilchen mit negativer Energie kann als auslaufendes Antiteilchen aufgefasst werden.

Ein wichtiger Punkt sollte an dieser Stelle erwähnt werden. Für auslaufende Teilchen gibt es eine Energieschwelle, die aus Gründen des Pauli-Blockings überschritten werden muss. Antiteilchen können dagegen mit beliebig kleiner Energie erzeugt werden, da in unserem System sämtliche Antiteilchenzustände unbesetzt sind (vgl. Kommentar auf S. 93). Aus dem gleichen Grund erhalten wir keine Streuprozesse, an denen einlaufende Antiteilchen aus dem Medium beteiligt sind.

4.5.2 Zerlegung von $i\Sigma^>$ und $-i\Sigma^<$

Wir wollen uns nun überlegen, wie die einzelnen Prozesse aussehen, die in Σ^{\gtrless} auftreten. Die benötigten Informationen sind vollständig in den Gleichungen für $i\Sigma^>$ und $-i\Sigma^<$ aus dem letzten Abschnitt enthalten.

Um unnötigen Komplikationen aus dem Weg zu gehen, setzen wir für die folgenden Betrachtungen die Temperatur auf null. Die Fermi-Verteilung wird dann zu einer Θ -Funktion und es gilt:

$$\Sigma^>(p) = 0 \text{ für } p_0 \leq \omega_F, \quad \Sigma^<(p) = 0 \text{ für } p_0 \geq \omega_F. \quad (4.44)$$

- **$i\Sigma^>(p)$ (Verlustrate für Teilchen):**

Da $\Sigma^> = 0$ für $p_0 < \omega_F$, muss es sich bei p wie bisher um ein einlaufendes Teilchen handeln. $i\Sigma^>$ entspricht damit weiterhin der Stoßrate aus der Teilchenkonfiguration p_0, \vec{p} heraus. Aufgrund der Θ -Funktionen gelten die Bedingungen $q_0 > \omega_F$ und $k_0 > \omega_F$, k und q bleiben also auslaufende Teilchen.

Interessant ist eigentlich nur r . Die Bedingung $r_0 < \omega_F$ läßt positive und negative Werte für r_0 zu. Ist r_0 positiv, hat man das gleiche Bild wie im ersten Kapitel, p streut an einem Teilchen des Mediums, $qq \rightarrow qq$. Wenn r_0 aber negativ wird, dann verwandelt sich das einlaufende Teilchen in ein auslaufendes Antiteilchen. Aus dem Streuprozess wird ein $q\bar{q}$ -Produktionsprozess, $q \rightarrow qq\bar{q}$.

⁷ ω_F geht daher mit umgekehrten Vorzeichen ein.

Aus Gründen der Energieerhaltung benötigt das einlaufende Teilchen p für den $q \rightarrow qq\bar{q}$ -Prozess eine Energie von mindestens $2\omega_F$. Diese wird benötigt, um zwei freie Endzustände für die Teilchen zu erreichen (die Erzeugung des Antiquarks ist bei beliebig kleinen Energien möglich).

In Abbildung 4.3 sind die beiden Prozesse $qq \rightarrow qq$ (links) und $q \rightarrow qq\bar{q}$ (rechts) graphisch dargestellt.

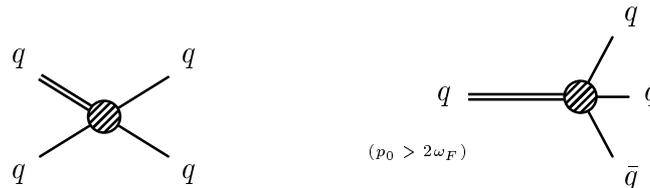


Abbildung 4.3: Die zu $i\Sigma^>(p)$ korrespondierenden Prozesse.

- $-i\Sigma^<(p)$ für $p_0 > 0$ (**Gewinnrate für Teilchen**):

Solange p_0 positiv ist, handelt es sich bei p um ein auslaufendes Teilchen und $-i\Sigma^<$ entspricht unverändert der Stoßrate in die Teilchenkonfiguration p_0, \vec{p} hinein.

r ist durch eine der Θ -Funktionen als auslaufendes Teilchen festgelegt ($r_0 > \omega_F$). Den Charakter von q und k lassen die Θ -Funktionen offen ($q_0 < \omega_F, k_0 < \omega_F$). Es ist hier die Energieerhaltung, die die Entscheidung bringt:

$$k_0 + q_0 = p_0 + r_0 \geq 0 + \omega_F = \omega_F.$$

Da k_0 und q_0 durch ω_F nach oben begrenzt sind, kann diese Bedingung nicht erfüllt werden, wenn eine der beiden Größen negativ ist. Es besteht kein Zugang zum Antiteilchensektor für k und q , beide müssen einlaufende Teilchen sein.

Für $\omega_F > p_0 > 0$ beschreibt $-i\Sigma^<$ also nur den einfachen Streuprozess mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen, $qq \rightarrow qq$. Antiteilchen haben auf diesen Sektor keinen Einfluss. In Abbildung 4.4 ist der Prozess dargestellt.

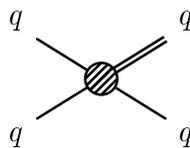


Abbildung 4.4: Der einzige Prozess für $-i\Sigma^<(p)$ bei $p_0 > 0$

- $-i\Sigma^<(p)$ für $p_0 < 0$ (**Verlustrate für Antiteilchen**):

Wir kommen jetzt zum interessantesten Fall. Da p_0 negativ ist, wird $-i\Sigma^<$ zur Stoßrate aus der Antiteilchenkonfiguration $|p_0\rangle, \vec{p}$ heraus.

Aufgrund der Θ -Funktion muss r nach wie vor ein auslaufendes Teilchen sein. k und q sind aber nicht länger durch die Energierhaltung auf den Teilchensektor beschränkt. Es sind daher drei verschiedene Prozesse möglich:

Wenn k und q beide einlaufende Teilchen sind, erhält man einen $q\bar{q}$ -Vernichtungsprozess, $\bar{q}q \rightarrow q$. Das entspricht gerade der Umkehrung des $q\bar{q}$ -Erzeugungsprozesses in $i\Sigma^>$. Ist entweder q oder k ein auslaufendes Antiteilchen, dann ergibt sich ein Quark-Antiquark-Streuprozess, $\bar{q}q \rightarrow \bar{q}q$.

Sind schließlich k und q beide auslaufende Antiteilchen, dann führt das zu einem weiteren $q\bar{q}$ -Erzeugungsprozess, $\bar{q} \rightarrow \bar{q}q$. Dieser Prozess ist allerdings nur für bestimmte p_0 zugänglich. Um ein Teilchen oberhalb der Fermi-Kante zu erzeugen, muss die Energie $|p_0|$ des einlaufenden Antiteilchens mindestens ω_F betragen. Das bedeutet $p_0 < -\omega_F$.

Abbildung 4.5 zeigt die drei diskutierten Prozesse $\bar{q}q \rightarrow q$ (links), $\bar{q}q \rightarrow \bar{q}q$ (mitte) und $\bar{q} \rightarrow \bar{q}q$ (rechts).

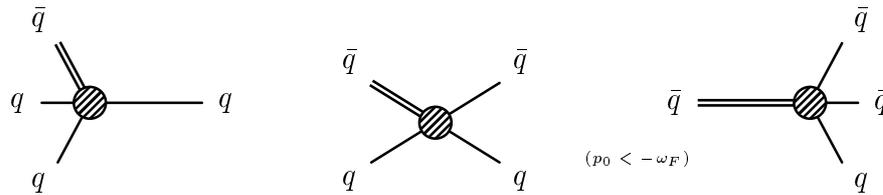


Abbildung 4.5: Die Prozesse für $-i\Sigma^<(p)$ bei $p_0 < 0$.

Wir stellen fest, dass für $p_0 < 0$ keine Stöße in die Antiteilchenkonfiguration $|p_0\rangle, \vec{p}$ auftreten. Das liegt daran, dass unser Medium nur aus Quarks besteht. Einen Prozess, bei dem Antiteilchen erzeugt werden, benötigt aber entweder einlaufende Antiquarks aus dem Medium ($\bar{q}q \rightarrow \bar{q}q$, $\bar{q} \rightarrow \bar{q}q$) oder einlaufende Quarks aus dem Medium, deren Energie oberhalb von ω_F liegt ($q \rightarrow q\bar{q}$, vgl. $i\Sigma^>$).

Hat das Medium eine endliche Temperatur, sind auch Zustände oberhalb der Fermi-Kante besetzt. Der Prozess $q \rightarrow q\bar{q}$ wird dann prinzipiell möglich. Die Zahl der besetzten Zustände so weit oberhalb von ω_F wird aber klein sein. Dementsprechend niedrig wird der Beitrag dieses Prozesses zu $-i\Sigma^<$ ausfallen.

Es gibt noch eine zweite interessante Feststellung. Für positive Energien p_0 unterhalb von $2\omega_F$ gehen in $-i\Sigma^<(p)$ und $i\Sigma^>(p)$ nur reine Teilchenprozesse ein. Die Antiteilchen haben keinen Einfluss auf die Eigenschaften der Selbstenergie und somit der Spektralfunktion in diesem Bereich.

Kapitel 5

Das Modell für Quarks

5.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden wir das Modell zur Berechnung der Quark-Spektralfunktionen aus dem Modell für Nukleonen und den weiter gehenden Konzepten aus dem letzten Kapitel entwickeln. Es fehlen eigentlich nur noch zwei Dinge. Das eine ist ein expliziter Ausdruck für die Selbstenergie im NJL-Modell, das andere ist der Imaginärteil der retardierten Greensfunktion. Das sind aber gerade die Größen, deren Bestimmung den höchsten Aufwand erfordert.

Wir machen uns deshalb zunächst Gedanken über Vereinfachungen und Näherungen, mit denen wir den Aufwand reduzieren können. Dadurch vereinfachen sich nicht nur die Ausdrücke für $\Sigma^{\geq}(p)$ und $\text{Im}g^{\text{ret}}(p)$, auch der Zeitaufwand für die numerische Berechnung der Spektralfunktion wird dadurch reduziert.

5.2 Vereinfachungen und Näherungen

5.2.1 Die chiral restaurierte Phase

Die wichtigste Vereinfachung des Nukleonen-Modells, eine konstante Streuamplitude \mathcal{M} , ist für die Quarks im Rahmen des gewählten Modells bereits erfüllt. Die durch das NJL-Modell gegebene Punktwechselwirkung besitzt bereits eine sehr einfache Struktur.

Stattdessen nehmen wir eine andere, weitreichende Einschränkung vor. Wir werden uns in den Rechnungen auf die chiral restaurierte Phase beschränken, in der die Quarks praktisch masselos sind. Wie in Abschnitt 4.3.3 gezeigt wurde, verletzt der skalare Term der Spektralfunktion die chirale Symmetrie (vgl. (4.19))

und muss daher verschwinden. Die Spektralfunktion reduziert sich auf (4.20):

$$\mathcal{A}(p) = \rho_0(p_0, \vec{p}^2) \gamma_0 + \rho_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}. \quad (5.1)$$

Die vorliegende Arbeit ist der erste Versuch überhaupt, die Quark-Spektralfunktion auf selbstkonsistente Weise zu berechnen. Es geht daher vor allem darum, die Durchführbarkeit der Rechnungen und die Plausibilität der Ergebnisse zu untersuchen. Dazu ist es sicherlich nicht notwendig, die volle Struktur der Spektralfunktion heranzuziehen.

Wie in Abschnitt 4.3.4 gezeigt wurde, ergibt sich die Zustandsdichte alleine aus dem Koeffizienten ρ_0 . Der physikalisch interessanteste Teil der Spektralfunktion bleibt somit auch in der chiral restaurierten Phase erhalten.

Die Tragweite dieser Vereinfachung zeigt sich bei der Berechnung der Selbstenergien. In der Bornschen Näherung tritt ein Produkt aus drei Spektralfunktionen auf. Zerfallen die Spektralfunktionen in je drei Terme ($\rho_s + \rho_0 \gamma_0 + \rho_v \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}$), so erhält man durch Ausmultiplizieren 27 Produkte aus je drei Entwicklungskoeffizienten. In der chiral restaurierten Phase gibt es dagegen nur acht dieser Produkte.

Der analytische Aufwand wird somit auf ein Drittel reduziert. Das Gleiche gilt für den numerischen Aufwand. Um die Selbstenergien zu berechnen, muss eine mehrdimensionale Integration über die Spektralfunktionen durchgeführt werden. Da es sich bei den Entwicklungskoeffizienten um Verteilungen mit kleiner Breite handelt, hat ein Produkt über drei Koeffizienten eine sehr unregelmäßige Struktur. Die verwendete Integrationsroutine aus der NAG-Bibliothek [NAG] kann deshalb nicht die Summe über alle 27 (8) Terme auf einmal integrieren, sondern nur jeden Summanden einzeln. Im Vergleich zu den Rechnungen für die Nukleonen bedeutet das bei gleicher Genauigkeit aber immer noch eine Verachtfachung der benötigten Rechenzeit.

5.2.2 Der Realteil von Σ^{ret}

Im Modell für Nukleonen machte es die Punktwechselwirkung unmöglich, den Realteil der retardierten Selbstenergie mittels Dispersionsrelation aus der Breite zu berechnen. Wir stehen hier vor einem ähnlichen Problem, da auch das NJL-Modell eine punktförmige Wechselwirkung beschreibt.

Die Integrale, die bei der Bestimmung der Breite auftreten, werden durch den Cutoff-Parameter des NJL-Modells korrigiert. Die Breite divergiert daher nicht bei hohen Energien, sondern erreicht nur ein endliches Maximum. Die Dispersionsrelation sollte also eigentlich anwendbar sein.

Das auftretende Problem ist technischer Natur. Für die iterative Rechnung genügt es, wenn die Spektralfunktion dort bekannt ist, wo sie deutlich von null verschiedene Werte annimmt. Verwendet man einen Cutoff Λ für den Dreierimpuls,

dann zeigt sich, dass es für masselose Quarks genügt, die Energien im Bereich $-\Lambda < \omega < \Lambda$ zu betrachten. Es empfiehlt sich daher, das Gitter so zu wählen, dass es gerade diesen Bereich abdeckt.

Der Einfluss des Cutoffs auf das Anwachsen der Breiten macht sich jedoch erst deutlich außerhalb dieses Intervalls bemerkbar (wir werden das in Kapitel 6 noch genauer belegen). Um die Dispersionsrelation verwenden zu können, müsste die Breite also auch bei Energien weit oberhalb von Λ bestimmt werden.

Jede Vergrößerung des Energieintervalls und somit des Gitters, auf dem die Rechnungen durchgeführt werden, bedeutet jedoch entweder eine drastische Erhöhung der Rechenzeit oder einen nicht hinnehmbaren Verlust an Genauigkeit. Betrachtet man den geringen Einfluss von $\text{Re}\Sigma^{\text{ret}}$ auf Spektralfunktion und Impulsverteilung der Nukleonen, dann erscheint der Nutzen einer Vergrößerung des Energieintervalls fragwürdig.

Wir können somit trotz des Cutoffs die Dispersionsrelation nicht verwenden und sind wieder auf eine Näherung für $\text{Re}\Sigma^{\text{ret}}$ angewiesen. Anstatt einen endlichen konstanten Wert festzulegen, entscheiden wir uns diesmal dafür, $\text{Re}\Sigma^{\text{ret}}$ vollständig zu vernachlässigen.

Die hier gemachten Näherungen werden im letzten Kapitel der Arbeit noch einmal aufgegriffen. Dort werden wir sie im Zusammenhang mit zukünftigen Erweiterungen des Modells noch einmal diskutieren.

5.3 Die Selbstenergie im SU(2)-NJL-Modell

Bei den Nukleonen haben wir gesehen, dass die Struktur der Wechselwirkung nur eine untergeordnete Rolle spielt, wenn die Rechnung vollständig selbstkonsistent durchgeführt wird. Wir ziehen daher auch für die Bestimmung der Quark-Selbstenergie nur die Born-Diagramme heran, verwenden aber bei der Auswertung der Diagramme die vollen Greensfunktionen. Die Hartree-Fock-Diagramme können ignoriert werden. Wie in Abschnitt 2.6 gezeigt wurde, tragen sie nur zum Realteil von Σ^{ret} bei. Dieser wird im Rahmen der Näherungen aber vernachlässigt.

Es ist zu beachten, dass in den Rechnungen auch die Freiheitsgrade Flavor und Farbe berücksichtigt werden. Die Greensfunktionen sind in diesen Räumen proportional zu diagonalen (Einheits-)Matrizen, Gleiches gilt für die Spektralfunktion und die Selbstenergien. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir in den Gleichungen auf entsprechende Indizes verzichten, solange es nicht zwingend erforderlich ist.

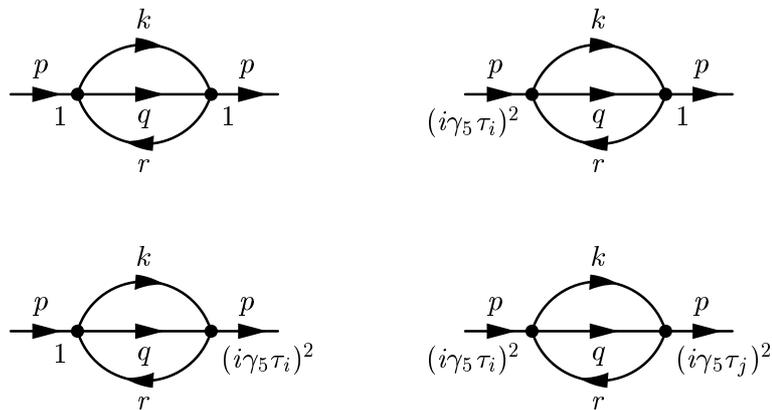
5.3.1 Die Born-Diagramme

Die Lagrange-Dichte des NJL-Modells ist in der chiral restaurierten Phase gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2].$$

Die Wechselwirkung in dieser Lagrange-Dichte enthält einen skalaren $((\bar{\psi}\psi)^2)$ und einen pseudoskalaren $((\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2)$ Anteil.

In der Bornschen Näherung treten zwei Vertizes auf, bei jedem kann es sich entweder um einen skalaren oder um einen pseudoskalaren Vertex handeln. Wir stellen nun jede Kombination in einem eigenen Diagramm dar. Dazu wird jeder skalare Vertex mit einer '1' und jeder pseudoskalare Vertex mit $(i\gamma_5\tau_i)^2$ beschriftet. Für $i\Sigma^>(p)$ erhalten wir so:



In dieser Darstellung sind die direkten und die Austauschsterme nicht unterscheidbar. Daher ersetzen wir jetzt die punktförmigen Vertizes durch Wechselwirkungslinien, so wie in Abschnitt 4.4.3 beschrieben. Dieser Schritt darf nicht als Übergang zu einer Wechselwirkung mit endlicher Reichweite verstanden werden, auch mit den Linien sind hier Punktwechselwirkungen gemeint.

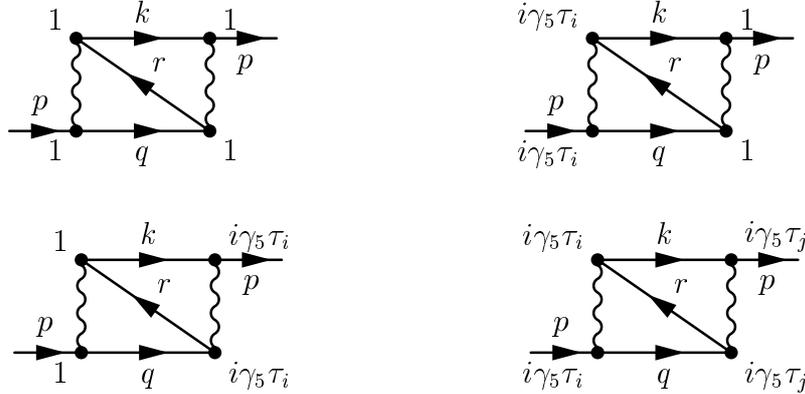
Es ergibt sich für die direkten Terme:



Die beiden Diagramme mit 'gemischten' Vertizes fehlen hier, da sie keinen Beitrag zur Selbstenergie leisten. Beide enthalten eine einzelne Pauli-Matrix τ_i im

Flavorraum, über die die Spur gebildet wird (geschlossener Loop). Da die Pauli-Matrizen aber gerade so definiert sind, dass ihre Spur verschwindet, können diese Diagramme nichts beitragen.

Für die Austauschterme folgt:



Völlig analog ergeben sich die Diagramme für $-i\Sigma^<$, es kehrt sich nur die Richtung der Pfeile auf den Teilchenlinien um.

5.3.2 Auswertung der Born-Diagramme

Die Diagramme müssen nun ausgewertet werden, um einen Zusammenhang zwischen Selbstenergien und Spektralfunktion herzustellen. Wir verwenden wieder die Feynman-Regeln aus Anhang C.5, ersetzen aber gleich die wechselwirkungsfreien Greensfunktionen $g_0^{\gtrless}(p)$ durch die vollen Greensfunktionen $g^{\gtrless}(p)$. Es ergibt sich somit der selbstkonsistente Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma^>(p) &= -4iG^2 \int_{<\Lambda} \frac{d^4k d^4q d^4r}{(2\pi)^{12}} \delta^4(p+r-q-k) \\
 &\times [g^>(q) \text{Tr}\{g^>(k) g^<(r)\} \\
 &+ \gamma_5\tau_i g^>(q) \gamma_5\tau_j \text{Tr}\{\gamma_5\tau_i g^>(k) \gamma_5\tau_j g^<(r)\} \\
 &- g^>(q) g^<(r) g^>(k) \\
 &+ \gamma_5\tau_i g^>(q) g^<(r) \gamma_5\tau_i g^>(k) \\
 &+ g^>(q) \gamma_5\tau_i g^<(r) g^>(k) \gamma_5\tau_i \\
 &- \gamma_5\tau_i g^>(q) \gamma_5\tau_j g^<(r) \gamma_5\tau_i g^>(k) \gamma_5\tau_j],
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

wobei 'Tr' für die Spur über Farb-, Flavor- und Spinorindizes steht. 'Λ' soll andeuten, dass die Integrale mittels eines der in 4.4.5 beschriebenen Schemata

zu regularisieren sind. Wird der Dreierimpuls-Cutoff verwendet, sind nur die Integrale über den Dreierimpuls zu begrenzen. Im Falle des Viererimpuls-Cutoffs müssen auch die Energieintegrale in die Regularisierung einbezogen werden.

Für $-i\Sigma^<(p)$ ergibt sich fast das gleiche Ergebnis. In den Diagrammen ändert sich nur die Richtung der Pfeile, daher müssen lediglich die g^{\lessgtr} durch g^{\gtrless} ausgetauscht werden.

Gemäß (4.5), (4.6) und (4.20) gilt:

$$\begin{aligned} ig^>(p) &= [\rho_0(p_0, \vec{p}^2)\gamma_0 + \rho_v(p_0, \vec{p}^2)\vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}][1 - n_F(p_0)] \\ -ig^<(p) &= [\rho_0(p_0, \vec{p}^2)\gamma_0 + \rho_v(p_0, \vec{p}^2)\vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}]n_F(p_0). \end{aligned}$$

Einsetzen in (5.2) liefert nach längerer Rechnung:

$$\begin{aligned} i\Sigma^>(p) &= 32G^2 \int_{<\Lambda} \frac{d^4 k d^4 q d^4 r}{(2\pi)^{12}} (2\pi)^4 \delta^4(p + r - q - k) \\ &\quad \times (1 - n_F(\omega_q))(1 - n_F(\omega_k))n_F(\omega_r) \\ &\quad \times \left\{ (14\rho_0(q) [\rho_0(k)\rho_0(r) - \rho_v(k)\rho_v(r)\vec{e}_k \cdot \vec{e}_r] \right. \\ &\quad \quad \left. - \rho_0(r) [\rho_0(k)\rho_0(q) - \rho_v(k)\rho_v(q)\vec{e}_q \cdot \vec{e}_k]) \cdot \gamma_0 \right. \\ &\quad \left. + (14\rho_v(q) [\rho_0(k)\rho_0(r) - \rho_v(k)\rho_v(r)\vec{e}_k \cdot \vec{e}_r] \vec{e}_q \cdot \vec{e}_p \right. \\ &\quad \quad \left. - \rho_v(r) [\rho_0(k)\rho_0(q) - \rho_v(k)\rho_v(q)\vec{e}_q \cdot \vec{e}_k] \vec{e}_r \cdot \vec{e}_p \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, wurde die Kurzschreibweise $\rho_{0,v}(p)$ anstelle von $\rho_{0,v}(p_0, \vec{p}^2)$ verwendet. Die Entwicklungskoeffizienten hängen aber nach wie vor nur von p_0 und \vec{p}^2 ab. Die einzelnen Terme wurden bereits entsprechend der Lorentzstruktur von $i\Sigma^>$ sortiert (vgl. (4.28)),

$$\Sigma^{\gtrless}(p) = \Sigma_0^{\gtrless}(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma_0 + \Sigma_v^{\gtrless}(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}.$$

Völlig analog erhält man:

$$\begin{aligned} -i\Sigma^<(p) &= 32G^2 \int_{<\Lambda} \frac{d^4 k d^4 q d^4 r}{(2\pi)^{12}} (2\pi)^4 \delta^4(p + r - q - k) \\ &\quad \times n_F(\omega_q)n_F(\omega_k)(1 - n_F(\omega_r)) \cdot \{ \dots \}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Um von (5.2) zu (5.3) und (5.4) zu gelangen, wurde unter anderem reger Gebrauch von der Beziehung

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = g^{\mu\nu} \gamma^\rho - g^{\mu\rho} \gamma^\nu + g^{\nu\rho} \gamma^\mu + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \gamma^5$$

gemacht. Aufgrund der Symmetrie des Integranden und der Integrationsgrenzen verschwinden alle Terme $\sim \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \gamma^5$ in (5.3) und (5.4).

Auf den ersten Blick sehen (5.3) und (5.4) viel komplizierter aus als die nichtrelativistischen Ausdrücke für $i\Sigma^>$ und $-i\Sigma^<$. In den wesentlichen Eigenschaften stimmen sie aber überein. Wir erkennen die δ -Funktion wieder, die für Energie- und Impulserhaltung sorgt, und die Fermi-Verteilungen, die sicherstellen, dass nur vorhandene Teilchen einlaufen bzw. dass die Endzustände unbesetzt sind. Die Integration über Energie und Impuls der ein- und auslaufenden Teilchen ist ebenfalls nicht neu.

Auch der Inhalt der geschweiften Klammer ist nicht schwer zu verstehen. In der nichtrelativistischen Selbstenergie trat ein Produkt aus drei Spektralfunktionen $\mathcal{A}(\omega_q, q)\mathcal{A}(\omega_r, r)\mathcal{A}(\omega_k, k)$ auf. In der geschweiften Klammer hat man im Prinzip das Gleiche, nur acht Mal. Da jede relativistische Spektralfunktion aus zwei Komponenten besteht, gibt es beim Ausmultiplizieren acht Möglichkeiten, diese zu kombinieren. Die zusätzlich auftretenden Dreierimpulse korrespondieren jeweils zu einem Koeffizienten ρ_v und sind auf die Lorentzstruktur der Spektralfunktion zurückzuführen.

Für die numerischen Rechnungen ist es natürlich wieder interessant, die Zahl der Integrationen zu reduzieren. Durch die auftretenden Skalarprodukte ist das nicht ganz so einfach wie in den nichtrelativistischen Rechnungen. Es gelingt jedoch auch hier, die Zahl der Integrationen von zwölf auf sechs zu reduzieren.

Dazu werden die Dreierimpulse \vec{k} und \vec{q} durch $\vec{u} = \vec{q} + \vec{k}$ und $\vec{v} = \vec{q} - \vec{k}$ substituiert. Es ist dann möglich, mit Hilfe der δ -Funktion die Integration über den Vierervektor r aufzulösen und die Integrationen über zwei der vier auftretenden Winkel analytisch durchzuführen. Einer der verbleibenden Winkel kann anschließend durch r^2 substituiert werden:

$$\begin{aligned}
i\Sigma_0^>(p) &= \frac{G^2}{(2\pi)^6} \int_{(<\Lambda)} dk_0 dq_0 \int_{<\Lambda} du^2 dv^2 \int d\cos\vartheta_{uv} [1 - n_F(k_0)] uv \\
&14 \left[\left(\rho_0(k)\rho_0(q) - \rho_v(q)\rho_v(k) \frac{u^2 - v^2}{|\vec{u} + \vec{v}||\vec{u} - \vec{v}|} \right) n_F(q_0)[1 - n_F(r_0)] \right. \\
&\quad \times \frac{1}{2|\vec{p}|v} \int_{\bar{p}^2+v^2-2|\vec{p}|v}^{\bar{p}^2+v^2+2|\vec{p}|v} dr^2 \rho_0(r_0, r^2) \Bigg]_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=p_0+q_0-k_0}} \\
&- \left[\left(\rho_0(k)\rho_0(q) - \rho_v(q)\rho_v(k) \frac{u^2 - v^2}{|\vec{u} + \vec{v}||\vec{u} - \vec{v}|} \right) [1 - n_F(q_0)]n_F(r_0) \right. \\
&\quad \times \frac{1}{2|\vec{p}|u} \int_{\bar{p}^2+u^2-2|\vec{p}|u}^{\bar{p}^2+u^2+2|\vec{p}|u} dr^2 \rho_0(r_0, r^2) \Bigg]_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=q_0+k_0-p_0}} . \tag{5.5}
\end{aligned}$$

ϑ_{uv} bezeichnet den Winkel zwischen den Vektoren \vec{u} und \vec{v} . Der Cutoff wird weiterhin auf die Vierervektoren k und q bzw. auf die Dreiervektoren \vec{k} und \vec{q} angewendet. Die Integrationsgrenzen von u und v haben daher eine relativ komplizierte Struktur.

Völlig analog ergibt sich:

$$\begin{aligned}
i\Sigma_v^{\geq}(p) &= \frac{G^2}{(2\pi)^6} \int_{(<\Lambda)} dk_0 dq_0 \int_{<\Lambda} du^2 dv^2 \int d \cos \vartheta_{uv} [1 - n_F(k_0)] uv \quad (5.6) \\
&+ 14 \left[\left(\rho_0(k) \rho_0(q) - \rho_v(q) \rho_v(k) \frac{u^2 - v^2}{|\vec{u} + \vec{v}| |\vec{u} - \vec{v}|} \right) n_F(q_0) [1 - n_F(r_0)] \right. \\
&\times \frac{1}{4|\vec{p}|v} \int_{\vec{p}^2 + v^2 - 2|\vec{p}|v}^{\vec{p}^2 + v^2 + 2|\vec{p}|v} dr^2 \rho_v(r_0, r^2) \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - v^2}{p^2} + 1 \right) \Bigg]_{\substack{\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) \\ \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ r_0 = p_0 + q_0 - k_0}} \\
&+ \left[\left(\rho_0(k) \rho_0(q) - \rho_v(q) \rho_v(k) \frac{u^2 - v^2}{|\vec{u} + \vec{v}| |\vec{u} - \vec{v}|} \right) [1 - n_F(q_0)] n_F(r_0) \right. \\
&\times \frac{1}{4|\vec{p}|u} \int_{\vec{p}^2 + u^2 - 2|\vec{p}|u}^{\vec{p}^2 + u^2 + 2|\vec{p}|u} dr^2 \rho_v(r_0, r^2) \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - u^2}{p^2} + 1 \right) \Bigg]_{\substack{\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) \\ \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ r_0 = q_0 + k_0 - p_0}} .
\end{aligned}$$

Aus physikalischer Sicht wäre es eigentlich wünschenswert, in (5.5) und (5.6) anstelle der Viererimpulse k und q die Viererimpulse $u = q + k$ und $v = q - k$ zu regularisieren. Bei diesen handelt es sich nämlich um die Relativimpulse in den zu Σ^{\geq} korrespondierenden Streuprozessen. Mit einem entsprechenden Cutoff würde die Wechselwirkung zwischen den Quarks für große Relativimpulse unterdrückt und so das Verhalten der 'laufenden Kopplungskonstanten' der QCD simuliert. Auf diese Weise ergäbe sich die bereits in Abschnitt 4.4.4 erwähnte grobe Näherung für die asymptotische Freiheit.

Dass in unserem Modell k und q bzw. \vec{k} und \vec{q} regularisiert werden, hat numerische Gründe. Für die tatsächlichen Rechnungen ist es notwendig, weitere Substitutionen einzuführen, durch die die Integranden numerisch besser handhabbar werden. Das Verfahren ist relativ aufwändig und soll an dieser Stelle nicht näher diskutiert werden. Bezüglich der endgültigen Integrationsvariablen würde ein Cutoff für die Impulse u und v jedenfalls zu relativ komplizierten Integrationsgrenzen führen, während ein Cutoff für k und q glatte Grenzen erzeugt, die sich leicht in den Programmcode einbetten lassen. Da die gleichmäßigen Grenzen zusätzlich die Arbeit der Integrationsroutine erleichtern, ist aus numerischen Gründen ein Cutoff für k und q vorzuziehen.

5.4 Die retardierte Greensfunktion

Der Imaginärteil der retardierten Greensfunktion ist das letzte fehlende Glied in der Kette. Sobald sich mit dessen Hilfe $\rho_0(p_0, \vec{p}^2)$ und $\rho_v(p_0, \vec{p}^2)$, die beiden Komponenten der Spektralfunktion, durch die Breite $\Gamma(p)$ ausdrücken lassen, ist das Modell vollständig.

Aus Abschnitt 4.2.2 ist die Beziehung

$$\mathcal{A}(p) = -2\text{Im}g^{\text{ret}}(p) = -2\text{Im}\frac{1}{\not{p} - m - \Sigma^{\text{ret}}(p)} \quad (5.7)$$

bekannt.

Wir müssen jetzt die beprochenen Vereinfachungen und Näherungen auf (5.7) anwenden und das Ergebnis anschließend so umformen, dass sich der Imaginärteil des Bruches direkt ablesen lässt.

5.4.1 Notation

Bevor (5.7) ausgewertet wird, führen wir noch eine neue Größe ein, die die Rechnungen übersichtlicher machen soll. Die Lorentzstruktur der Breite $\Gamma(p)$ ist gegeben durch:

$$\Gamma(p) = \Gamma_0(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma_0 + \Gamma_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}. \quad (5.8)$$

Wir definieren den kontravarianten Vierervektor $\tilde{\Gamma}^\mu(p)$:

$$\tilde{\Gamma}^\mu(p) \equiv (\Gamma_0(p), -\Gamma_v(p) \vec{e}_p). \quad (5.9)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^2(p) &= \tilde{\Gamma}_\mu(p) \tilde{\Gamma}^\mu(p) = \Gamma_0^2(p_0, \vec{p}^2) - \Gamma_v^2(p_0, \vec{p}^2) \\ \tilde{\Gamma}(p) \cdot p &= \tilde{\Gamma}_\mu(p) p^\mu = \Gamma_0(p_0, \vec{p}^2) p_0 + \Gamma_v(p_0, \vec{p}^2) |\vec{p}| \\ \tilde{\mathcal{V}}(p) &= \tilde{\Gamma}_\mu(p) \gamma^\mu = \Gamma_0(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma_0 + \Gamma_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} = \Gamma(p). \end{aligned}$$

Diese Beziehungen werden wir im nächsten Abschnitt benötigen.

5.4.2 Der Imaginärteil von $g^{\text{ret}}(p)$

In der chiral restaurierten Phase verschwindet die Masse m , der Realteil der retardierten Selbstenergie soll in den Rechnungen vernachlässigt werden. (5.7) vereinfacht sich somit zu (mit $\Gamma(p) = -2\text{Im}\Sigma^{\text{ret}}$):

$$\mathcal{A}(p) = -2\text{Im}\frac{1}{\not{p} + \frac{i}{2}\Gamma(p)} = -2\text{Im}\frac{1}{\not{p} + \frac{i}{2}\tilde{\mathcal{V}}(p)}$$

Es wird nun zunächst mit $[\not{p} + \frac{i}{2} \tilde{\not{F}}(p)]$ erweitert, um die Matrixstruktur vom Nenner in den Zähler zu verlegen. Anschließend wird mit dem komplex Konjugierten des Nenners erweitert, um einen reellen Nenner zu erhalten:

$$\mathcal{A}(p) = -2\text{Im} \frac{\not{p} + \frac{i}{2} \tilde{\not{F}}(p)}{(p + \frac{i}{2} \tilde{\Gamma}(p))^2} = -2\text{Im} \frac{[\not{p} + \frac{i}{2} \tilde{\not{F}}(p)] \cdot [p^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}^2(p) - ip \cdot \tilde{\Gamma}(p)]}{[p^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}^2(p)]^2 + [p \cdot \tilde{\Gamma}(p)]^2}.$$

Werden die Klammern im Zähler ausmultipliziert, lässt sich der Imaginärteil (vgl. Definition in Abschnitt 4.2.2) der retardierten Greensfunktion direkt ablesen ($\tilde{\Gamma}$ ist reell):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p) &= \frac{2\tilde{\Gamma}(p) \cdot p \not{p} - [p^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}^2(p)] \tilde{\not{F}}(p)}{[p^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}^2(p)]^2 + [p \cdot \tilde{\Gamma}(p)]^2} \\ &= \frac{2\tilde{\Gamma}(p) \cdot p p_0 - [p^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}^2(p)] \Gamma_0(p)}{[p^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}^2(p)]^2 + [p \cdot \tilde{\Gamma}(p)]^2} \cdot \gamma_0 \\ &\quad - \frac{2\tilde{\Gamma}(p) \cdot p |\vec{p}| - [p^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}^2(p)] \Gamma_v(p)}{[p^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}^2(p)]^2 + [p \cdot \tilde{\Gamma}(p)]^2} \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Erfreulicherweise hat dieses Ergebnis genau die Lorentzstruktur, die wir von \mathcal{A} erwarten. Das bestätigt, dass die Lorentzstruktur beim Durchlaufen der verschiedenen Beziehungen konsistent behandelt wird.

Wir lesen für $\rho_0(p_0, \vec{p}^2)$ und $\rho_v(p_0, \vec{p}^2)$ ab:

$$\rho_0(p_0, \vec{p}^2) = \frac{(p_0^2 + \vec{p}^2) \Gamma_0 + \frac{1}{4} (\Gamma_0^2 - \Gamma_v^2) \Gamma_0 + 2p_0 |\vec{p}| \Gamma_v}{[p_0^2 - \vec{p}^2 - \frac{1}{4} \Gamma_0^2 + \frac{1}{4} \Gamma_v^2]^2 + [p_0 \Gamma_0 - \Gamma_v |\vec{p}|]^2} \quad (5.11)$$

$$\rho_v(p_0, \vec{p}^2) = -\frac{(p_0^2 + \vec{p}^2) \Gamma_v - \frac{1}{4} (\Gamma_0^2 - \Gamma_v^2) \Gamma_v + 2p_0 |\vec{p}| \Gamma_0}{[p_0^2 - \vec{p}^2 - \frac{1}{4} \Gamma_0^2 + \frac{1}{4} \Gamma_v^2]^2 + [p_0 \Gamma_0 - \Gamma_v |\vec{p}|]^2}. \quad (5.12)$$

Das sind die gesuchten Beziehungen zwischen Spektralfunktion und Breite. Unser Modell ist damit vollständig.

Die beiden Ausdrücke (5.11) und (5.12) sehen sich sehr ähnlich. Die Nenner sind identisch, in den Zählern sind – abgesehen von Vorzeichen – lediglich Γ_0 und Γ_v vertauscht. Das ist nicht überraschend, da in Abschnitt 4.3 gezeigt wurde, dass sich ρ_0 und ρ_v im Vakuum nur durch einen Faktor $-p_0/|\vec{p}|$ unterscheiden. Leider besteht keine einfache Beziehung zwischen Γ_0 und Γ_v (vgl. (5.5), (5.6)), daher ist es mit exakten Rechnungen nicht möglich, diese Ähnlichkeit weiter zu untersuchen.

Mit Hilfe einer Näherung gelingt es aber, ρ_0 und ρ_v zumindest am on-shell-Punkt (d.h. $|p_0| = |\vec{p}|$) miteinander in Verbindung zu bringen. Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen werden zeigen, dass die Breiten relativ klein sind. Daher

ist es möglich, in (5.11) und (5.12) die Terme $\sim \mathcal{O}(\Gamma^3)$ zu vernachlässigen:

$$\rho_0(p_0, p_0^2) \approx \frac{2p_0^2\Gamma_0 + 2p_0|p_0|\Gamma_v}{\dots}$$

$$\rho_v(p_0, p_0^2) \approx -\frac{2p_0^2\Gamma_v + 2p_0|p_0|\Gamma_0}{\dots}.$$

In der Nähe des on-shell-Punkts unterscheiden sich ρ_0 und ρ_v also höchstens durch ein Vorzeichen. Es gilt dort die Beziehung $\rho_0 \approx -\text{sign}(p_0)\rho_v$.

5.5 Zusammenstellung des Modells

Die Spektralfunktion von Quarks in unendlich ausgedehnter Quarkmaterie soll berechnet werden. In den letzten Abschnitten wurde alles Nötige zusammengetragen, um die Rechnungen in einem selbstkonsistenten Modell mit einer einfachen Näherung für die Wechselwirkung durchzuführen.

Wir stellen das Modell nun in geschlossener Form vor. Die Parallelen zum Modell für Nukleonen sind unverkennbar, es treten allerdings überall dort wesentlich kompliziertere Ausdrücke auf, wo die Lorentzstruktur explizit berücksichtigt werden muss.

Voraussetzungen

Es werden die folgenden, vereinfachenden Annahmen gemacht:

- Das System befindet sich in der chiral restaurierten Phase.
- Der Realteil von Σ^{ret} kann vernachlässigt werden.

Lorentzstruktur

Die betrachteten Größen haben die folgende Struktur:

- Spektralfunktion:

$$\mathcal{A}(p) = \rho_0(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma_0 + \rho_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}$$

- Selbstenergie:

$$\Sigma^{\geq}(p) = \Sigma_0^{\geq}(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma_0 + \Sigma_v^{\geq}(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}$$

- Zerfallsbreite:

$$\Gamma(p) = \Gamma_0(p_0, \vec{p}^2) \cdot \gamma_0 + \Gamma_v(p_0, \vec{p}^2) \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma}$$

Rechenschema

Auf der Basis der folgenden Beziehungen werden iterative Rechnungen auf einem $(p_0, |\vec{p}|)$ -Gitter durchgeführt, bis ein selbstkonsistentes Ergebnis erreicht ist:

- $\rho_0, \rho_v \rightarrow \Sigma_0^{\geq}, \Sigma_v^{\geq}$

siehe (5.5), (5.6)

- $\Sigma_0^{\geq}, \Sigma_v^{\geq} \rightarrow \Gamma_0, \Gamma_v$

$$\Gamma_0(p_0, \vec{p}^2) = i[\Sigma_0^>(p_0, \vec{p}^2) - \Sigma_0^<(p_0, \vec{p}^2)]$$

$$\Gamma_v(p_0, \vec{p}^2) = i[\Sigma_v^>(p_0, \vec{p}^2) - \Sigma_v^<(p_0, \vec{p}^2)]$$

- $\Gamma_0, \Gamma_v \rightarrow \rho_0, \rho_v$

siehe (5.11), (5.12)

Parameter

Um Rechnungen durchführen zu können, müssen die folgenden Parameter angegeben werden:

- Impuls-Cutoff: Wie in Abschnitt 4.4.5 beschrieben, muss ein Cutoff Λ für den Impuls in den Integralen für die Selbstenergie verwendet werden.
- Kopplungskonstante: Die Quark-Quark-Kopplungskonstante G wird im Zusammenhang mit dem Impuls-Cutoff Λ festgelegt.
- $(p_0, |\vec{p}|)$ -Gitter: Es muss ein Gitter für die numerischen Rechnungen spezifiziert werden (Ränder, Zahl der Gitterpunkte).

Kapitel 6

Phasenraumeffekte

Bevor die Ergebnisse der Rechnungen präsentiert werden, werfen wir noch einen Blick auf den Phasenraum. Mit ein paar einfachen Abschätzungen soll untersucht werden, welche Vorhersagen über die Zerfallsbreite eine reine Integration über den bei Stößen verfügbaren Phasenraum macht. Dazu werden die in Abschnitt 4.5.2 vorgestellten Prozesse einzeln betrachtet. Für jeden dieser Prozesse bestimmen wir den Bereich, in dem er endliche Beiträge zu einer der Selbstenergien und somit zur Breite liefern kann. Zusätzlich berücksichtigen wir einen Cutoff für den Dreierimpuls und untersuchen, wie sich dieser Parameter des NJL-Modells auf die Breite auswirkt.

Die auf diese Weise gewonnenen Erkenntnisse können wir später bei der Interpretation der berechneten Breiten und Spektralfunktionen verwenden. Es wird sich so leicht feststellen lassen, welche Eigenschaften von $\mathcal{A}(p)$ und $\Gamma(p)$ Phasenraumeffekten zuzuschreiben sind.

Für die folgenden Überlegungen verwenden wir eine einfache, skalare Punktwechselwirkung mit einem Cutoff Λ für den Dreierimpuls (es gelte $0 < \omega_F < \Lambda$) und arbeiten bei $T = 0$. Die auftretenden Spektralfunktionen nähern wir durch freie Spektralfunktionen ohne Lorentzstruktur.

6.1 Freie Spektralfunktion

Die Berechnung der freien Spektralfunktion ist problemlos möglich. Ausgehend von der Definition (4.4) ergibt sich mit Lehrbuchwissen [PS, BD]:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\text{free}}(p) &= i \int d^4u e^{ip \cdot u} [g_0^>(u, 0) - g_0^<(u, 0)] = \int d^4u e^{ip \cdot u} \langle 0 | \{ \psi(u), \bar{\psi}(0) \} | 0 \rangle \\ &= \frac{\pi \not{p}}{|\vec{p}|} [\delta(p_0 - |\vec{p}|) - \delta(p_0 + |\vec{p}|)].\end{aligned}\tag{6.1}$$

Da zwischen freien Teilchen keine Wechselwirkungen auftreten, befinden sie sich auf der Massenschale (hier: $m = 0$). Eine δ -Funktion steht somit für den 'on-shell-peak' der Quarks, die andere für den 'on-shell-peak' der Antiquarks.

An (6.1) können wir direkt zwei Dinge ablesen. Zum einem zeigt sich, dass für die Lorentzstruktur genau wie im Vakuum (vgl. Abschnitt 4.3) gilt $\rho_0/p_0 = -\rho_v/|\vec{p}| \equiv \rho^{\text{free}}$:

$$\mathcal{A}^{\text{free}}(p) = \rho_0 \gamma_0 + \rho_v \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} = \rho^{\text{free}} p_0 \gamma_0 - \rho^{\text{free}} \vec{e}_p \cdot \vec{\gamma} = \rho^{\text{free}} \not{p}. \quad (6.2)$$

Zum anderen ist $\mathcal{A}^{\text{free}}(p)$ wie gewünscht normiert:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp_0}{2\pi} \text{tr}\{\gamma_0 \mathcal{A}^{\text{free}}(p)\} &= 4 \int \frac{dp_0}{2\pi} \rho^{\text{free}} p_0 \\ &= \frac{4}{2} \int dp_0 \frac{p_0}{|p_0|} [\delta(p_0 - |\vec{p}|) - \delta(p_0 + |\vec{p}|)] = 4. \end{aligned}$$

Der Einfluss eines Cutoffs für den Dreierimpuls auf die Spektralfunktion ist leicht zu erkennen. Die 'on-shell peaks' verlaufen entlang der Linien $p_0 = |\vec{p}|$ und $p_0 = -|\vec{p}|$. Ist der Impuls $|\vec{p}|$ durch einen Cutoff Λ begrenzt, dann enden die Peaks bei $p_0 = \pm\Lambda$ und die Spektralfunktion verschwindet¹ für $|p_0| > \Lambda$. Somit ist der Dreierimpuls-Cutoff effektiv auch ein Energie-Cutoff (in der Spektralfunktion).

Es ist uninteressant, die freie Spektralfunktion bei Energien $|p_0| > \Lambda$ zu betrachten. Für die Breite gilt das nicht ganz. Wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden, erstreckt sich die Breite über einen weit größeren Energiebereich.

6.2 Näherungen für $i\Sigma^>$ und $-i\Sigma^<$

Aus Abschnitt 2.4.4 ist bekannt, dass die Selbstenergien $i\Sigma^>$ und $-i\Sigma^<$ zu totalen Streuraten korrespondieren. Wir wollen nun den Phasenraum untersuchen, der für die Streuprozesse aus Abschnitt 4.5.2 zur Verfügung steht, um daraus Aussagen über die Zerfallsbreite Γ abzuleiten. Die Struktur der Wechselwirkung interessiert uns bei dieser einfachen Abschätzung ebenso wenig wie die Breite der Teilchen. Daher werden nun die Ausdrücke (5.5) und (5.6) durch Näherungen ersetzt, in denen nur über den verfügbaren Phasenraum summiert wird.

Die Spektralfunktionen in den Integranden von (5.5) und (5.6) werden durch freie Spektralfunktionen $\bar{\mathcal{A}}^{\text{free}}$ ohne Lorentzstruktur ersetzt:

$$\bar{\mathcal{A}}^{\text{free}}(p) = [\delta(p_0 - |\vec{p}|) + \delta(p_0 + |\vec{p}|)]. \quad (6.3)$$

Anschließend wird der Integrand auf die Spektralfunktionen, Fermi-Verteilungen und die δ -Funktion reduziert. Da die Integration über $\cos \vartheta_{uv}$ in den folgenden

¹Es gilt $\delta(p_0 - |\vec{p}|) = \delta(p_0 + |\vec{p}|) = 0$ für $|\vec{p}| < \Lambda$ und $|p_0| > \Lambda$.

Betrachtungen keine große Rolle spielt, kann sie ebenfalls vernachlässigt werden. Wir erhalten so die folgenden Näherungen für $i\Sigma^>$ und $-i\Sigma^<$:

$$\begin{aligned}
i\bar{\Sigma}^>(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 dq_0 \int_0^\infty du^2 dv^2 [1 - n_F(k_0)][1 - n_F(q_0)] n_F(r_0) \\
&\quad \times \bar{\mathcal{A}}^{\text{free}}(k) \bar{\mathcal{A}}^{\text{free}}(q) \int_{||\vec{p}|-u|}^{|\vec{p}|+u} dr \bar{\mathcal{A}}^{\text{free}}(r) \Bigg|_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=q_0+k_0-p_0}} \quad (6.4)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
-i\bar{\Sigma}^<(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 dq_0 \int_0^\infty du^2 dv^2 n_F(k_0) n_F(q_0) [1 - n_F(r_0)] \\
&\quad \times \bar{\mathcal{A}}^{\text{free}}(k) \bar{\mathcal{A}}^{\text{free}}(q) \int_{||\vec{p}|-u|}^{|\vec{p}|+u} dr \bar{\mathcal{A}}^{\text{free}}(r) \Bigg|_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=q_0+k_0-p_0}} \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Da einige Faktoren und die Integration über $\cos \vartheta_{uv}$ ignoriert werden, handelt es sich bei diesen Ausdrücken nicht um die exakten Phasenraumintegrale. $\vec{u} = \vec{q} + \vec{k}$ und $\vec{v} = \vec{q} - \vec{k}$ sind hier wieder die die Relativimpulse, die im Zusammenhang mit (5.5) und (5.6) eingeführt wurden.

Nun setzen wir (6.3) in $i\bar{\Sigma}^>$ und $-i\bar{\Sigma}^<$ ein. Zusätzlich wird ein Dreierimpuls-Cutoff Λ (mit $\Lambda > \omega_F > 0$) für die Impulse $|\vec{k}|$ und $|\vec{q}|$ eingeführt²:

$$\begin{aligned}
i\bar{\Sigma}^>(p) &= \int dk_0 dq_0 \int du^2 dv^2 [1 - n_F(k_0)] [1 - n_F(q_0)] n_F(r_0) \\
&\quad \times \Theta(\Lambda - |\vec{k}|) \Theta(\Lambda - |\vec{q}|) \delta(k_0 - |\vec{k}|) \delta(q_0 - |\vec{q}|) \\
&\quad \times \int_{||\vec{p}|-u|}^{|\vec{p}|+u} dr \Theta(\Lambda - r) [\delta(r_0 - r) + \delta(r_0 + r)] \Bigg|_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=q_0+k_0-p_0}} \\
&= \int du^2 dv^2 [1 - n_F(|\vec{k}|)] [1 - n_F(|\vec{q}|)] \Theta(\Lambda - |\vec{k}|) \Theta(\Lambda - |\vec{q}|) \\
&\quad \times n_F(r_0) \int dr \Theta(|\vec{p}| + u - r) \Theta(r - ||\vec{p}| - u|) \\
&\quad \times \Theta(\Lambda - r) [\delta(r_0 - r) + \delta(r_0 + r)] \Bigg|_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=|\vec{q}|+|\vec{k}|-p_0}} \quad (6.6)
\end{aligned}$$

²Es sei noch einmal auf die Diskussion am Ende von Abschnitt 5.3.2 (S.66) verwiesen. Physikalisch wäre es eigentlich wünschenswert, die Relativimpulse \vec{u} und \vec{v} zu regularisieren.

und analog:

$$\begin{aligned}
-i\bar{\Sigma}^<(p) &= \int dk_0 dq_0 \int du^2 dv^2 n_F(k_0) n_F(q_0) [1 - n_F(r_0)] \\
&\quad \times \Theta(\Lambda - |\vec{k}|) \Theta(\Lambda - |\vec{q}|) [\delta(k_0 - |\vec{k}|) + \delta(k_0 + |\vec{k}|)] \\
&\quad \times [\delta(q_0 - |\vec{q}|) + \delta(q_0 + |\vec{q}|)] \\
&\quad \times \int_{||\vec{p}|-u|}^{|\vec{p}|+u} dr \Theta(\Lambda - r) \delta(r_0 - r) \Bigg|_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=q_0+k_0-p_0}} \\
&= \int dk_0 dq_0 \int du^2 dv^2 n_F(k_0) n_F(q_0) \\
&\quad \times \Theta(\Lambda - |\vec{k}|) \Theta(\Lambda - |\vec{q}|) [1 - n_F(r_0)] \Theta(\Lambda - r_0) \\
&\quad \times [\delta(k_0 - |\vec{k}|) + \delta(k_0 + |\vec{k}|)] [\delta(q_0 - |\vec{q}|) + \delta(q_0 + |\vec{q}|)] \\
&\quad \times \Theta(|\vec{p}| + u - r_0) \Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|) \Bigg|_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=q_0+k_0-p_0}}. \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Bei den Umformungen wurde im ersten Schritt jeweils benutzt, dass für $\omega_F > 0$ alle Terme der Art $[1 - n_F(p_0)]\delta(p_0 + |\vec{p}|)$ verschwinden müssen. Im zweiten Schritt wurden die Grenzen der Integration über r durch Θ -Funktionen ausgedrückt und einige Integrationen mit Hilfe der δ -Funktionen ausgewertet.

In (6.6) und (6.7) treten diverse Bedingungen für p_0 und $|\vec{p}|$ in Form von Fermi-Verteilungen und Θ -Funktionen auf. Nur wenn alle Bedingungen erfüllt sind, kann der Integrand einen Beitrag zu Selbstenergie leisten. In den folgenden Abschnitten werden wir diese Bedingungen genauer untersuchen. Es sei noch einmal daran erinnert, dass in diesem Kapitel ein System bei Temperatur Null betrachtet wird. Die Fermi-Verteilungen n_F in (6.6) und (6.7) entsprechen daher Θ -Funktionen. Es gilt:

$$n_F(p_0) = \Theta(\omega_F - p_0) \quad \text{und} \quad [1 - n_F(p_0)] = \Theta(p_0 - \omega_F).$$

Die Breite ist oberhalb von ω_F alleine durch $i\Sigma^>$ und unterhalb von ω_F alleine durch $-i\Sigma^<$ gegeben:

$$\Gamma(p) = \begin{cases} i\Sigma^>(p) & \text{für } p_0 > \omega_F \\ -i\Sigma^<(p) & \text{für } p_0 < \omega_F \end{cases}. \tag{6.8}$$

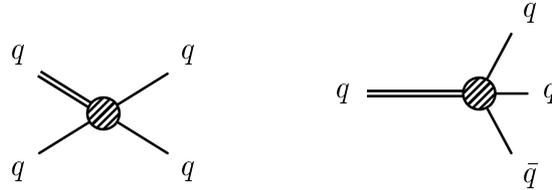
6.3 Einschränkungen für $i\Sigma^>$

Wir wollen nun die in (6.6) enthaltenen Bedingungen auswerten. Dazu zerlegen wir $i\bar{\Sigma}^>$ zunächst so, dass wir die aus Abschnitt 4.5.2 bekannten Prozesse getrennt betrachten können. Unser Ziel ist es, aus den Θ -Funktionen und Fermi-Verteilungen im Integranden Bedingungen für p_0 und $|\vec{p}|$ abzuleiten. Auf diese Weise können wir feststellen, bei welchen Werten von p_0 und $|\vec{p}|$ sich der Phasenraum für die einzelnen Prozesse öffnet und diese in der Lage sind, endliche Beiträge zur Selbstenergie bzw. Breite zu leisten.

Die Überlegungen in diesem und dem nächsten Abschnitt beziehen sich auf die Näherungen $i\bar{\Sigma}^{\geq}$. Wir werden die gewonnenen Aussagen später aber auf die Selbstenergien $i\Sigma^{\geq}$ übertragen. Das ist möglich, weil alle Phasenraumbedingungen, die in $i\bar{\Sigma}^{\geq}$ auftreten, auch in $i\Sigma^{\geq}$ enthalten sind. Dort wo $i\bar{\Sigma}^{\geq}$ verschwindet, muss auch die echte Selbstenergie $i\Sigma^{\geq}$ null sein.

Zwei Einschränkungen sind allerdings zu beachten. Da in $i\bar{\Sigma}^{\geq}$ die Spektralfunktionen durch δ -Funktionen ersetzt wurden, gelten die Bedingungen nicht streng für $i\Sigma^{\geq}$. Solange die Breiten aber klein bleiben, weichen die Bedingungen nur leicht auf. Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass die in $i\bar{\Sigma}^{\geq}$ vernachlässigten Faktoren eine zusätzliche Struktur in $i\Sigma^{\geq}$ verursachen. Somit stellen die hier gewonnenen Aussagen nur eine äußere Grenzen für die echten Selbstenergien $i\Sigma^{\geq}$ dar.

Der Ausdruck (6.6) lässt sich in zwei Anteile zerlegen, einen für $r_0 > 0$ und einen für $r_0 < 0$. Diese korrespondieren zu den beiden Prozessen für $i\Sigma^>$, die in Abschnitt 4.5.2 vorgestellt wurden:



Für $r_0 > 0$ ergibt sich der linke Prozess, $q_p q_r \rightarrow q_q q_k$, und für $r_0 < 0$ der rechte Prozess, $q_p \rightarrow q_q q_k \bar{q}_r$.

Wir betrachten nun beide Fälle getrennt:

- $q_p q_r \rightarrow q_q q_k$ ($r_0 > 0$)

Da r_0 größer als null sein soll, kann in (6.6) nur die δ -Funktion $\delta(r_0 - r)$ einen Beitrag leisten. Es folgt:

$$i\bar{\Sigma}^>(p) = \int du^2 dv^2 [1 - n_F(|\vec{k}|)] [1 - n_F(|\vec{q}|)] \Theta(\Lambda - |\vec{k}|) \Theta(\Lambda - |\vec{q}|) \\ \times n_F(r_0) \Theta(\Lambda - r_0) \Theta(|\vec{p}| + u - r_0) \Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|) \left| \begin{array}{l} \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) \\ \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ r_0 = |\vec{q}| + |\vec{k}| - p_0 \end{array} \right.$$

In der ersten Zeile wird das Integrationsvolumen über $\omega_F < |\vec{k}| < \Lambda$ und $\omega_F < |\vec{q}| < \Lambda$ festgelegt. Durch den Cutoff ist dieses Volumen begrenzt, es kann daher keinen unbeschränkten Anstieg der Breite geben. Bei einem bestimmten, endlichen Wert für p_0 erreicht die Breite ein Maximum, für größere p_0 muss die Breite entweder konstant bleiben oder kleiner werden.

Der zweiten Zeile entnehmen wir die folgenden Bedingungen:

$$- n_F(r_0):$$

$$\omega_F > r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{>\omega_F} + \underbrace{|\vec{k}|}_{>\omega_F} - p_0 > 2\omega_F - p_0 \Rightarrow p_0 > \omega_F$$

$$- \Theta(\Lambda - r_0):$$

$$\Lambda > r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{>\omega_F} + \underbrace{|\vec{k}|}_{>\omega_F} - p_0 > 2\omega_F - p_0 \Rightarrow p_0 > 2\omega_F - \Lambda$$

$$- \Theta(|\vec{p}| + u - r_0):$$

$$|\vec{p}| + \underbrace{u}_{\substack{=|\vec{q}+\vec{k}| \\ <|\vec{q}|+|\vec{k}|}} > r_0 = |\vec{q}| + |\vec{k}| - p_0 \Rightarrow |\vec{p}| > -p_0$$

$$- \Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|):$$

$$\underbrace{||\vec{p}| - u|}_{>0} < r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{<\Lambda} + \underbrace{|\vec{k}|}_{<\Lambda} - p_0 \Rightarrow p_0 < 2\Lambda$$

Die zweite Bedingung ist in der ersten enthalten; da $\Lambda > \omega_F$ gelten soll, ist $2\omega_F - \Lambda$ stets kleiner als ω_F . Aufgrund der ersten Bedingung ist p_0 immer positiv ($\omega_F > 0$), daher ist die dritte Bedingung automatisch erfüllt.

Wir erhalten zusammengefasst die folgenden Einschränkungen für p_0 :

$$\boxed{\omega_F < p_0 < 2\Lambda}$$

Der Phasenraum für den Prozess $q_p q_r \rightarrow q_q q_k$ öffnet sich also bei $p_0 = \omega_F$ und schließt sich bei $p_0 = 2\Lambda$ wieder. Für die Breite heißt das, dass sie oberhalb von ω_F zunächst ansteigt bis zu einem Maximum, dann aber abfällt und oberhalb von 2Λ wieder verschwindet.

- $\mathbf{q}_p \rightarrow \mathbf{q}_q \mathbf{q}_k \bar{\mathbf{q}}_r$ ($r_0 < 0$)

Da r_0 kleiner als null ist, kann diesmal nur $\delta(r_0 + r)$ einen Beitrag leisten. Es folgt:

$$i\bar{\Sigma}^>(p) = \int du^2 dv^2 [1 - n_F(|\vec{k}|)] [1 - n_F(|\vec{q}|)] \Theta(\Lambda - |\vec{k}|) \Theta(\Lambda - |\vec{q}|) \\ \times n_F(r_0) \Theta(\Lambda + r_0) \Theta(|\vec{p}| + u + r_0) \Theta(-r_0 - ||\vec{p}| - u|) \left| \begin{array}{l} \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) \\ \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ r_0 = |\vec{q}| + |\vec{k}| - p_0 \end{array} \right.$$

Die erste Zeile bestimmt wieder das Integrationsvolumen und legt somit den maximalen Beitrag zur Breite fest. Aus der zweiten Zeile erhalten wir:

- $n_F(r_0)$:

$$\omega_F > r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{>\omega_F} + \underbrace{|\vec{k}|}_{>\omega_F} - p_0 > 2\omega_F - p_0 \Rightarrow p_0 > \omega_F$$

- $\Theta(\Lambda + r_0)$:

$$\Lambda > -r_0 = \underbrace{-|\vec{q}|}_{>-\Lambda} - \underbrace{|\vec{k}|}_{>-\Lambda} + p_0 > p_0 - 2\Lambda \Rightarrow p_0 < 3\Lambda$$

- $\Theta(|\vec{p}| + u + r_0)$:

$$0 < |\vec{p}| + u + r_0 = |\vec{p}| + \underbrace{u}_{\substack{=|\vec{q}+\vec{k}| \\ <|\vec{q}|+|\vec{k}|}} + \underbrace{|\vec{q}|}_{<\Lambda} + \underbrace{|\vec{k}|}_{<\Lambda} - p_0 < 4\Lambda + |\vec{p}| - p_0 \\ \Rightarrow p_0 - |\vec{p}| < 4\Lambda$$

- $\Theta(-r_0 - ||\vec{p}| - u|)$:

$$\underbrace{-||\vec{p}| - u|}_{<0} > r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{>\omega_F} + \underbrace{|\vec{k}|}_{>\omega_F} - p_0 \Rightarrow p_0 > 2\omega_F$$

Die erste Bedingung ist offensichtlich in der vierten enthalten. Setzen wir die vierte Bedingung in die dritte ein, so ergibt sich $|\vec{p}| > 2\omega_F - 4\Lambda$, das ist trivialerweise erfüllt ($2\omega_F - 4\Lambda < -2\omega_F$). Wird $|\vec{p}| < \Lambda$ in die dritte Bedingung eingesetzt, dann folgt $p_0 < 5\Lambda$. Diese Forderung ist bereits in der zweiten Bedingung enthalten.

Es verbleiben die Einschränkungen:

$$\boxed{2\omega_F < p_0 < 3\Lambda}$$

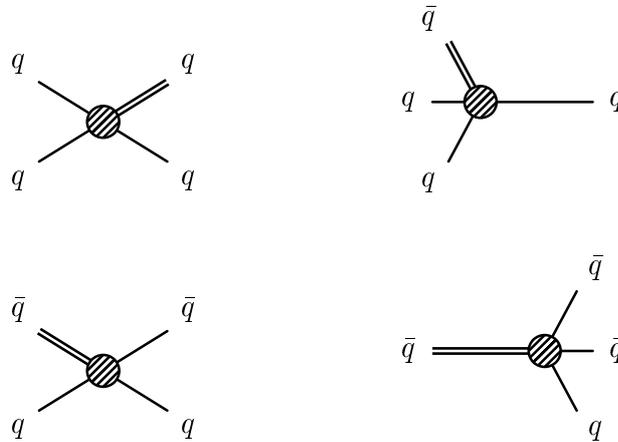
Wie bereits bekannt, kann der Prozess nur oberhalb von $2\omega_F$ stattfinden. Auch die Beiträge dieses Prozesses zur Breite steigen zunächst bis zu einem Maximum, fallen dann aber ab und verschwinden bei 3Λ .

Für keinen der beiden Prozesse gibt es eine effektive Einschränkung für den Betrag des Dreierimpulses $|\vec{p}|$. Wir erwarten daher, dass die Breite oberhalb von ω_F wesentlich stärker von p_0 also von $|\vec{p}|$ abhängt.

Den Abschätzungen entnehmen wir, dass die Breite bei $p_0 = \omega_F$ beginnend zunächst stark ansteigt, genau wie es bei den Nukleonen beobachtet wurde. Irgendwo zwischen $p_0 = \Lambda$ und $p_0 = 2\Lambda$ sollte sie dann aber ein Maximum erreichen und anschließend auf null zurückgehen (bei $p_0 = 3\Lambda$).

6.4 Einschränkungen für $-i\Sigma^<$

Wir zerlegen (6.7) nun nach dem gleichen Schema wie (6.6). Dazu spalten wir die Integrationen über die Energien k_0 und q_0 jeweils in eine Integration für positive und eine Integration für negative Energien auf. Wir erhalten so eine Summe aus vier Termen, in denen jeweils nur eine der vier Kombinationen $\delta(k_0 \pm |\vec{k}|) \delta(q_0 \pm |\vec{q}|)$ einen Beitrag liefert. Analog zum letzten Abschnitt korrespondieren diese Summanden zu den in Abschnitt 4.5.2 vorgestellten Prozessen für $-i\Sigma^<$:



Für $q_0 > 0, k_0 > 0$ erhält man die beiden Prozesse in der ersten Zeile, $q_q q_k \rightarrow q_p q_r$ und $\bar{q}_p q_q q_k \rightarrow q_r$. Es handelt sich im Grunde um den gleichen Prozess, einmal für $p_0 > 0$ und einmal für $p_0 < 0$. Die Fälle $q_0 > 0, k_0 < 0$ und $q_0 < 0, k_0 > 0$ führen beide auf den Prozess links unten, $\bar{q}_p q_q \rightarrow \bar{q}_k q_r$ bzw. $\bar{q}_p q_k \rightarrow \bar{q}_q q_r$. Es genügt, einen der beiden Fälle zu untersuchen, da das Ergebnis für den anderen Fall aus Symmetriegründen identisch sein muss. Den Prozess rechts unten, $\bar{q}_p \rightarrow \bar{q}_q \bar{q}_k q_r$, erhält man für $q_0 < 0, k_0 < 0$.

Wir betrachten die einzelnen Fälle:

- $\mathbf{q}_q \mathbf{q}_k \rightarrow \mathbf{q}_p \mathbf{q}_r$
 $\bar{\mathbf{q}}_p \mathbf{q}_q \mathbf{q}_k \rightarrow \mathbf{q}_r$ ($q_0 > 0, k_0 > 0$)

Es gilt $q_0 > 0, k_0 > 0$, daher leistet nur die Kombination $\delta(q_0 - |\vec{q}|)\delta(k_0 - |\vec{k}|)$ einen Beitrag zu den Integralen über k_0 und q_0 . Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-i\bar{\Sigma}^<(p) &= \int du^2 dv^2 n_F(|\vec{k}|) n_F(|\vec{q}|) \\
&\times [1 - n_F(r_0)] \Theta(\Lambda - r_0) \\
&\times \Theta(|\vec{p}| + u - r_0) \Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|) \left| \begin{array}{l} \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{v}) \\ \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{v}) \\ r_0 = |\vec{q}| + |\vec{k}| - p_0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Auf die Faktoren $\Theta(\Lambda - |\vec{k}|)$ und $\Theta(\Lambda - |\vec{q}|)$ kann verzichtet werden, da von den Fermi-Verteilungen sogar $|\vec{k}| < \omega_F$ und $|\vec{q}| < \omega_F$ verlangt wird ($\omega_F < \Lambda$).

Wie üblich legt die erste Zeile das Integrationsvolumen fest, $0 < |\vec{k}| < \omega_F, 0 < |\vec{q}| < \omega_F$. Man stellt fest, dass dieses Volumen bereits ohne zusätzlichen Cutoff begrenzt ist. Der Beitrag beider Prozesse zur Breite kann somit eine bestimmtes, endliches Maximum nicht überschreiten.

Der zweiten und der dritten Zeile entnehmen wir die folgenden Bedingungen:

$$- [1 - n_F(r_0)]:$$

$$\omega_F < r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{< \omega_F} + \underbrace{|\vec{k}|}_{< \omega_F} - p_0 < 2\omega_F - p_0 \Rightarrow p_0 < \omega_F$$

$$- \Theta(\Lambda - r_0):$$

$$\Lambda > r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{> 0} + \underbrace{|\vec{k}|}_{> 0} - p_0 > -p_0 \Rightarrow p_0 > -\Lambda$$

$$- \Theta(|\vec{p}| + u - r_0):$$

$$|\vec{p}| + \underbrace{u}_{\substack{= |\vec{q} + \vec{k}| \\ < |\vec{q}| + |\vec{k}|}} > r_0 = |\vec{q}| + |\vec{k}| - p_0 \Rightarrow |\vec{p}| > -p_0$$

$$- \Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|):$$

$$\underbrace{||\vec{p}| - u|}_{> 0} < r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{< \omega_F} + \underbrace{|\vec{k}|}_{< \omega_F} - p_0 \Rightarrow p_0 < 2\omega_F$$

Die vierte Bedingung ist in der ersten enthalten. Bei der dritten Bedingung handelt es sich für negative p_0 um eine echte Einschränkung (es wird dann $|\vec{p}| > |p_0|$ gefordert). Das Interessante daran ist, dass eine Verknüpfung zwischen p_0 und $|\vec{p}|$ hergestellt wird.

Wir erhalten zusammengefasst:

$$\boxed{-\Lambda < -|\vec{p}| < p_0 < \omega_F}$$

Bei negativen Energien p_0 erhält man nur Beiträge zur Breite, wenn der Betrag des Dreierimpulses oberhalb von $|p_0|$ liegt. Der Phasenraum öffnet sich somit unabhängig vom Impuls bei der Fermi-Energie, er schließt sich aber bei negativen Energien abhängig vom jeweiligen Impuls wieder. Dieses Phänomen ist völlig unabhängig vom Impuls-Cutoff Λ .

Für $|\vec{p}| = 0$ folgt aus der Bedingung $-|\vec{p}| < p_0$, dass p_0 positiv sein muss. Insbesondere für $p_0 = 0$ liefern die betrachteten Prozesse daher keinen Beitrag zur Breite.

Bei endlichem $|\vec{p}|$ existiert diese Einschränkung nicht. Die Prozesse liefern dann auch für $p_0 = 0$ nichtverschwindende Beiträge. Der Übergang des einen Prozesses in den anderen bei $p_0 = 0$ impliziert also nicht, dass die Beiträge zur Breite entlang dieser Linie verschwinden.

- $\bar{\mathbf{q}}_p \mathbf{q}_q \rightarrow \bar{\mathbf{q}}_k \mathbf{q}_r$ ($q_0 > 0, k_0 < 0$)

Für $q_0 > 0$ und $k_0 < 0$ werden die Beiträge zu den Integralen in (6.7) von $\delta(q_0 - |\vec{q}|)\delta(k_0 + |\vec{k}|)$ geliefert. Es folgt:

$$\begin{aligned} -i\bar{\Sigma}^<(p) &= \int du^2 dv^2 n_F(|\vec{q}|)\Theta(\Lambda - |\vec{k}|) \\ &\quad \times [1 - n_F(r_0)]\Theta(\Lambda - r_0) \\ &\quad \times \Theta(|\vec{p}| + u - r_0) \Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|) \Bigg|_{\substack{\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) \\ \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ r_0 = |\vec{q}| - |\vec{k}| - p_0}} \end{aligned}$$

Auf den Faktor $\Theta(\Lambda - |\vec{q}|)$ kann verzichtet werden, da die Fermi-Verteilung bereits $|\vec{q}| < \omega_F$ verlangt. Ebenso kann man auf $n_F(-|\vec{k}|)$ verzichten, da $\omega_F > -|\vec{k}|$ immer erfüllt ist ($\omega_F > 0$).

Das Integrationsvolumen ist durch $0 < |\vec{q}| < \omega_F$ und $0 < |\vec{k}| < \Lambda$ gegeben. Diesmal begrenzt also wieder der Cutoff das Volumen und somit den maximalen Beitrag zur Breite.

Aus der zweiten und der dritten Zeile erhalten wir:

– $[1 - n_F(r_0)]$:

$$\omega_F < r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{<\omega_F} \underbrace{-|\vec{k}|}_{<0} - p_0 < \omega_F - p_0 \Rightarrow p_0 < 0$$

– $\Theta(\Lambda - r_0)$:

$$\Lambda > r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{>0} \underbrace{-|\vec{k}|}_{>-\Lambda} - p_0 > -\Lambda - p_0 \Rightarrow p_0 > -2\Lambda$$

– $\Theta(|\vec{p}| + u - r_0)$:

$$|\vec{p}| + \underbrace{u}_{\substack{=|\vec{q}+\vec{k}| \\ <|\vec{q}|+|\vec{k}|}} > r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{>-\Lambda} \underbrace{-|\vec{k}|}_{>-\Lambda} - p_0 \Rightarrow |\vec{p}| + p_0 > -2\Lambda$$

– $\Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|)$:

$$\underbrace{||\vec{p}| - u|}_{>0} < r_0 = \underbrace{|\vec{q}|}_{<\omega_F} \underbrace{-|\vec{k}|}_{<0} - p_0 \Rightarrow p_0 < \omega_F$$

Die vierte Bedingung ist in der ersten enthalten. Wird die erste Bedingung in die dritte eingesetzt, so folgt $|\vec{p}| > -2\Lambda$, das ist immer erfüllt. Setzen wir $|\vec{p}| < \Lambda$ in die dritte Bedingung ein, dann ergibt sich $p_0 > -2\Lambda$, das ist in der zweiten Bedingung enthalten.

Es verbleiben die Einschränkungen:

$$\boxed{-2\Lambda < p_0 < 0}$$

Für den Dreierimpuls $|\vec{p}|$ treten keine Bedingungen auf.

- $\bar{\mathbf{q}}_{\mathbf{p}} \rightarrow \bar{\mathbf{q}}_{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}} \mathbf{q}_{\mathbf{r}}$ ($q_0 < 0, k_0 < 0$)

Diesmal kommen die Beiträge zu den Integralen in (6.7) von der Kombination $\delta(q_0 + |\vec{q}|)\delta(k_0 + |\vec{k}|)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} -i\bar{\Sigma}^<(p) &= \int du^2 dv^2 \Theta(\Lambda - |\vec{k}|)\Theta(\Lambda - |\vec{q}|) \\ &\quad \times [1 - n_F(r_0)]\Theta(\Lambda - r_0) \\ &\quad \times \Theta(|\vec{p}| + u - r_0) \Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|) \Bigg|_{\substack{\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}) \\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ r_0=-|\vec{q}|-|\vec{k}|-p_0}} \end{aligned}$$

Auf die Faktoren $n_F(-|\vec{k}|)$ und $n_F(-|\vec{q}|)$ kann verzichtet werden, da $\omega_F > -|\vec{k}|$ und $\omega_F > -|\vec{q}|$ immer erfüllt ist. Das Integrationsvolumen ist durch $0 < |\vec{q}| < \Lambda$ und $0 < |\vec{k}| < \Lambda$ gegeben. Es ist also wieder der Cutoff, der dafür sorgt, dass die Breite endlich bleibt.

Aus der zweiten und dritten Zeile erhalten wir:

$$- [1 - n_F(r_0)]:$$

$$\omega_F < r_0 = \underbrace{-|\vec{q}|}_{<0} - \underbrace{|\vec{k}|}_{<0} - p_0 < -p_0 \Rightarrow p_0 < -\omega_F$$

$$- \Theta(\Lambda - r_0):$$

$$\Lambda > r_0 = \underbrace{-|\vec{q}|}_{>-\Lambda} - \underbrace{|\vec{k}|}_{>-\Lambda} - p_0 > -2\Lambda - p_0 \Rightarrow p_0 > -3\Lambda$$

$$- \Theta(|\vec{p}| + u - r_0):$$

$$|\vec{p}| + \underbrace{u}_{\substack{=|\vec{q}+\vec{k}| \\ <|\vec{q}|+|\vec{k}|}} > r_0 = \underbrace{-|\vec{q}|}_{>-\Lambda} - \underbrace{|\vec{k}|}_{>-\Lambda} - p_0 \Rightarrow |\vec{p}| + p_0 > -4\Lambda$$

$$- \Theta(r_0 - ||\vec{p}| - u|):$$

$$\underbrace{||\vec{p}| - u|}_{>0} < r_0 = \underbrace{-|\vec{q}|}_{<0} - \underbrace{|\vec{k}|}_{<0} - p_0 < p_0 \Rightarrow p_0 < 0$$

Die vierte Bedingung ist wieder in der ersten enthalten. Wird die erste in die dritte Bedingung eingesetzt, ergibt sich $|\vec{p}| > -4\Lambda + \omega_F$, das ist immer erfüllt. Setzt man $|\vec{p}| < \Lambda$ in die dritte Bedingung ein, so folgt $p_0 > -5\Lambda$, das ist in der zweiten Bedingung enthalten.

Wir erhalten zusammengefasst die folgenden Einschränkungen:

$$\boxed{-3\Lambda < p_0 < -\omega_F}$$

Auch für diesen Prozess gibt es also nur Beschränkungen in p_0 .

Es treten mehrere Prozesse auf, die erst unterhalb von $p_0 = 0$ möglich sind. Sie werden nur durch Bedingungen für die Energie p_0 eingeschränkt, wir erwarten daher, dass ihre Beiträge zur Breite wesentlich stärker p_0 - als $|\vec{p}|$ -abhängig sind.

Überlagert wird das Ganze durch einen Prozess ($q_k q_q \rightarrow q_p q_r$ bzw. $\bar{q}_p q_k q_q \rightarrow q_r$), der bereits für Energien unterhalb von $p_0 = \omega_F$ möglich ist. Der Phasenraum für diesen Prozess öffnet sich unabhängig vom Impuls bei der Fermi-Energie,

er schließt sich aber impulsabhängig wieder bei $p_0 = -|\vec{p}|$. Die Beiträge dieses Prozesses zur Breite sollten bei positiven Energien eher impulsunabhängig sein, während sich bei negativen Energien eine deutliche Impulsabhängigkeit zeigt.

Wir erwarten das folgende Bild: Bei kleinen Impulsen $|\vec{p}|$ steigt die Breite beginnend bei $p_0 = \omega_F$ zunächst an (in Richtung kleinerer Energien) und erreicht bei einer kleinen, positiven Energie ein Maximum. Dann wird sie aber wieder kleiner und nimmt bei einer betragslich kleinen, negativen Energie ($p_0 \approx -|\vec{p}|$) ein Minimum an. An diesem Punkt enden die Beiträge von $\bar{q}_p q_q q_k \rightarrow q_r$ und die Prozesse, die erst bei $p_0 = 0$ einsetzen, haben noch keine große Bedeutung erlangt. Anschließend steigt die Breite wieder stark an und erreicht zwischen $p_0 = -\Lambda$ und $p_0 = -2\Lambda$ ein weiteres Maximum bevor sie bei $p_0 = -3\Lambda$ ganz verschwindet.

Bei großen Impulsen ändert sich das Bild. Das Minimum sollte zu kleineren Energien wandern (gemäß $p_0 = -|\vec{p}|$) und nicht mehr so stark ausgeprägt sein bzw. ganz verschwinden. Die anderen Prozesse können bei kleineren Energien schon wesentliche Beiträge leisten, wenn $\bar{q}_p q_q q_k \rightarrow q_r$ bei $p_0 = -|\vec{p}|$ verschwindet. Die übrigen Eigenschaften der Breite sollten sich dagegen kaum verändern.

6.5 Zusammenfassung

Die Abschätzung der Phasenraumeffekte erlaubt die folgenden Aussagen: Die Breite bei $p_0 = \omega_F$ ist null. Auf beiden Seiten der Fermi-Energie ω_F dominiert zunächst ein starkes Anwachsen die Eigenschaften der Breite. Bei negativen Energien wird dieser Anstieg von einem zusätzlichen Minimum überlagert, dessen Lage und Ausprägung abhängig vom Impuls $|\vec{p}|$ ist.

Der Impuls-Cutoff sorgt dafür, dass die Breite nicht divergiert, sondern ein Maximum annimmt, anschließend wieder kleiner wird und bei sehr großen $|p_0|$ verschwindet. Dieser Einfluss des Cutoffs macht sich allerdings erst bei Energien deutlich oberhalb von $|p_0| = \Lambda$ bemerkbar. Werden nur Energien im Bereich $-\Lambda < p_0 < \Lambda$ betrachtet, so ist nicht zu erwarten, dass sich ein Abfallen der Breite zeigt.

Bei $p_0 = |\vec{p}| = 0$ sagt die Abschätzung eine Nullstelle in der Breite voraus. Die einzigen Prozesse, von denen bei $p_0 = 0$ Beiträge zur Breite stammen könnten, sind $q_q q_k \rightarrow q_p q_r$ und $\bar{q}_p q_q q_k \rightarrow q_r$. Sie sind allerdings der Bedingung $p_0 > -|\vec{p}|$ unterworfen, für $|\vec{p}| = 0$ leisten sie somit nur Beiträge bei endlichen, positiven Energien. Die Konsequenz ist eine Nullstelle der Breite bei $p_0 = |\vec{p}| = 0$.

Alle Abschätzungen wurden für freie Teilchen durchgeführt. Bei einer ausführlichen Rechnung mit wechselwirkenden Teilchen und endlicher Temperatur sind die betrachteten Bedingungen weniger streng, da die Teilchen durch Verteilungen mit endlicher Breite anstelle von δ -Funktionen beschrieben werden. Es ist dann nicht zu erwarten, dass eine echte Nullstelle bei $p_0 = |\vec{p}| = 0$ auftritt. Ein gut zu

erkennendes Minimum sollte aber auch bei Teilchen mit realistischer Breite zu beobachten sein.

Kapitel 7

Ergebnisse

Im Rahmen dieser Arbeit wurden numerische Rechnungen auf der Basis des vorgestellten Modells durchgeführt. Wir werden in diesem Kapitel die Ergebnisse für die Quark-Spektralfunktion diskutieren und mit den Resultaten für Nukleonen vergleichen. Ferner werden wir überprüfen, inwieweit die Vorhersagen für die Zerfallsbreite aus den Phasenraumüberlegungen zutreffen. Da diese Arbeit den ersten Versuch darstellt, die Quark-Spektralfunktion zu berechnen, und es keine experimentellen Daten gibt, existiert leider kein direkter Vergleich zu unseren Ergebnissen.

Bei der Betrachtung der Ergebnisse beschränken wir uns auf die Komponenten $\rho_0(p_0, \vec{p}^2)$ und $\Gamma_0(p_0, \vec{p}^2)$ von Spektralfunktion und Breite. Es wurde ja bereits diskutiert, dass die physikalisch interessante Zustandsdichte sich direkt aus ρ_0 ergibt (Abschnitt 4.3.4). Außerdem ist es so, dass ρ_v kaum zusätzliche Informationen enthält. Wie wir wissen, sind ρ_0 und ρ_v im Vakuum bis auf einen Faktor $(-p_0/|\vec{p}|)$ identisch. In Abschnitt 5.4.2 wurde gezeigt, dass diese Beziehung am on-shell-Punkt ($|p_0| = |\vec{p}|$) auch im Medium näherungsweise erfüllt ist. Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse bestätigt lediglich diese Tatsache. Es zeigt sich, dass ρ_0/p_0 und $\rho_v/|\vec{p}|$ bis auf einen Vorzeichenwechsel bei $p_0 = 0$ relativ ähnlich aussehen.

Zwischen Γ_0 und Γ_v existiert leider kein so einfacher Zusammenhang. Das lässt sich leicht anhand von (5.3) und (5.4) verdeutlichen, wenn dort ρ_0 durch $-\rho_v p_0/|\vec{p}|$ ersetzt wird. Die Untersuchung der Zerfallsbreite zeigt aber, dass im Wesentlichen Γ_0 die Form der Spektralfunktion bestimmt. Die Komponente Γ_v ist viel kleiner und kann auch negative Werte annehmen¹. Dieses Phänomen ist bereits aus Rechnungen für relativistische Nukleonen bekannt [Ho84].

Unser Modell besitzt zwei freie Parameter, den Impuls-Cutoff Λ und die Quark-Quark-Kopplungskonstante G aus dem NJL-Modell. Um den Einfluss dieser Grö-

¹Das ergibt sich aus den Faktoren, die wir bei der Phasenraumbetrachtung vernachlässigt haben.

ßen auf die Spektralfunktion zu untersuchen, wurde nicht nur mit den Standardwerten (siehe Abschnitt 4.4.5) gearbeitet, sondern es wurden auch Rechnungen mit kleinerem Cutoff bzw. größerer Kopplungskonstante durchgeführt.

Im Folgenden stellen wir zunächst die Ergebnisse für Breite und Spektralfunktion vor, so wie sie sich für die Standardwerte von Cutoff und Kopplungskonstante ergeben. Anschließend vergleichen wir dann mit den Resultaten, die für andere Werte der beiden Parameter folgen. Es sei daran erinnert, dass die Daten bei positiven Energien p_0 die Eigenschaften der Quarks und die Daten bei negativen Energien p_0 die Eigenschaften der Antiquarks (mit Energie $|p_0|$) beschreiben.

7.1 Numerik und Parameter

Alle Rechnungen wurden bei Temperatur Null und mit einem Cutoff für den Dreierimpuls durchgeführt. Das hat unter anderem numerische Gründe. Wie schon bei den Nukleonen vereinfachen sich die Rechnungen stark, wenn man die Fermi-Verteilungen und den Cutoff ausnutzen kann, um die Integrationsgrenzen zu beschneiden.

Die numerische Integration über sechs Dimensionen wurde mit Hilfe einer Routine aus der NAG²-Fortran-Bibliothek vorgenommen [NAG]. Zur Erhöhung der Genauigkeit wurden die Integrationen über k_0 und q_0 (vgl. (5.5) und (5.6)) jeweils bei 0 und ω_F unterteilt. So entstanden neun Blöcke, in denen immer nur einer der Prozesse aus Abschnitt 4.5.2 auftritt. Der numerische Vorteil der Zerlegung liegt darin, dass so die Quark- und Antiquarkpeaks der einzelnen Spektralfunktionen, über die integriert wird, auf die verschiedenen Blöcke verteilt werden.

Die betrachtete Quarkmaterie ist mit normaler Kernmaterie vergleichbar. Wir nehmen an, dass jedes Nukleon in der Kernmaterie aus drei Quarks besteht (in unserem Medium sollen keine Antiquarks vorhanden sein) und erhalten so für die Quarkdichte ρ_{qm} :

$$\rho_{\text{qm}} = 3 \cdot \rho_{\text{nm}} = 3 \cdot 0.17 \text{ fm}^{-3}. \quad (7.1)$$

Die zugehörige Fermi-Energie ergibt sich aus der Bedingung:

$$\rho_{\text{qm}} = \int_0^{\omega_F} \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_0 \mathcal{A}^{\text{free}}(p_0, |\vec{p}|^2)].$$

Einsetzen von (6.1) führt auf $\rho_{\text{qm}} = \frac{N_f N_c}{6\pi^2} \omega_F^3$, mit der Zahl der Flavor N_f und der Zahl der Farben N_c . Für $N_f = 2$ und $N_c = 3$ ergibt sich:

$$\omega_F = 0.268 \text{ GeV}.$$

²Numerical Algorithms Group

Da wir masselose Quarks betrachten hat der entsprechende Fermi-Impuls den gleichen Wert, $p_F = \omega_F = 0.268$ GeV.

In Abschnitt 4.4.5 wurden die Parameter des NJL-Modells so bestimmt, dass die experimentell bekannten Werte für die Pionzerfallskonstante und die Konstituentenquarkmasse reproduziert werden. Es ergab sich für den Dreierimpuls-Cutoff: $\Lambda = 653$ MeV und $G = 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$. Das sind die Werte für Λ und G , die wir als Standardwerte bezeichnen.

Das $(p_0, |\vec{p}|)$ -Gitter, auf dem die Rechnungen ausgeführt werden, spezifizieren wir unabhängig vom genauen Wert von Λ . Die Ränder des Gitters liegen bei $|\vec{p}| = \Lambda$ für den Dreierimpuls und bei $p_0 = -\Lambda$ bzw. $p_0 = +\Lambda$ für die Energie. Die Zahl der Gitterpunkte wird auf 200×100 festgelegt ($p_0 \times |\vec{p}|$), dadurch ist der Abstand zwischen den Gitterpunkten in beiden Richtungen gleich groß. Für $\Lambda = 653$ MeV ist die Auflösung somit etwas schlechter als bei den Nukleon-Rechnungen.

Die Initialisierung der Rechnungen erfolgte mit einer konstanten Breite. Gemäß der Vorgabe, dass $\Gamma_v \ll 1$ sein soll, wurden die Werte $\Gamma_0 = 1$ MeV und $\Gamma_v = 0$ gewählt. Wie die Ergebnisse zeigen, wäre es eigentlich wünschenswert, von einem kleineren Wert für Γ_0 zu starten. Das würde aber zu so schmalen Peaks in der Spektralfunktion führen, dass eine verlässliche numerische Integration nicht mehr möglich ist.

7.2 Die Breite

In Abbildung 7.1 ist das Ergebnis unserer iterativen Rechnung dargestellt. Wie man sieht, erhält man mit der ersten Iteration bereits ein sehr gutes Ergebnis. Das hängt damit zusammen, dass die tatsächlichen Breiten relativ klein sind und im Bereich unserer Initialisierung liegen. Es ergibt sich daher schon nach der zweiten Iteration das endgültige Resultat.

Der physikalisch interessanteste Teil der Ergebnisse liegt im Bereich $0 < p_0 < \omega_F$, denn dort befinden sich die besetzten Quarkzustände. Der Teilchensektor ($p_0 > 0$) ist daher in Abbildung 7.2 noch einmal separat dargestellt. Es ergeben sich Werte in der Größenordnung von $0.1 - 1$ MeV für die Breite der besetzten Zustände. Oberhalb von $p_0 = 0.1$ GeV ist die Breite weitestgehend impulsunabhängig. Bei niedrigeren Energien zeigt sich dagegen eine Abhängigkeit vom Impuls. Während die Breite bei kleinen Impulsen in Richtung $p_0 = 0$ abnimmt, steigt sie bei größeren Impulsen an.

Dieses Verhalten steht natürlich im Zusammenhang mit dem Minimum der Breite im Antiteilchensektor ($p_0 < 0$), das in Abbildung 7.1 gut zu erkennen ist. Je näher dieses Minimum bei $p_0 = 0$ liegt, desto mehr Einfluss hat es auf den Teilchensektor bei kleinen Energien. Im Zusammenhang mit den beobachtbaren Phasenraumeffekten werden wir noch einmal auf dieses Minimum zurückkommen.

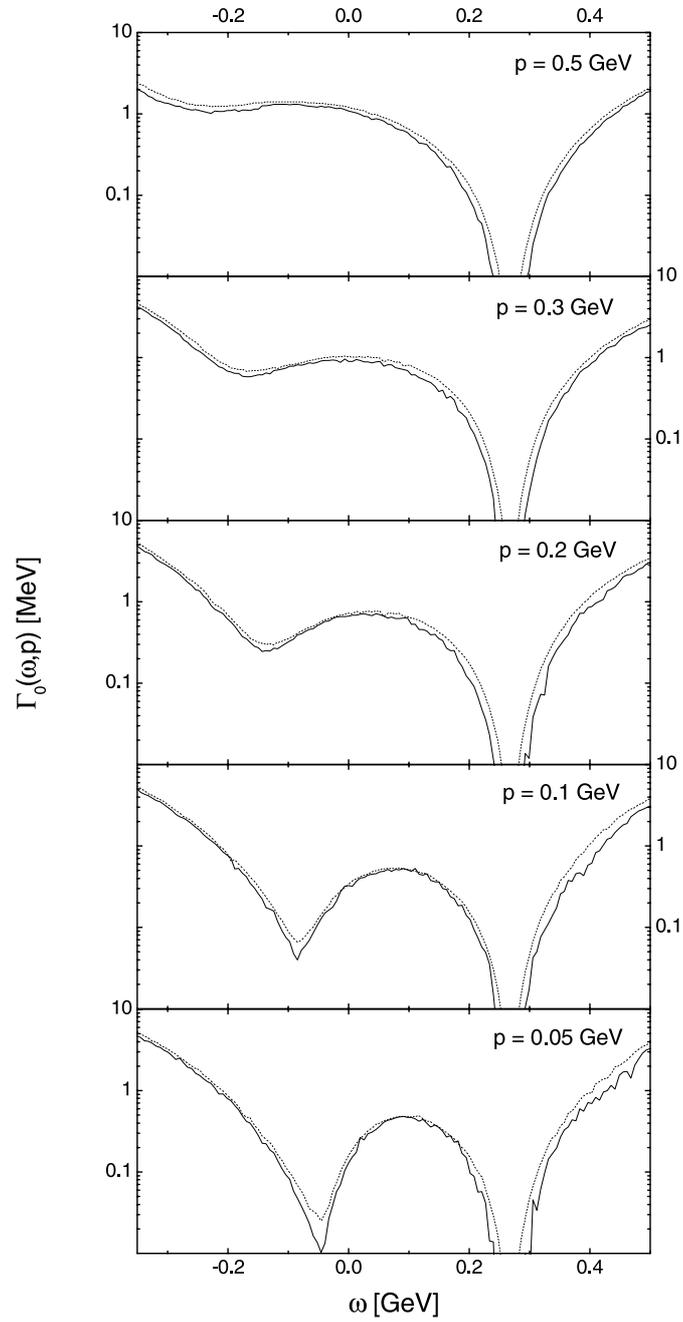


Abbildung 7.1: Die Zerfallsbreite Γ_0 , dargestellt bei verschiedenen Impulsen. Die durchgezogene Linie zeigt das endgültige Ergebnis (zweite Iteration), die gestrichelte Linie gibt das Ergebnis nach der ersten Iteration an.

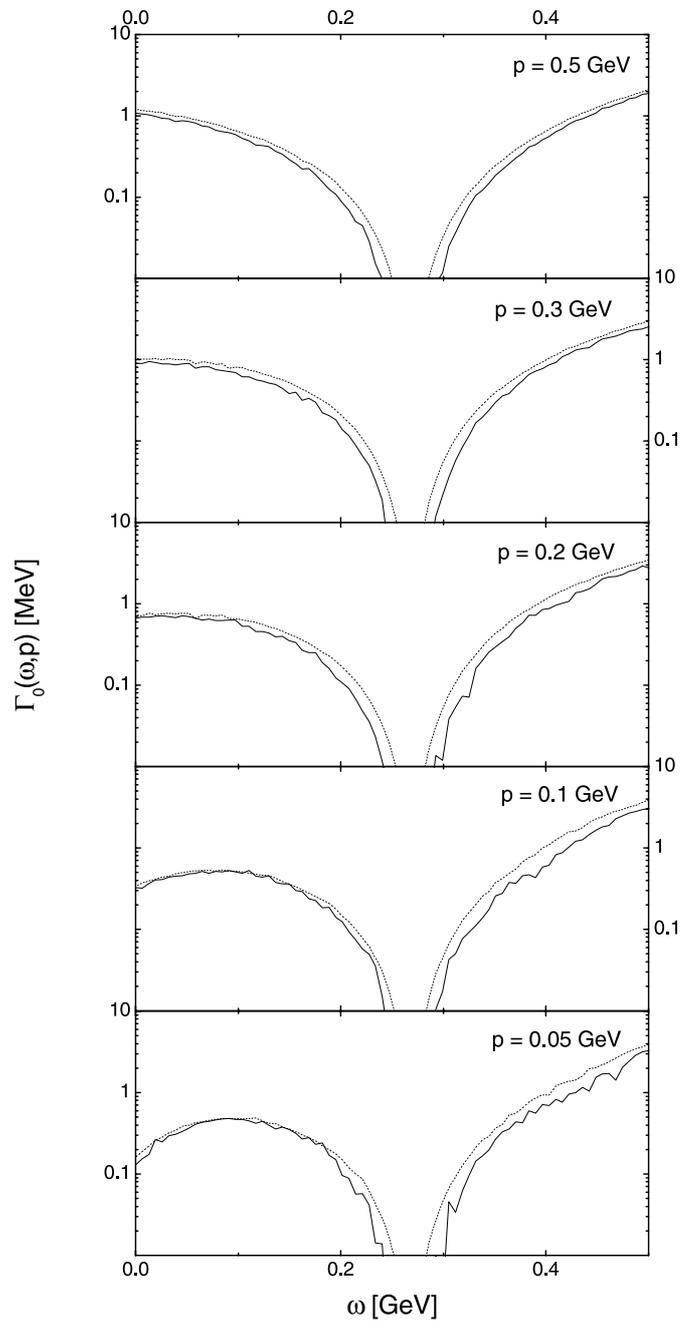


Abbildung 7.2: Die Zerfallsbreite Γ_0 , dargestellt bei verschiedenen Impulsen für den Teilchensektor ($p_0 > 0$). Die durchgezogene Linie zeigt das endgültige Ergebnis (zweite Iteration), die gestrichelte Linie gibt das Ergebnis nach der ersten Iteration an.

Die Auswirkungen der Selbstkonsistenz sind in den Ergebnissen nur schwach zu sehen. Bei den Nukleon-Rechnungen wurde mit einer Breite initialisiert, die deutlich unter dem endgültigen, selbstkonsistent bestimmten Wert lag. Daher ließ sich gut beobachten, wie die Breite bei größeren Energien $|p_0|$ durch das Iterieren allmählich anwuchs. Dieser Effekt muss hier ausbleiben, da mit einem Wert für die Breite initialisiert wird, der bereits in der Größenordnung des selbstkonsistenten Ergebnisses liegt. Stattdessen wird ein leichter Rückgang in der Breite beobachtet, der darauf zurückzuführen ist, dass die Initialisierung stellenweise oberhalb der tatsächlichen Breite lag.

Das bedeutet aber nicht, dass Selbstkonsistenz hier keine Rolle spielt. Es heißt nur, dass bereits im ersten Iterationsschritt mit Spektralfunktionen gerechnet wird, die annähernd realistische Breiten besitzen. Die zweite Iteration ist somit nur noch für die Feinabstimmung zuständig. Es wäre aus diesem Grund wünschenswert, die numerische Genauigkeit so zu erhöhen, dass mit Breiten $\Gamma_0 \ll 1$ MeV initialisiert werden kann³.

Wir vergleichen nun das Ergebnis der Rechnungen mit unseren einfachen Abschätzungen aus Kapitel 6. Die hohen Werte für die Breite bei großen $|p_0|$ sind eindeutig auf das Anwachsen des verfügbaren Phasenraums zurückzuführen. Der cutoffbedingte Rückgang der Breite bei höheren $|p_0|$ lässt sich hier leider nicht beobachten, da er außerhalb der Grenzen unseres Gitters liegt. Ebenso leicht können wir das Verschwinden der Breite bei der Fermi-Energie ($\omega_F = 0.268$ GeV) erklären.

Auch das Minimum bei negativen p_0 passt recht gut zu unserer Vorhersage. Es ist bis zu einem Impuls von 0.2 GeV deutlich zu erkennen und wird dann immer schwächer. Man sieht außerdem, dass die Lage des Minimums bei den beiden kleinsten Impulsen sehr gut mit der Beziehung $p_0 = -|\vec{p}|$ übereinstimmt, genau wie es in Abschnitt 6.4 (S. 80, 83) erwartet wurde. Ob sich für $p_0 = |\vec{p}| = 0$ eine Nullstelle ergibt, so wie es die Diskussion in Abschnitt 6.5 nahelegt, ist aus numerischen Gründen allerdings nicht überprüfbar (bei endlichen Breiten ist aber auch keine exakte Nullstelle zu erwarten).

Abschließend stellen wir fest, dass die Form der Breite oberhalb von $p_0 = 0.1$ GeV nur sehr schwach vom Impuls abhängt. Unterhalb von $p_0 = 0.1$ GeV dagegen wird das impulsunabhängige Anwachsen der Breite von dem Minimum überlagert. In diesem Bereich ergibt sich daher eine starke Impulsabhängigkeit. Auch das war Bestandteil unserer Abschätzung (Abschnitt 6.5). Die Eigenschaften der Breite lassen sich somit vollständig mit Phasenraumeffekten erklären. Aufgrund unseres einfachen Modells für die Wechselwirkung ist das aber keine Überraschung, die

³Dass nicht mit Breiten $\Gamma_0 \ll 1$ MeV initialisiert werden kann, steht nicht im Widerspruch zu der Tatsache, dass eine zweite Iteration möglich ist. Es treten treten zwar auch im Rahmen der zweiten Iteration sehr kleine Breiten auf, diese sind aber auf kleine Bereiche beschränkt und daher besser handhabbar.

gleiche Beobachtung wurde ja bereits bei den Nukleonen gemacht.

7.3 Die Spektralfunktion

Die iterativ berechnete Spektralfunktion ist in Abbildung 7.3 zu sehen. Die 'on-shell-peaks' von Quarks und Antiquarks dominieren die Eigenschaften der Spektralfunktion. Ihre Maxima liegen wie zu erwarten bei $|p_0| = |\vec{p}|$. Aufgrund der geringen Breite konzentriert sich fast die gesamte Stärke in unmittelbarer Nähe dieser Punkte.

Man erkennt, dass zwischen der ersten und der zweiten Iteration fast kein Unterschied besteht, die Selbstkonsistenz sorgt auch hier nur für eine Feinabstimmung. Die Peaks bleiben weitestgehend unverändert, beim Untergrund zwischen den Peaks zeigt sich ein leichter Rückgang. Dieser ist natürlich auf den bereits diskutierten Rückgang der Breite zurückzuführen.

Der physikalisch interessante Bereich der besetzten Quarkzustände ($0 < p_0 < \omega_F$) ist für die Impulse oberhalb des Fermi-Impulses (hier gilt: $p_F = \omega_F$) in Abbildung 7.3 kaum zu erkennen. Abbildung 7.4 zeigt diesen Bereich daher noch einmal im Detail. Da der 'on-shell-peak' der Quarks oberhalb der Fermi-Kante liegt, nimmt die Spektralfunktion nur sehr kleine Werte an. Trotzdem sind die Daten in Abbildung 7.4 von Bedeutung, denn die Größe der Spektralfunktion in diesem Bereich ist verantwortlich für den 'Hochimpulsschwanz' der Impulsverteilung, den wir später diskutieren werden (Abschnitt 7.6).

In Abbildung 7.4 sieht es bei $|\vec{p}| = 0.3$ GeV nach der ersten Iteration so aus, als ob die Spektralfunktion im Bereich $0.1 \text{ GeV} < p_0 < 0.2 \text{ GeV}$ ein schwach ausgeprägtes Maximum hat. Nach der zweiten Iteration ist das Maximum aber verschwunden und die Spektralfunktion ist annähernd konstant, bevor sie in der Nähe der Fermi-Energie abfällt. Bei $|\vec{p}| = 0.5$ GeV besitzt die Spektralfunktion kein konstantes Plateau mehr. Sie nimmt in so großer Entfernung vom Fermi-Impuls nur sehr kleine Werte an und fällt rasch ab. Die Form wird durch das Iterieren nicht beeinflusst, es zeigt sich der überall auftretende leichte Rückgang.

Die Asymmetrie zwischen Quark- und Antiquarksektor beruht auf zwei verschiedenen Effekten. Das Verschwinden der Breite bei der Fermi-Energie hat zur Folge, dass auch die Spektralfunktion bei ω_F verschwinden muss. Das führt zu einer Unterdrückung des 'on-shell-peaks' der Quarks in der Nähe der Fermi-Energie ($p \approx \omega_F = 0.268$ GeV). Sehr gut zu beobachten ist das bei den Schnitten für $p = 0.2$ GeV und $p = 0.3$ GeV in Abbildung 7.3. Im ersten Fall liegt der Peak unterhalb der Fermi-Energie und ein Teil seiner rechten Hälfte scheint zu fehlen. Im zweiten Fall liegt der Peak knapp oberhalb der Fermi-Energie, wie man sieht fehlt jetzt ein großer Teil auf der linken Seite.

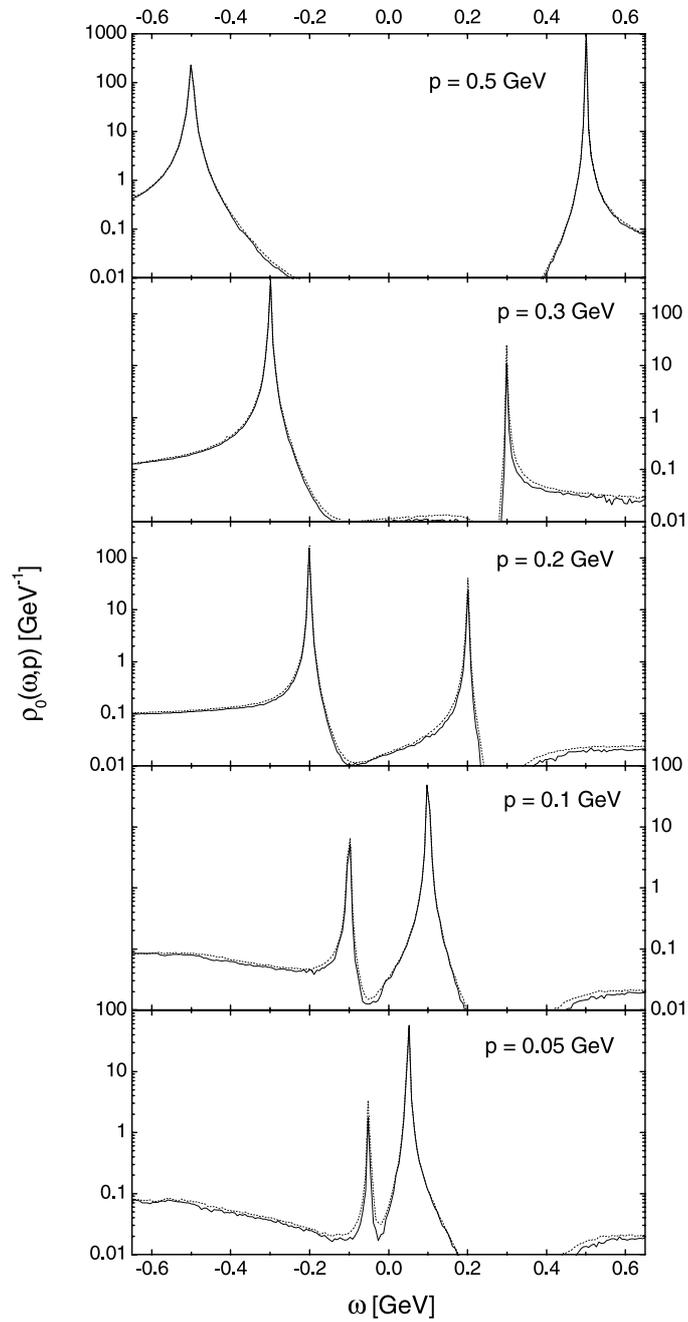


Abbildung 7.3: Die Spektralfunktion ρ_0 , dargestellt bei verschiedenen Impulsen. Die durchgezogene Linie zeigt das endgültige Ergebnis (zweite Iteration), die gestrichelte Linie gibt das Ergebnis nach der ersten Iteration an.

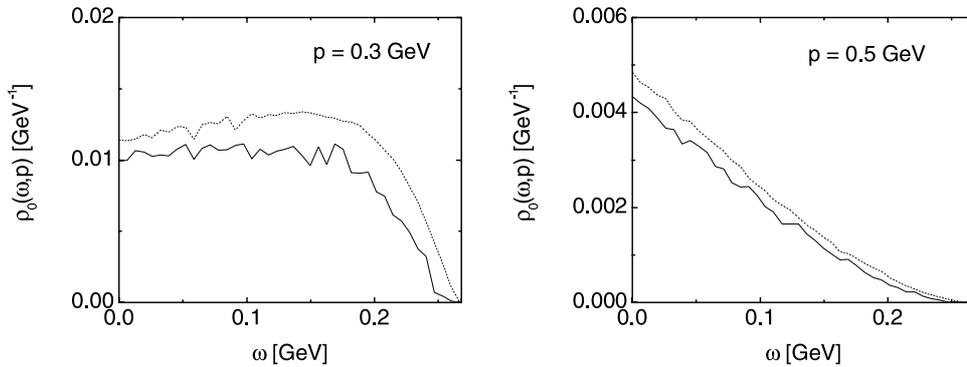


Abbildung 7.4: Die Spektralfunktion ρ_0 der besetzten Quarkzustände ($0 < p_0 < \omega_F$) für Impulse oberhalb des Fermi-Impulses. Die durchgezogene Linie zeigt das endgültige Ergebnis (zweite Iteration), die gestrichelte Linie gibt das Ergebnis nach der ersten Iteration an.

Im Antiteilchensektor macht sich ein anderer Effekt bemerkbar, den wir schon kennen. Das Minimum in der Breite sollte für kleine Impulse in etwa bei $p_0 \approx -|\vec{p}|$ liegen (vgl. Diskussion in Abschnitt 6.4, S. 80). Das ist aber die gleiche Position, an der sich auch der 'on-shell-peak' der Antiteilchen befindet. Das Minimum sorgt somit für eine deutliche Verschmälerung des Antiquarkpeaks gegenüber dem Quarkpeak. Da das Minimum bei größeren Impulsen schwächer ausgeprägt ist und sich seine Position nicht mehr genau unterhalb des Peaks befindet, geht der Einfluss dieses Effektes mit steigendem Impuls zurück.

Der physikalische Grund für die Asymmetrie ist natürlich, dass die betrachtete Quarkmaterie keine Antiquarks enthält. Während die Quarkzustände bis zur (endlichen) Fermi-Energie ω_F besetzt sind, sind sämtliche Antiquarkzustände unbesetzt⁴. Um eine symmetrische Spektralfunktion (und Breite) zu erhalten, müssten auch die Antiquarkzustände bis zur Energie ω_F besetzt werden.

Bei niedrigen Impulsen wird ein anwachsender Untergrund an den Rändern beobachtet. Dieses Anwachsen ergibt sich aus dem phasenraumbedingten Anstieg in der Breite. Das Gleiche gilt für die zunehmende Breite der Antiteilchenpeaks bei hohen Impulsen. Da die Peaks immer weiter nach außen wandern, geraten sie in den Bereich, in dem die Breite durch das Anwachsen des Phasenraums sehr groß wird. Ein ähnlicher Effekt sollte auch bei den Quarkpeaks zu beobachten sein. Hier hat allerdings die Nähe zur Fermi-Energie eine unterdrückende Wirkung.

⁴Der Klarheit halber sollte angemerkt werden: In der Dirac-Interpretation sind Antiteilchen unbesetzte Löcher im Dirac-See. Unbesetzte Antiteilchenzustände sind also besetzte Löcher. Da alle (Quark-)Zustände unterhalb von ω_F aufgefüllt sind, sind folglich alle Löcher besetzt, d.h. alle Antiteilchen-Zustände unbesetzt.

7.4 Variation des Cutoff-Parameters

Rechnungen mit einem kleineren Cutoff sind nicht nur interessant, um das allgemeine Verhalten des Modells zu testen. In der Näherung in Abschnitt 4.5.2 hatten die Antiteilchen lediglich oberhalb von $2\omega_F$ direkten Einfluss auf Spektralfunktion und Breite. Erst durch Iterieren können sich so die Eigenschaften der Antiquarks auf die Quarks auswirken⁵. Wird ein Cutoff unterhalb der Schwelle von $2\omega_F$ gewählt, dann sind die Eigenschaften der Quarks völlig unabhängig von den Antiquarks. Der Einfluss der Quarks auf die Antiquarks bleibt dagegen unverändert.

Die folgenden Ergebnisse wurden unter Verwendung von $\Lambda = 400$ MeV berechnet. Die gleichzeitige Skalierung der Kopplungskonstanten gemäß $G = 2.14\Lambda^{-2}$ (vgl. Standardwerte, S. 87) sorgt dafür, dass die Ergebnisse sich besser mit den Rechnungen aus dem letzten Abschnitt vergleichen lassen.

7.4.1 Breite

In Abbildung 7.5 wird die Breite, die man unter Verwendung von $\Lambda = 400$ MeV erhält, mit dem Ergebnis aus dem letzten Abschnitt verglichen ($\Lambda = 653$ MeV). Bei niedrigen Impulsen ist fast kein Unterschied zwischen den beiden Kurven zu erkennen. Die erhöhte Kopplung ist dort offensichtlich in der Lage, den Verlust an Phasenraum vollständig zu kompensieren.

Bei höheren Impulsen zeigt sich jedoch, dass das bekannte Minimum (bei negativen Energien) eine deutlich ausgeprägtere Form hat. Da hauptsächlich die rechte Seite des Minimums deformiert ist und die Veränderung bereits bei positiven Energien p_0 beginnt ($\approx 0,1$ GeV), ist dieser Effekt eindeutig dem Prozesspaar $q_q q_k \rightarrow q_p q_r$, $\bar{q}_p q_q q_k \rightarrow q_r$ zuzuschreiben, dessen Phasenraum sich bei $p_0 = -|\vec{p}|$ schließt.

Die Erklärung liegt in der Cutoff-Bedingung $r_0 < \Lambda$, die die Zahl der freien Endzustände nach oben begrenzt. Die Bedingung muss in den Integralen für $-i\Sigma^<$ erfüllt sein, damit der Integrand einen Beitrag zur Breite leistet. Wir entnehmen Abschnitt 6.4, dass für die beiden Prozesse $q_q q_k \rightarrow q_p q_r$, $\bar{q}_p q_q q_k \rightarrow q_r$ gilt:

$$0 < |\vec{q}| < \omega_F, \quad 0 < |\vec{k}| < \omega_F, \quad r_0 = |\vec{q}| + |\vec{k}| - p_0. \quad (7.2)$$

Das Phasenraumvolumen selbst ist bei der Integration über $|\vec{q}|$ und $|\vec{k}|$ also unabhängig von Λ . Je kleiner aber der Wert von Λ ist, desto schneller wird die Bedingung $\Lambda > r_0 = |\vec{q}| + |\vec{k}| - p_0$ verletzt und der Integrand trägt nichts mehr

⁵Im ersten Schritt beeinflussen die Antiquarks nur die Quarks oberhalb von $2\omega_F$, im nächsten Schritt wirken sich dann die veränderten Eigenschaften dieser Quarks auf den Bereich unterhalb $2\omega_F$ aus.

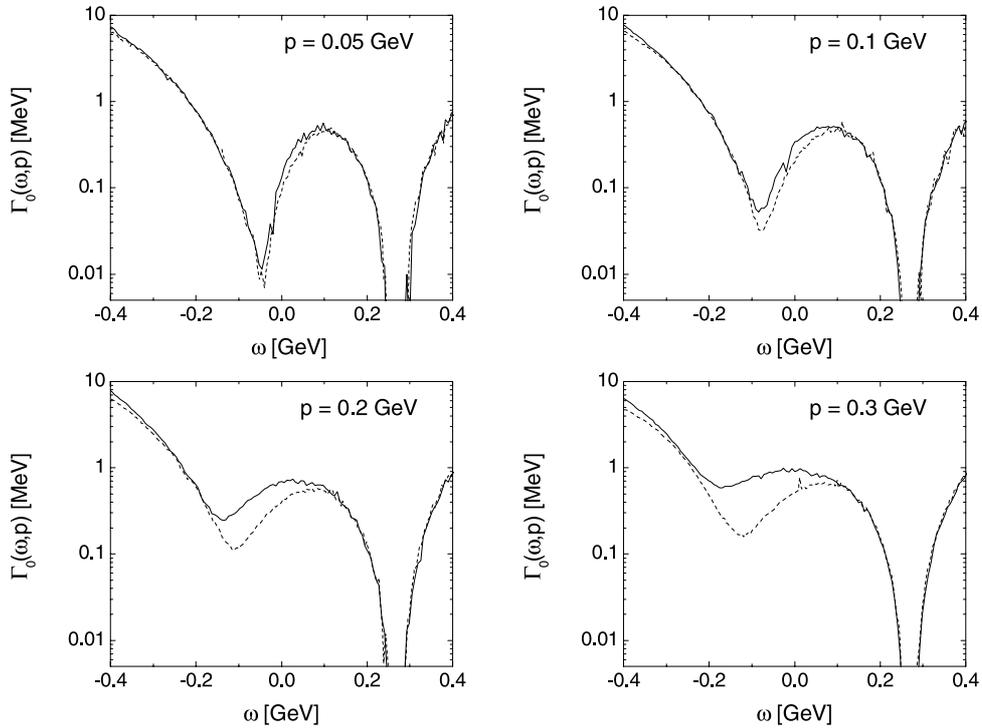


Abbildung 7.5: Die Breite unter Verwendung verschiedener Werte für den Cutoff-Parameter. Die durchgezogene Linie zeigt das Ergebnis für $\Lambda = 0.653$ GeV, die gestrichelte Linie ergibt sich für $\Lambda = 0.4$ GeV. Es gilt jeweils $G = 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$.

zur Breite bei. Die Grenze für dieses Abschneiden liegt bei $|\vec{q}| + |\vec{k}| = \Lambda + p_0$. Wir schätzen ab:

$$\Lambda + p_0 = |\vec{q}| + |\vec{k}| < 2\omega_F \quad \Rightarrow \quad p_0 < 2\omega_F - \Lambda.$$

Ab dieser Schwelle für p_0 kann nicht mehr das komplette Phasenraumvolumen zur Breite beitragen. Für $\omega_F = 0.268$ GeV und $\Lambda = 0,653$ GeV ergibt sich $p_0 < -0.12$ GeV, ein Wert der unterhalb des Bereiches liegt, in dem der beobachtete Effekt auftritt. Für $\Lambda = 0.4$ GeV dagegen liegt die Schwelle bei $p_0 < +0.136$ GeV. Das entspricht relativ genau dem Wert, ab dem die Kurven in Abbildung 7.5 voneinander abweichen.

Somit ist die Erklärung für die Deformation des Minimums gefunden. Es handelt sich auch dabei um einen Phasenraumeffekt. Das Besondere an diesem Effekt ist, dass sich der Cutoff bereits bei kleinen Werten für $|p_0|$ bemerkbar macht und nicht erst außerhalb des betrachteten Intervalls. Auch die Breite der besetzten Quarkzustände ist somit betroffen.

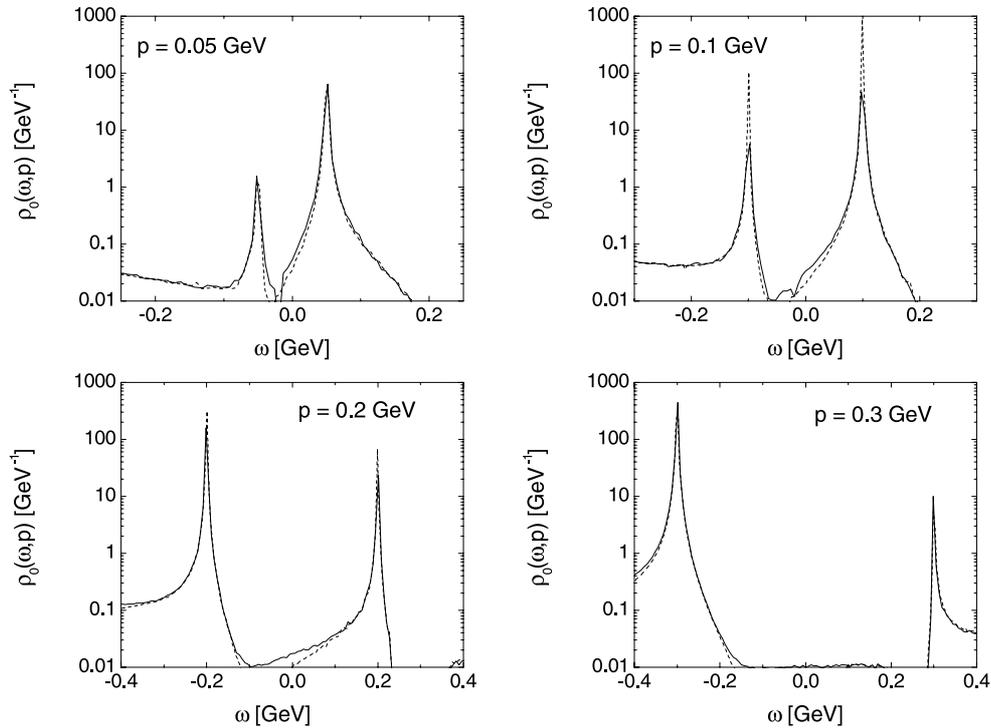


Abbildung 7.6: Die Quark-Spektralfunktion, berechnet mit verschiedenen Werten für Λ . Die durchgezogene Linie zeigt das Ergebnis für $\Lambda = 0.653$ GeV, die gestrichelte Linie ergibt sich für $\Lambda = 0.4$ GeV.

7.4.2 Spektralfunktion

Die Darstellung der Spektralfunktion in Abbildung 7.6 birgt keine Überraschungen. Die Form der Peaks ändert sich beim Übergang von $\Lambda = 653$ MeV zu $\Lambda = 400$ MeV kaum, wenn die Kopplung entsprechend angepasst wird ($G = 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$). Es ist lediglich ein Rückgang des Untergrunds bei kleinen $|p_0|$ zu beobachten.

Dieser Rückgang geht auf den Cutoff-Effekt in der Breite zurück, der im letzten Abschnitt diskutiert wurde. Die Breiten werden im Bereich $-0.2 \text{ GeV} < p_0 < 0.1 \text{ GeV}$ kleiner, wenn man den Wert von Λ reduziert. Das wirkt sich direkt auf die Spektralfunktion aus. Da der Effekt bei kleinen Impulsen $|\vec{p}|$ nicht so stark ausgeprägt ist wie bei großen Impulsen, zeigen sich keine wesentlichen Veränderungen in den Peaks, wenn sie zwischen -0.2 GeV und 0.1 GeV liegen.

Der Rückgang aber durchaus Konsequenzen für den Bereich der besetzten Quarkzustände bei Impulsen oberhalb des Fermi-Impulses. Eine genauere Darstellung findet sich in Abbildung 7.7. Es zeigt sich, dass die Spektralfunktion ein gut ausgeprägtes Maximum zwischen $p_0 = 0.1 \text{ GeV}$ und $p_0 = 0.2 \text{ GeV}$ besitzt. Dieses

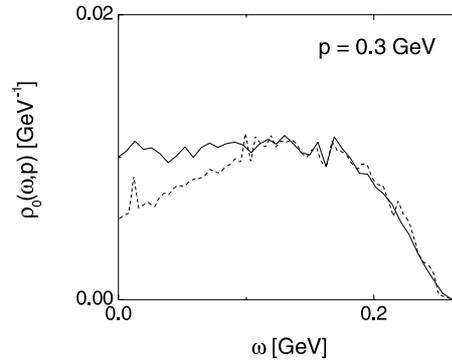


Abbildung 7.7: Die Spektralfunktion der besetzten Quarkzustände, berechnet mit verschiedenen Werten für Λ . Die durchgezogene Linie zeigt das Ergebnis für $\Lambda = 0.653$ GeV, die gestrichelte Linie ergibt sich für $\Lambda = 0.4$ GeV.

Maximum war nach der ersten Iteration auch für $\Lambda = 653$ MeV vorhanden, ist beim weiteren Iterieren aber verschwunden. Bei kleinen p_0 weichen die Ergebnisse für die verschiedenen Werte von Λ daher deutlich voneinander ab, bei größeren p_0 ist die Übereinstimmung dagegen sehr gut. Das entspricht genau dem bereits diskutierten Verhalten der Breite.

Wir kommen somit zu dem Schluss, dass die Spektralfunktion innerhalb gewisser Grenzen unempfindlich auf den Cutoff reagiert, wenn die Kopplung zwischen den Quarks entsprechend angepasst wird. Konsequenzen ergeben sich nur oberhalb des Fermi-Impulses für die Spektralfunktion der besetzten Zustände. Die dort beobachteten Abweichungen können durchaus zu Veränderungen in der noch zu diskutierenden Impulsverteilung führen.

7.5 Variation der Quark-Quark-Kopplung

Wir wenden uns nun dem zweiten Parameter zu, der Quark-Quark-Kopplungskonstanten G . Durch die Erhöhung des Wertes von G wird die Wechselwirkung zwischen den Quarks verstärkt. Es liegt auf der Hand, dass dann die Zerfallsbreite der Zustände größer werden muss. Je höher die Wahrscheinlichkeit ist, an einem Streuprozess teilzunehmen, desto geringer ist die Lebensdauer der einzelnen Zustände.

In unserem einfachen Modell tritt die Kopplungskonstante zunächst nur als konstanter Faktor bei der Berechnung der Selbstenergie in Erscheinung (vgl. (5.5), (5.6)). Im ersten Iterationsschritt sorgt der Wert von G daher lediglich für eine gleichmäßige Skalierung der Breite (bei fester Initialisierung).

Ab der zweiten Iteration besteht die Möglichkeit, dass auch weiter gehende Effekte in Erscheinung treten (Selbstkonsistenz). Der Wert von G ist dann in die Spektralfunktionen eingegangen, über die zur Bestimmung der Selbstenergien integriert wird. Es ergibt sich so ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Kopplungskonstante und Breite.

Durch Variation der Kopplungskonstanten besteht somit die Möglichkeit, die Selbstkonsistenz im Verlauf der Iterationen zu beobachten – unabhängig von der Breite, mit der die Rechnungen initialisiert werden.

Es werden im Folgenden die Ergebnisse von drei Rechnungen verglichen. Alle wurden mit einem Cutoff von $\Lambda = 653$ MeV durchgeführt. Die Kopplung betrug bei der ersten Rechnung $G = 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$, bei der zweiten Rechnung $G = 2 \cdot 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$ und bei der dritten Rechnung $G = 4 \cdot 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$. Da die Kopplung als Faktor quadratisch in die Breite eingeht, sollte sich die Breite bei der doppelt so großen Kopplung grob vervierfachen und bei der viermal so großen Kopplung sogar um einen Faktor sechzehn größer werden.

7.5.1 Breite

Wie bereits gewohnt, betrachten wir zuerst die Breite. Abbildung 7.8 zeigt die Ergebnisse für die normale, die doppelt und die viermal so große Kopplung. Es ist auf den ersten Blick zu erkennen, dass der Hauptunterschied zwischen den Ergebnissen für verschiedene Kopplungen in einem konstanten Faktor liegt. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass der Unterschied zwischen den verschiedenen Breiten, wie abgeschätzt, durch Faktoren 4 bzw. 16 gegeben ist. Dieses Ergebnis war bereits nach der ersten Iteration zu erwarten.

In der Nähe des Minimums sind aber auch feinere Unterschiede in der Form auszumachen, die auf die selbstkonsistente Rechnung zurückzuführen sind. Es zeigt sich in Abbildung 7.8 bei allen Impulsen, dass die Ausprägung des Minimums mit zunehmender Kopplung zurückgeht. Der Grund dafür liegt in der ansteigenden Breite der Zustände.

Die Bedingungen aus Kapitel 6, mit denen wir die Form der Breite vorhergesagt haben, wurden unter Verwendung der freien Spektralfunktion gewonnen. Die Einschränkungen gelten daher streng genommen nur für Teilchen mit infinitesimaler Breite. Je größer die tatsächliche Breite der Teilchen ist, mit der gerechnet wird, desto stärker weichen die Bedingungen auf. Das Ergebnis ist in Abbildung 7.8 zu erkennen. Mit anwachsender Kopplung steigt die Breite und die Einschränkung $p_0 > -|\vec{p}|$ kann immer stärker verletzt werden. Dadurch kommt es zu einer Ausschmierung des Minimums.

Besonders gut sind die Auswirkungen bei den kleinen Impulsen zu erkennen, da das Minimum dort besonders tief ist. Bereits ein kleiner Anstieg der Breite auf beiden Seiten bewirkt so einen gut sichtbaren Effekt.

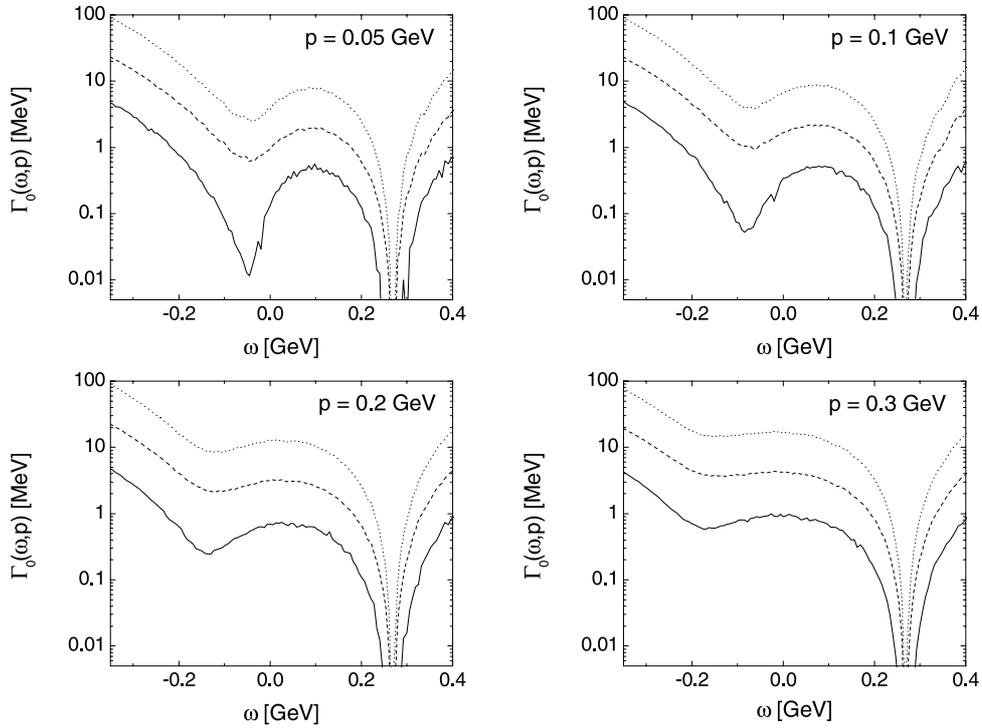


Abbildung 7.8: Die Breite für verschiedene Kopplungskonstanten G . Die durchgezogene Linie zeigt die Ergebnisse für die normale Kopplung ($G = 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$), die gestrichelte Linie wurde unter Verwendung einer doppelt so großen Kopplung gewonnen, die gepunktete Linie unter Verwendung einer viermal höheren Kopplung.

Für die größte Kopplung erhält man an den Rändern Breiten von bis zu 100 MeV, während im Bereich der besetzten Zustände nur Werte von 5 – 10 MeV auftreten. Das macht noch einmal die Konsequenzen des explosiven Anstiegs der Breite, der sich allein aus der Öffnung des Phasenraums ergibt, deutlich. Außerhalb des beobachteten Intervalls wird aber auch bei dieser Kopplung die Breite schließlich gegen null gehen.

7.5.2 Spektralfunktion

Die Spektralfunktion reagiert mit zwei Veränderungen auf die Vergrößerung der Kopplung, die in Abbildung 7.9 gut zu erkennen sind. Zum einen wird der Untergrund neben den Peaks deutlich größer, zum anderen nimmt die Breite der 'on-shell-peaks' deutlich zu. Beides ist direkt auf das quadratische Anwachsen der Zerfallsbreite zurückzuführen, das im letzten Abschnitt diskutiert wurde.

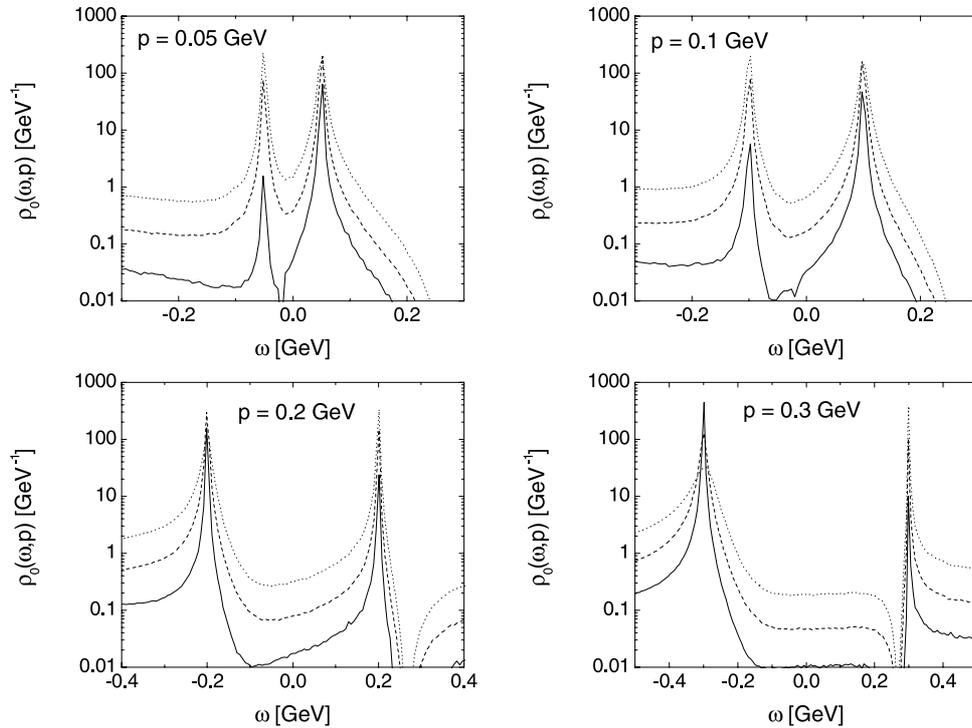


Abbildung 7.9: Die Quark-Spektralfunktion für verschiedene Kopplungskonstanten G . Die durchgezogene Linie zeigt die Ergebnisse für die normale Kopplung ($G = 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$), die gestrichelte Linie wurde unter Verwendung einer doppelt so großen Kopplung gewonnen, die gepunktete Linie unter Verwendung einer viermal höheren Kopplung.

Der Anstieg des Untergrundes ist natürlich für die besetzten Zustände bei Impulsen $|\vec{p}|$ oberhalb des Fermi-Impulses ($0 < p_0 < \omega_F$, $|\vec{p}| > p_F$) von besonderer Bedeutung. Da der 'on-shell-peak' der Quarks dann nicht mehr eingeschlossen wird, ist die Spektralfunktion allein durch den Untergrund gegeben. Abbildung 7.10 zeigt Schnitte bei zwei Impulsen.

Es zeigt sich das bereits bekannte Verhalten (Abschnitt 7.3). Für Impulse $|\vec{p}|$ knapp oberhalb des Fermi-Impulses ist die Spektralfunktion über einen großen Bereich annähernd konstant und zeigt höchstens einen schwachen Anstieg. In der Nähe der Fermi-Energie fällt sie dann rasch gegen null ab. Weit oberhalb des Fermi-Impulses existiert dagegen kein konstantes Plateau. Die Spektralfunktion nimmt weit geringere Werte an und fällt kontinuierlich ab.

Die Abhängigkeit vom Wert der Kopplungskonstanten ist deutlich zu erkennen. Die Spektralfunktion scheint auf ähnliche Weise zu skalieren wie die Breite. Bei der doppelt so großen Kopplung vervierfacht sich der Wert der Spektralfunktion,

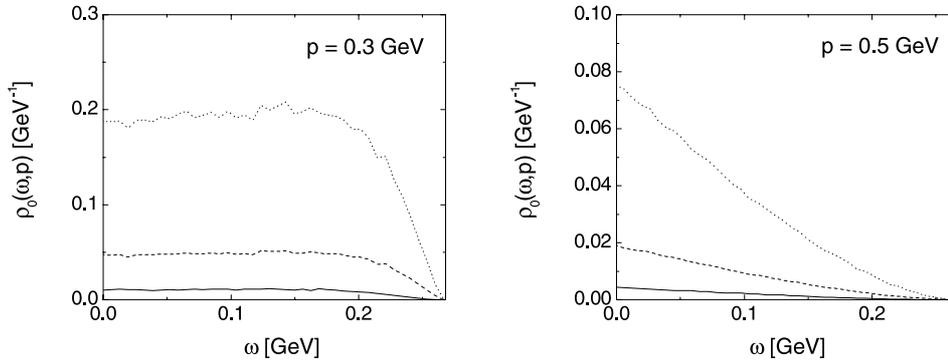


Abbildung 7.10: Die Spektralfunktion der besetzten Quarkzustände für verschiedene Kopplungskonstanten G . Die durchgezogene Linie zeigt die Ergebnisse für die normale Kopplung ($G = 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$), die gestrichelte Linie wurde unter Verwendung einer doppelt so großen Kopplung gewonnen, die gepunktete Linie unter Verwendung einer viermal höheren Kopplung.

bei der viermal höheren Kopplung ist die Spektralfunktion grob sechzehnmal größer. Die Form der Spektralfunktion wird dagegen kaum durch die Variation der Kopplungskonstanten beeinflusst. Die Besetzungswahrscheinlichkeit bei Impulsen $|\vec{p}|$ oberhalb des Fermi-Impulses nimmt somit bei steigender Kopplung drastisch zu. Dieser Effekt wird auch bei der Impulsverteilung, die im nächsten Abschnitt diskutiert wird, gut sichtbare Konsequenzen haben.

Dadurch, dass das Minimum der Breite im Antiquarksektor weniger stark ausgeprägt ist, wird die Spektralfunktion bei kleinen Impulsen symmetrischer. Bei größeren Impulsen bleibt die Verteilung allerdings unsymmetrisch, da die Fermi-Kante weiterhin den Quarkpeak beeinflusst.

Der Antiteilchenpeak hat im Falle der größten Kopplung bei $|\vec{p}| = 0.3$ GeV eine enorme Breite. Das liegt daran, dass der Peak bereits in dem Bereich liegt, in dem die Breite phasenraumbedingt stark ansteigt. Das Gleiche gilt bei allen Impulsen für den großen Untergrund an den Rändern.

7.6 Impulsverteilung

Zum Abschluss werfen wir noch einen Blick auf die Impulsverteilung. Bei den Nukleonen ließ sich ein markanter 'Hochimpulsschwanz' beobachten, der als Maß für den kurzreichweitigen Teil der Wechselwirkung aufgefasst wurde. Es soll nun untersucht werden, in welchem Maße es auch bei den Quarks durch Streuprozesse zu einer Besetzung von Zuständen oberhalb der Fermi-Kante kommt.

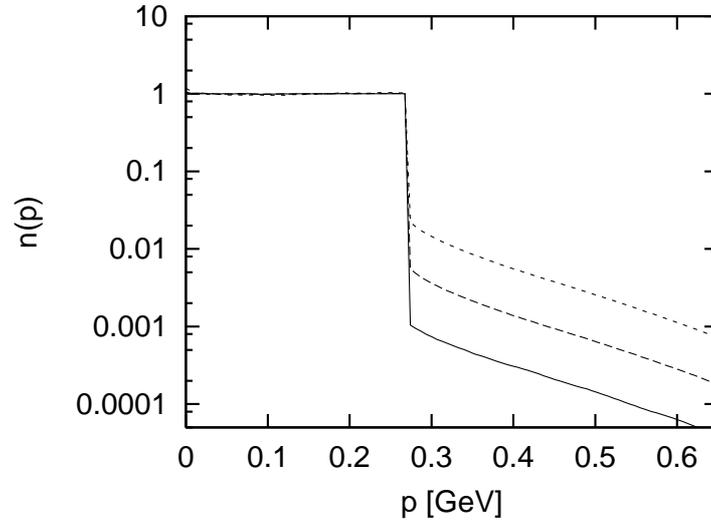


Abbildung 7.11: Die Impulsverteilung der Quarks bei verschiedenen Werten für die Kopplungskonstante G . Die durchgezogene Linie gibt das Ergebnis für den Standardwert $G = 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$ an, die gestrichelte Linie das Ergebnis für $G = 2 \cdot 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$ und die gepunktete Linie das Ergebnis für $G = 4 \cdot 2.14 \cdot \Lambda^{-2}$.

Da unser System keine Antiquarks enthält, interessieren wir uns hier nur für die Impulsverteilung der Quarks. $n(|\vec{p}|)$ ist daher gegeben durch (vgl. (3.4), (4.21)):

$$n(|\vec{p}|) = \int_0^{\omega_F} \frac{dp_0}{\pi} \rho_0(p_0, \vec{p}^2).$$

Die Vorfaktoren wurden hier so gewählt, dass $n(|\vec{p}|)$ auf eins normiert ist.

Abbildung 7.11 zeigt die Impulsverteilung der Quarks bei den verschiedenen Werten für die Kopplungskonstante, die bereits im letzten Abschnitt verwendet wurden. Es ist klar zu erkennen, dass der Einfluss der kurzreichweitigen Wechselwirkungen hier wesentlich geringer ausfällt als bei den Nukleonen. In Anbetracht der geringen Breiten und den damit verbundenen schmalen Peaks in der Spektralfunktion ist ein solches Ergebnis nicht überraschend.

Die Fermi-Kante ist deutlich als Stufe ausgeprägt, genau wie für ein unendlich ausgedehntes System zu erwarten. An diese Kante schließt sich der Hochimpulsschwanz an, für den wir uns interessieren. Für den Standardwert der Kopplung liegt dieser Schwanz nur in der Größenordnung von 0.1%. Bei einem doppelt so großen Wert für G gerät man bereits in die Region von 1%, aber erst eine viermal höhere Kopplung liefert einen Hochimpulsschwanz, der sich in der gleichen Größenordnung befindet wie der der Nukleonen (ca. 10%).

Die Wechselwirkung aus dem NJL-Modell ist offensichtlich nicht in der Lage, eine signifikante Besetzung von Zuständen oberhalb der Fermi-Kante zu beschreiben, wenn man mit den üblichen Werten für die Parameter Λ und G rechnet. Erst

wenn die Kopplungskonstante deutlich vergrößert wird, können Streuprozesse im Medium zur Bildung eines deutlich ausgeprägten Hochimpulsschwanzes führen. Ob es allerdings physikalisch sinnvoll ist, mit einer größeren Kopplung zu arbeiten, ist nicht klar. Es werden dann nämlich nicht mehr die richtigen Werte für die Größen reproduziert, über die die Parameter ursprünglich festgelegt wurden. Es besteht aber durchaus auch die Möglichkeit, dass sich G und Λ im Medium ändern.

Ein weiterer Punkt soll noch erwähnt werden. Bei der Impulsverteilung der Nukleonen war unterhalb der Fermi-Kante deutlich ein Anstieg der Verteilung zu erkennen, der sich durch die Verletzung der Analytizität erklären ließ. Auch im Modell für die Quarks verletzen wir die Analytizität, da der Realteil der retardierten Selbstenergie vernachlässigt wird. Die Impulsverteilung im betreffenden Bereich ist aber konstant. Nur bei genauer Betrachtung zeigt sich ein ganz leichter Anstieg beim größten Wert für die Kopplungskonstante.

Sofern die Argumentation, die für die Nukleonen gemacht wurde [Le00], auf Quarks übertragbar ist, bedeutet das, dass die Vernachlässigung des Realteils der Selbstenergie keinen großen Einfluss auf unsere Resultate hat. Die vorgenommene Vereinfachung wird somit durch die Ergebnisse noch einmal gerechtfertigt.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, ein einfaches Modell zu entwickeln, das die Berechnung der Spektralfunktion von Quarks in Quarkmaterie ermöglicht. Als Ausgangspunkt diente das Modell von Lehr et al. [Le00], das unter Verwendung einer einfachen Näherung für die Wechselwirkung ein selbstkonsistentes Verfahren zur iterativen Berechnung der Nukleon-Spektralfunktion liefert.

Das zweite Kapitel beschäftigte sich ausführlich mit den für unser Modell benötigten Größen und den Zusammenhängen, die zwischen diesen Größen bestehen. Es stellte sich heraus, dass die Beziehungen zwischen Spektralfunktion, Korrelationsfunktionen, Selbstenergien und Zerfallsbreite einen geschlossenen Kreis bilden. Durch die Verwendung der vollen Greensfunktionen in den Integralen für die Selbstenergien ergab sich so ein selbstkonsistenter Ansatz zur Berechnung der Spektralfunktion.

Im dritten Kapitel wurde das Modell von Lehr et al. [Le00] detailliert vorgestellt. Es verwendet den selbstkonsistenten Ansatz aus dem ersten Kapitel, um damit iterativ die Nukleon-Spektralfunktion in Kernmaterie zu bestimmen. Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wird in diesem Modell durch eine einfache Punktwechselwirkung mit konstanter Kopplung beschrieben, der Realteil der retardierten Selbstenergie wird durch einen konstanten Wert ersetzt.

Die Ergebnisse, die das Modell liefert, befinden sich trotz dieser Näherungen in guter Übereinstimmung mit 'state-of-the-art'-Rechnungen aus der Vielteilchentheorie. Daraus ließen sich zwei Dinge schließen. Zum einen scheint die Form der Wechselwirkung nur eine untergeordnete Rolle zu spielen, wenn die Rechnungen vollständig selbstkonsistent durchgeführt werden. Zum anderen zeigt die gute Übereinstimmung der Ergebnisse, dass Spektralfunktion und Impulsverteilung der Nukleonen in Kernmaterie von Phasenraumeffekten bestimmt werden.

Unter der Annahme, dass auch bei der Berechnung der Quark-Spektralfunktion die selbstkonsistente Rechnung wichtiger ist als eine komplizierte Wechselwirkung, begann im vierten Kapitel die entsprechende Erweiterung des Lehrschen

Modells. Es wurde gezeigt, dass die relativistische Spektralfunktion eine Spinorstruktur besitzen muss und welche Komponenten dieser Struktur von besonderer Bedeutung sind. Anschließend erfolgte die Vorstellung des $SU(2)$ -NJL-Modells, mit dem die Wechselwirkungen zwischen den Quarks beschrieben werden sollen. Genau wie im ursprünglichen Modell erhält man so eine Punktwechselwirkung mit konstanter Kopplung. Abschließend wurde gezeigt, wie Antiquarks in den Rechnungen zu berücksichtigen sind.

In Kapitel 5 wurde das Modell für die Quarks zusammengesetzt. Von Anfang an erfolgte dabei die Beschränkung auf die chiral restaurierte Phase mit praktisch masselosen Quarks, zusätzlich wurde der Realteil der retardierten Selbstenergie vernachlässigt. Das Modell besitzt zwei freie Parameter, die Quark-Quark-Kopplungskonstante G und den Impulscutoff Λ . Welche Werte für diese Größen zu wählen sind, ergibt sich aus dem Zusammenhang mit dem NJL-Modell.

Die Ergebnisse der Rechnungen mit dem Modell sollten vor allem die Eigenschaften des Phasenraums wiedergeben. Kapitel 6 beschäftigte sich daher mit der Frage, welche Vorhersagen über die Zerfallsbreite eine Betrachtung des verfügbaren Phasenraums (für die auftretenden Streuprozesse) macht. Diese Betrachtungen wurden bei Temperatur Null für Teilchen mit infinitesimaler Breite durchgeführt. Die Aussagen aus diesem Kapitel gelten daher nicht streng für die tatsächlich berechneten Breiten.

Die Präsentation der Ergebnisse der numerischen Rechnung folgte schließlich in Kapitel 7. Es bestätigte sich, dass die Eigenschaften der Spektralfunktion im vorgestellten Modell vollständig durch Phasenraumeffekte zu erklären sind. Unter Verwendung der Standardwerte für Λ und G zeigte sich, dass man relativ geringe Breiten in der Größenordnung von $0.1 - 1$ MeV erhält. Die Spektralfunktion wird daher von den 'on-shell-peaks' der Quarks und Antiquarks dominiert und man findet in der Impulsverteilung nur eine schwache Besetzung von Zuständen oberhalb der Fermi-Kante. Erst wenn die Kopplungskonstante deutlich erhöht wird, ergibt sich ein 'Hochimpulsschwanz' in der Impulsverteilung, der mit dem der Nukleonen vergleichbar ist. Die Breiten liegen dann bei $5 - 10$ MeV.

Diese Arbeit hat gezeigt, dass die selbstkonsistente Berechnung der Quark-Spektralfunktion numerisch zwar sehr aufwändig ist, sich aber trotzdem durchführen lässt. Für zukünftige Verbesserungen des Modells bleibt viel Raum:

In der vorgestellten Form ist das Modell auf die chiral restaurierte Phase mit praktisch masselosen Quarks beschränkt. Durch die Berücksichtigung des skalaren Terms in der Spektralfunktion ließe sich diese Beschränkung aufheben. Es wäre dann möglich, auch mit massiven Quarks zu arbeiten.

Der Realteil der retardierten Selbstenergie wird bisher vernachlässigt. Im Prinzip ist bekannt, wie er aus der Breite berechnet wird. Es sollte sich daher ein Weg finden lassen, wie man ihn in den Rechnungen berücksichtigen kann.

Die Quark-Quark-Wechselwirkung wird im Moment durch das einfache NJL-Modell beschrieben. Es wäre interessant, stattdessen eine etwas realistischere, auf dem Instanton-Modell basierende Wechselwirkung zu verwenden (vgl. z.B. [Sch98]).

Das Modell ist bereits jetzt in der Lage, bei endlichen Temperaturen zu arbeiten. Die Beschränkung der Rechnungen auf Temperatur Null erfolgte nur aus numerischen Gründen. In naher Zukunft dürften daher auch Rechnungen bei endlicher Temperatur folgen.

Aus den beschriebenen Veränderungen sollte sich ein realistischeres Modell ergeben, das einen größeren Anwendungsbereich besitzt. Wie bereits in der Arbeit diskutiert wurde, sind die meisten der beschriebenen Punkte mit einer deutlichen Erhöhung des numerischen Aufwandes verbunden. Es wird sich daher zeigen müssen, wo der Aufwand lohnt und wo weiterhin Kompromisse nötig sein werden.

Anhang A

Notation und Konventionen

Notation und Konventionen in dieser Arbeit richten sich im Wesentlichen nach dem Buch von Peskin und Schroeder [PS]. Dieser Anhang soll einen kurzen Überblick geben und als Referenz dienen.

Es wird mit natürlichen Einheiten gearbeitet, d.h. $\hbar = c = 1$.

In diesem System gilt für die Einheiten:

$$[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = [\text{Energie}]^{-1} = [\text{Masse}]^{-1}.$$

Metrik und Vierervektoren

Der verwendete metrische Tensor hat die Form ('west coast metric'):

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Vierervektoren werden durch kursive Buchstaben dargestellt (x), Dreiervektoren werden durch einen Pfeil gekennzeichnet (\vec{x}). Den zu einem Dreiervektor \vec{x} gehörigen Einheitsvektor bezeichnen wir als \vec{e}_x .

Wir unterscheiden Vierervektoren mit oberen Indizes (kontravariant) und Vierervektoren mit unteren Indizes (kovariant):

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, \vec{x}) && (\text{kontravariant}) \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\vec{x}) && (\text{kovariant}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention, über doppelt auftretende Indizes ist also zu summieren. Griechische Indizes bezeichnen Vierervektoren und laufen von 0 bis 3. Lateinische Indizes beziehen sich nur auf die Dreiervektorkomponenten und laufen von 1 bis 3.

Das Viererskalarprodukt ist wie folgt definiert:

$$x \cdot p = g_{\mu\nu} x^\mu p^\nu = x^0 p^0 - \vec{x} \cdot \vec{p}. \quad (\text{A.3})$$

Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen sind gegeben durch:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Es gelten die (Anti-)Vertauschungsrelationen

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad \text{und} \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (\text{A.5})$$

mit dem vollständig antisymmetrischen Tensor ϵ^{ijk} .

Daraus lässt sich eine nützliche Beziehung ableiten:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k. \quad (\text{A.6})$$

Fourier-Transformationen

Die Faktoren 2π werden immer dem Impulsintegral zugeschrieben. In vier Dimensionen heißt das:

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{f}(k) \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{f}(k) = \int d^4 x e^{ik \cdot x} f(x) \quad (\text{A.8})$$

Die Tilde über der Funktion im Impulsraum $\tilde{f}(k)$ wird üblicherweise weggelassen, wenn kein Anlass zu Verwechslungen besteht.

Es gilt:

$$\int d^4 x e^{ik \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^4(k). \quad (\text{A.9})$$

Dirac-Matrizen

Die Dirac-Matrizen γ^μ genügen den Anti-Vertauschungsrelationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4}. \quad (\text{A.10})$$

Zwei häufig auftretende Kombinationen erhalten eigene Bezeichnungen:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \quad (\text{A.12})$$

γ^5 hat die folgenden Eigenschaften:

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (\text{A.13})$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (\text{A.14})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Falls eine explizite Darstellung der γ -Matrizen benötigt wird, greifen wir auf die so genannte chirale Representation zurück. In 2×2 -Blockform ist diese gegeben durch:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Spuren von γ -Matrizen

Zum Abschluss geben wir noch einige nützliche Spurrelationen für die γ -Matrizen an:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{1}_{4 \times 4}) &= 4 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{A.16}) \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma^5) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Die Spur einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen verschwindet.

Anhang B

Parität, Zeitumkehr und chirale Symmetrie

In diesem Kapitel soll ermittelt werden, wie sich die relativistische Spektralfunktion unter Paritäts- und Zeitumkehrtransformationen verhält. Zusätzlich werden die Auswirkungen einer chiralen Symmetrietransformation untersucht. Diese Informationen werden benötigt, um die Lorentzstruktur der Spektralfunktion, sowie von Selbstenergie und Breite zu bestimmen.

Unser Ausgangspunkt ist die Definition der Spektralfunktion:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) = i[g_{\alpha\beta}^>(p) - g_{\alpha\beta}^<(p)].$$

Mit Hilfe einer Fourier-Transformation können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) &= i \int d^4x e^{ip \cdot x} [g_{\alpha\beta}^>(x) - g_{\alpha\beta}^<(x)] \\ &= \int d^4x e^{ip \cdot x} [\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle + \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle]. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Dieser Ausdruck sagt uns zwar nichts über die Lorentzstruktur von \mathcal{A} , er gibt aber Aufschluss über das Verhalten der Spektralfunktion unter den angegebenen Symmetrietransformationen.

B.1 Parität

Die Paritätstransformation P entspricht einer Raumpiegelung $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$, ein rechtshändiges System wird dabei in ein linkshändiges umgewandelt und umgekehrt. Somit wird der Impuls eines Teilchens umgeklappt, ohne seinen Spin zu ändern. Der Paritätsoperator P ist ein unitärer Operator.

Wir betrachten nun das Verhalten der Spektralfunktion unter der Paritätstransformation:

$$\begin{aligned}
P\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)P &= P \int d^4x e^{ip\cdot x} [\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle + \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle] P \\
&= \int dx_0 \int_{+\infty}^{-\infty} d^3(-x) e^{i(p_0 x_0 - (-\vec{p}) \cdot (-\vec{x}))} \\
&\quad \times [P \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle P + P \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle P] \\
&= \int dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x e^{i(p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\
&\quad \times [P \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle P + P \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle P]
\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation hat also keinen Einfluss auf die Parität,

$$P\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)P = \int d^4x e^{ip\cdot x} [P \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle P + P \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle P]. \quad (\text{B.2})$$

Da sich das Medium im Gleichgewicht befindet und isotrop ist, gehen wir davon aus, dass die Parität durch das Medium nicht verletzt wird. Das bedeutet:

$$\begin{aligned}
P \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle P &\stackrel{(2.5)}{=} P \frac{\text{Tre}^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \hat{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0)}{\text{Tre}^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}} P \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_n P \langle n | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) | n \rangle e^{-\beta(E_n - \mu N)} P \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_n P \langle n | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) | n \rangle P e^{-\beta(E_n - \mu N)} \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_n \langle n | P \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) P | n \rangle e^{-\beta(E_n - \mu N)} \\
&= \langle P \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) P \rangle \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

Das Verhalten der Spektralfunktion unter der Paritätstransformation ist somit bestimmt durch das Transformationsverhalten von ψ und $\bar{\psi}$:

$$P\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)P = \int d^4x e^{ip\cdot x} [\langle P \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) P \rangle + \langle P \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) P \rangle]. \quad (\text{B.4})$$

Gemäß [PS] gilt:

$$\begin{aligned}
P\psi(x_0, \vec{x})P &= \eta_a \gamma^0 \psi(x_0, -\vec{x}) \\
P\bar{\psi}(x_0, \vec{x})P &= \eta_a^* \bar{\psi}(x_0, -\vec{x}) \gamma_0
\end{aligned}$$

mit $\eta_a \eta_a^* = 1$. Unter Ausnutzung der Unitarität von P , d.h. $PP = 1$ finden wir:

$$\begin{aligned} P\psi_\alpha(x_0, \vec{x})\bar{\psi}_\beta(0, 0)P &= P\psi_\alpha(x_0, \vec{x})PP\bar{\psi}_\beta(0, 0)P \\ &= \gamma_{\alpha\sigma}^0 \psi_\sigma(x_0, -\vec{x})\bar{\psi}_\rho(0, 0)\gamma_{\rho\beta}^0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

und

$$\begin{aligned} P\bar{\psi}_\beta(0, 0)\psi_\alpha(x_0, \vec{x})P &= P\bar{\psi}_\beta(0, 0)PP\psi_\alpha(x_0, \vec{x})P \\ &= \gamma_{\alpha\sigma}^0 \bar{\psi}_\rho(0, 0)\psi_\sigma(x_0, -\vec{x})\gamma_{\rho\beta}^0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Wir setzen diese Ausdrücke nun in (B.4) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} P\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)P &= \int d^4x e^{ip \cdot x} \gamma_{\alpha\sigma}^0 [\langle \psi_\sigma(x_0, -\vec{x})\bar{\psi}_\rho(0, 0) \rangle \\ &\quad + \langle \bar{\psi}_\rho(0, 0)\psi_\sigma(x_0, -\vec{x}) \rangle] \gamma_{\rho\beta}^0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Mit der Substitution $\vec{x}' = -\vec{x}$, $x'_0 = x_0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} P\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)P &= \gamma_{\alpha\sigma}^0 \int d^4x' e^{i(p_0 x_0 + \vec{p} \cdot \vec{x}')} [\langle \psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\rho(0) \rangle \\ &\quad + \langle \bar{\psi}_\rho(0)\psi_\sigma(x') \rangle] \gamma_{\rho\beta}^0. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Wie der Vergleich mit (B.1) zeigt, entspricht das gerade:

$$P\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)P = \gamma_{\alpha\sigma}^0 \mathcal{A}_{\sigma\rho}(p_0, -\vec{p})\gamma_{\rho\beta}^0. \quad (\text{B.9})$$

Diese Gleichung sagt uns, wie sich die Spektralfunktion unter der Paritätstransformation verhält. Jeder Ansatz, den wir für die Spektralfunktion machen, muss diese Relation erfüllen.

B.2 Zeitumkehr

Wir wollen nun für die Zeitumkehrtransformation T einen analogen Ausdruck zu (B.9) bestimmen. Bei der Zeitumkehr soll gelten $(t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x})$ und gleichzeitig $(\omega, \vec{p}) \rightarrow (\omega, -\vec{p})$. Diese Operation ist nur dann durch einen unitären Operator $T \equiv u(T)$ realisierbar, wenn dieser nicht nur auf Operatoren, sondern auch auf komplexe Zahlen wirkt:

$$(\text{komplexe Zahl})T = T(\text{komplexe Zahl})^*$$

Wir starten wieder bei (B.1) und betrachten diesmal den Einfluss einer Zeitumkehrtransformation:

$$\begin{aligned}
T\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)T &= T \int d^4x e^{ip\cdot x} [\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle + \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle] T \\
&= \int_{+\infty}^{-\infty} d(-x_0) \int d^3x e^{(-i)p_0(-x_0) - (-i)(-\vec{p})\cdot\vec{x}} \\
&\quad \times [T \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle T + T \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle T] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int d^3x e^{i(p_0x_0 - \vec{p}\cdot\vec{x})} \\
&\quad \times [T \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle T + T \langle \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) \rangle T].
\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation beeinflusst also auch das Verhalten unter Zeitumkehr nicht. Wie bei der Parität machen wir nun die Annahme, dass das Medium invariant unter Zeitumkehr ist, solange es sich im Gleichgewicht befindet¹. Wir müssen allerdings berücksichtigen, dass der Zeitordnungsoperator auch auf komplexe Zahlen wirkt:

$$T \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \rangle T = \langle T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) T \rangle^*$$

Es sind daher wieder die Eigenschaften von ψ und $\bar{\psi}$, die das Verhalten der Spektralfunktion bei der Zeitumkehrtransformation bestimmen:

$$T\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)T = \int d^4x e^{ip\cdot x} [\langle T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) T \rangle^* + \langle T \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) T \rangle^*]. \quad (\text{B.10})$$

Wir entnehmen [PS]:

$$\begin{aligned}
T\psi(x_0, \vec{x})T &= (-\gamma^1 \gamma^3) \psi(-x_0, \vec{x}) \\
T\bar{\psi}(x_0, \vec{x})T &= \bar{\psi}(-x_0, \vec{x}) (\gamma_1 \gamma^3).
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Unitarität von T erhalten wir:

$$\begin{aligned}
T\psi_\alpha(x_0, \vec{x}) \bar{\psi}_\beta(0, 0) T &= T\psi_\alpha(x_0, \vec{x}) T T \bar{\psi}_\beta(0, 0) T \\
&= (-\gamma_{\alpha\sigma}^1 \gamma_{\sigma\rho}^3) \psi_\rho(-x_0, \vec{x}) \bar{\psi}_\mu(0, 0) (\gamma_{\mu\nu}^1 \gamma_{\nu\beta}^3) \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
T\bar{\psi}_\beta(0, 0) \psi_\alpha(x_0, \vec{x}) T &= T\bar{\psi}_\beta(0, 0) T T \psi_\alpha(x_0, \vec{x}) T \\
&= (-\gamma_{\alpha\sigma}^1 \gamma_{\sigma\rho}^3) \psi_\rho(-x_0, \vec{x}) \bar{\psi}_\mu(0, 0) (\gamma_{\mu\nu}^1 \gamma_{\nu\beta}^3). \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

¹Für ein System im Nichtgleichgewicht ist diese Annahme sicherlich falsch, da sich dann die Entwicklung des Systems vorwärts in der Zeit von der Entwicklung in umgekehrter Zeitrichtung unterscheidet.

Einsetzen der Ausdrücke in (B.10) liefert:

$$\begin{aligned}
 T\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)T &= \int d^4x e^{ip\cdot x} (-\gamma_{\alpha\sigma}^1 \gamma_{\sigma\rho}^3) [\langle \psi_\rho(-x_0, \vec{x}) \bar{\psi}_\mu(0, 0) \rangle^* \\
 &\quad + \langle \bar{\psi}_\mu(0, 0) \psi_\rho(-x_0, \vec{x}) \rangle^*] (\gamma_{\mu\nu}^1 \gamma_{\nu\beta}^3). \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

Wir substituieren diesmal gerade umgekehrt, $x'_0 = -x_0$, $\vec{x}' = \vec{x}$:

$$\begin{aligned}
 T\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)T &= (-\gamma_{\alpha\sigma}^1 \gamma_{\sigma\rho}^3) \int d^4x e^{-i(p_0 x'_0 + \vec{p}\cdot\vec{x}')} [\langle \psi_\rho(x') \bar{\psi}_\mu(0) \rangle^* \\
 &\quad + \langle \bar{\psi}_\mu(0) \psi_\rho(x') \rangle^*] (\gamma_{\mu\nu}^1 \gamma_{\nu\beta}^3). \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

Man kann nun das komplette Integral als komplex konjugierten Ausdruck schreiben:

$$\begin{aligned}
 T\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)T &= \left\{ \int d^4x e^{i(p_0 x'_0 + \vec{p}\cdot\vec{x}')} [\langle \psi_\rho(x') \bar{\psi}_\mu(0) \rangle + \langle \bar{\psi}_\mu(0) \psi_\rho(x') \rangle] \right\}^* \\
 &\quad \times (-\gamma_{\alpha\sigma}^1 \gamma_{\sigma\rho}^3) (\gamma_{\mu\nu}^1 \gamma_{\nu\beta}^3). \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

Wir vergleichen den Ausdruck in den geschweiften Klammern mit (B.1). Analog zu (B.8) erhalten wir die gesuchte Regel für die Zeitumkehrtransformation:

$$T\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p)T = (-\gamma_{\alpha\sigma}^1 \gamma_{\sigma\rho}^3) \mathcal{A}_{\rho\mu}^*(p_0, -\vec{p}) (\gamma_{\mu\nu}^1 \gamma_{\nu\beta}^3). \tag{B.16}$$

Genau wie (B.9) muss diese Vorschrift von jedem Ansatz, den wir für die Spektralfunktion machen, erfüllt werden.

B.3 Chirale Symmetrie

Es soll nun das Verhalten der Spektralfunktion unter chiralen Symmetrietransformationen untersucht werden. Dazu betrachten wir die Feldoperatoren ψ und $\bar{\psi}$, die in Form der Produkte $\psi_\alpha \bar{\psi}_\beta$ und $\bar{\psi}_\beta \psi_\alpha$ in der Spektralfunktion auftreten. Wie bereits bei Parität und Zeitumkehr ergibt sich das Transformationsverhalten der Spektralfunktion direkt aus dem Transformationsverhalten der Felder. Da unser Modell mit zwei Flavorfreiheitsgraden arbeitet, müssen wir die chirale Symmetriegruppe $SU_L(2) \otimes SU_R(2) = SU_V(2) \otimes SU_A(2)$ betrachten.

Es ist leicht zu zeigen, dass $\psi\bar{\psi}$ (bzw. $\bar{\psi}\psi$) invariant unter der Symmetrie $SU_V(2)$ ist. Die zu dieser Gruppe gehörende Symmetrietransformation hat die Form:

$$\psi \rightarrow e^{-i\vec{\epsilon}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}} \psi \tag{B.17}$$

mit dem konstanten Iovektor $\vec{\epsilon}$ und den Isospin-Pauli-Matrizen τ_i .

Für eine infinitesimale Transformation gilt:

$$\psi_\alpha \rightarrow (1 - i\vec{\epsilon} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2})\psi_\alpha \quad (\text{B.18})$$

und daraus folgend:

$$\bar{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^\dagger \gamma_0 \rightarrow \psi_\alpha^\dagger (1 + i\vec{\epsilon} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}) \gamma_0 = \bar{\psi}_\alpha (1 + i\vec{\epsilon} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}). \quad (\text{B.19})$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\beta \psi_\alpha &\rightarrow \bar{\psi}_\beta (1 + i\vec{\epsilon} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}) (1 - i\vec{\epsilon} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}) \psi_\alpha = \bar{\psi}_\beta \psi_\alpha \\ \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta &\rightarrow (1 - i\vec{\epsilon} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}) \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta (1 + i\vec{\epsilon} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}) = \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta. \end{aligned}$$

Terme $\sim (\vec{\epsilon})^2$ können hier vernachlässigt werden, da eine infinitesimale Transformation betrachtet wird. Da die Feldoperatoren im Flavorraum diagonalen (Einheits-)Matrizen entsprechen, vertauschen sie in der zweiten Zeile mit den Pauli-Matrizen.

$\psi\bar{\psi}$ und $\bar{\psi}\psi$ sind also wie behauptet invariant unter der Symmetrie $SU_V(2)$. Für die $SU_A(2)$ Symmetrie trifft diese Aussage nicht zu, wie wir gleich sehen werden.

Die zur Gruppe $SU_A(2)$ gehörende Transformation ist gegeben durch:

$$\psi \rightarrow e^{-i\gamma^5 \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} \psi, \quad (\text{B.20})$$

sie wirkt aufgrund der γ^5 -Matrix auch auf die Spinorstruktur von ψ und $\bar{\psi}$.

Für eine infinitesimale Transformation ergibt sich:

$$\psi_\alpha \rightarrow (1 - i\gamma_{\alpha\sigma}^5 \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}) \psi_\sigma. \quad (\text{B.21})$$

Beim Übergang zu $\bar{\psi}$ ist Vorsicht geboten. Zunächst folgt unter Verwendung von $(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5$ aus (B.20):

$$\psi_\alpha^\dagger \rightarrow \psi_\sigma^\dagger (1 + i\gamma_{\sigma\alpha}^5 \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}).$$

Daraus ergibt sich die Transformationsregel für $\bar{\psi}$, wenn beide Seiten von rechts mit γ_0 multipliziert werden:

$$\bar{\psi}_\alpha \rightarrow \psi_\sigma^\dagger (1 + i\gamma_{\sigma\rho}^5 \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}) \gamma_{\rho\alpha}^0 = \bar{\psi}_\sigma (1 - i\gamma_{\sigma\alpha}^5 \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}). \quad (\text{B.22})$$

Es wurde die Anti-Vertauschungsrelation $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ verwendet. Dadurch ist im letzten Schritt in der Klammer aus dem '+' ein '-' geworden.

Mit Hilfe von (B.21) und (B.22) können wir nun das Transformationsverhalten von $\psi\bar{\psi}$ und $\bar{\psi}\psi$ angeben. Dabei wird wieder ausgenutzt, dass die Pauli-Matrizen mit den Feldoperatoren vertauschen und dass Terme $\sim (\vec{\eta})^2$ vernachlässigt werden können:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_\beta\psi_\alpha &\rightarrow \bar{\psi}_\rho(1 - i\gamma_{\rho\beta}^5\vec{\eta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2})(1 - i\gamma_{\alpha\sigma}^5\vec{\eta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2})\psi_\sigma \\ &= \bar{\psi}_\beta\psi_\alpha - i[\bar{\psi}_\rho\psi_\alpha\gamma_{\rho\beta}^5 + \gamma_{\alpha\sigma}^5\bar{\psi}_\beta\psi_\sigma]\vec{\eta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\end{aligned}\quad (\text{B.23})$$

und

$$\begin{aligned}\psi_\alpha\bar{\psi}_\beta &\rightarrow (1 - i\gamma_{\alpha\sigma}^5\vec{\eta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2})\psi_\sigma\bar{\psi}_\rho(1 - i\gamma_{\rho\beta}^5\vec{\eta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}) \\ &= \psi_\alpha\bar{\psi}_\beta - i[\gamma_{\alpha\sigma}^5\psi_\sigma\bar{\psi}_\beta + \psi_\alpha\bar{\psi}_\rho\gamma_{\rho\beta}^5]\vec{\eta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}.\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

An den Ausdrücken (B.23) und (B.24) lässt sich nun direkt das Verhalten der Spektralfunktion unter einer chiralen Symmetrietransformation ablesen. Der Vergleich mit (B.1) zeigt:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) \rightarrow \mathcal{A}_{\alpha\beta}(p) - i[\gamma_{\alpha\sigma}^5\mathcal{A}_{\sigma\beta} + \mathcal{A}_{\alpha\rho}\gamma_{\rho\beta}^5]\vec{\eta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}.\quad (\text{B.25})$$

Die Spektralfunktion ist also genau dann invariant unter der chiralen Symmetrie $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$, wenn der Term in den eckigen Klammern verschwindet. Diese Bedingung entspricht gerade der Anti-Vertauschungsrelation

$$\{\mathcal{A}^{\text{chiral}}(p), \gamma^5\} = 0.\quad (\text{B.26})$$

Anhang C

Störungstheorie im thermodynamischen Gleichgewicht

Es ist unser Ziel, für ein wechselwirkendes System, das sich bei einer endlichen Temperatur im Gleichgewicht befindet, eine Greensfunktion zu finden, die eine einfache Störungsentwicklung in Form von Feynman-Regeln besitzt. Dazu werden wir den Umweg über Systeme im Nichtgleichgewicht gehen. Zunächst ist es jedoch sinnvoll, die Entwicklung des Erwartungswertes eines Operators im Grundzustand zu betrachten [PS, BD]. Dabei wird klar werden, warum man Systeme im Nichtgleichgewicht nicht mit dem gleichen Ansatz behandeln kann. Es wird sich aber auch zeigen, welche Modifikationen nötig sind, um beliebige Zustände beschreiben zu können. Der Einfachheit halber verwenden wir wieder den nichtrelativistischen Hamilton-Operator aus dem zweiten Kapitel (2.7).

C.1 Störungsentwicklung im Grundzustand

Wir betrachten den Erwartungswert eines Operators mit einem Zeitargument, $\langle \hat{O}_H(t) \rangle$, in der Heisenbergdarstellung. Den Operator \hat{O}_H können wir in folgender Form entwickeln:

$$\hat{O}_H(t) = U(t_0, t) \hat{O}_I(t) U(t, t_0). \quad (\text{C.1})$$

Bei O_I handelt es sich um den Operator in der Wechselwirkungsdarstellung, U ist der Zeitentwicklungsoperator in der Wechselwirkungsdarstellung. Für $t > t_0$ gilt:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} T^c \left[\int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n H_I^I(t_1) \cdots H_I^I(t_n) \right] \\ &= T^c \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I^I(t') \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

122 Anhang C. Störungstheorie im thermodynamischen Gleichgewicht

mit dem Wechselwirkungs-Hamiltonoperator in der Wechselwirkungsdarstellung $H_I^I(t)$. Ebenfalls für $t > t_0$ gilt:

$$U(t_0, t) = T^a \left[\exp \left(-i \int_t^{t_0} dt' H_I^I(t') \right) \right]. \quad (\text{C.3})$$

T^a ist hier der antichronologische Zeitordnungsoperator. Verglichen mit T^c ordnet dieser die Operatoren gerade in der umgekehrten Reihenfolge, die Operatoren mit dem kleinsten Zeitargument landen ganz links. Die Vorzeichenkonvention ist die gleiche wie bei T^c .

Wir nehmen nun an, dass die Wechselwirkung adiabatisch ein- und ausgeschaltet wird:

$$H_I^I(t) \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (H_I^I(t) \exp(-\epsilon|t|)). \quad (\text{C.4})$$

Dann befindet sich das System in der fernen Vergangenheit $t \rightarrow -\infty$ im nichtwechselwirkenden Grundzustand $|\Phi\rangle$. Der wechselwirkende Grundzustand $|\Psi\rangle$ ergibt sich aus dem nichtwechselwirkenden gemäß dem Gell-Mann-Low-Theorem:

$$|\Psi\rangle = U(0, -\infty)|\Phi\rangle. \quad (\text{C.5})$$

Für den Erwartungswert des Operators $\hat{O}_H(t)$ im wechselwirkenden Grundzustand erhalten wir daher:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{O}_H(t) | \Psi \rangle &\stackrel{(\text{C.5})}{=} \langle \Phi | U(-\infty, 0) \hat{O}_H(t) U(0, -\infty) | \Phi \rangle \\ &\stackrel{(\text{C.1})}{=} \langle \Phi | \underbrace{U(-\infty, 0) U(0, t)}_{=U(-\infty, t)} \hat{O}_I(t) \underbrace{U(t, 0) U(0, -\infty)}_{=U(t, -\infty)} | \Phi \rangle \\ &= \langle \Phi | U(-\infty, t) \hat{O}_I(t) U(t, -\infty) | \Phi \rangle \\ &= \langle \Phi | U(-\infty, +\infty) U(+\infty, t) \hat{O}_I(t) U(t, -\infty) | \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Sofern $|\Psi\rangle$ nicht entartet ist, kann an dieser Stelle ausgenutzt werden, dass der Zustand $U(-\infty, +\infty)|\Phi\rangle$ bis auf einen (unendlichen) Phasenfaktor identisch mit $|\Phi\rangle$ ist. Das Einfügen einer 1 hinter $U(-\infty, +\infty)|\Phi\rangle$ ist daher bereits durch den Projektionsoperator auf $|\Phi\rangle$ vollständig gegeben:

$$\langle \Phi | U(-\infty, +\infty) = \langle \Phi | U(-\infty, +\infty) |\Phi\rangle \langle \Phi | \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Phi | U(-\infty, +\infty) U(+\infty, -\infty) | \Phi \rangle \\ &= \langle \Phi | U(-\infty, +\infty) |\Phi\rangle \langle \Phi | U(+\infty, -\infty) | \Phi \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Wir erhalten für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | \hat{O}_H(t) | \Psi \rangle &\stackrel{(C.7)}{=} \langle \Phi | U(-\infty, +\infty) | \Phi \rangle \langle \Phi | U(+\infty, t) \hat{O}_I(t) U(t, -\infty) | \Phi \rangle \\
&\stackrel{(C.8)}{=} \frac{\langle \Phi | U(+\infty, t) \hat{O}_I(t) U(t, -\infty) | \Phi \rangle}{\langle \Phi | U(+\infty, -\infty) | \Phi \rangle} \\
&\stackrel{(C.2), (C.3)}{=} \frac{\langle \Phi | T^c \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I^I(t') \right) \hat{O}_I(t) \right] | \Phi \rangle}{\langle \Phi | T^c \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I^I(t') \right) \right] | \Phi \rangle}. \quad (C.9)
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurden die expliziten Ausdrücke für die Zeitentwicklungsoperatoren eingesetzt. Zusätzlich wurden die Eigenschaften des Zeitordnungsoperators ausgenutzt. Im Zeitentwicklungsoperator links von $\hat{O}_I(t)$ treten nur Zeiten oberhalb von t auf, im Zeitentwicklungsoperator auf der rechten Seite nur Zeiten unterhalb von t . Daher ist es möglich, alle Ausdrücke durch einen einzigen Zeitordnungsoperator ordnen zu lassen und gleichzeitig die Integrale aus $U(+\infty, t)$ und $U(t, -\infty)$ zu einem zusammenzufassen.

Völlig analog ergibt sich für die volle chronologische Greensfunktion g^c

$$\begin{aligned}
ig^c(x_1, t_1, x_2, t_2) &= \langle \Psi | T^c \left[\Psi_H(x_1, t_1) \Psi_H^\dagger(x_2, t_2) \right] | \Psi \rangle \quad (C.10) \\
&= \frac{\langle \Phi | T^c \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I^I(t') \right) \Psi_I(x_1, t_1) \Psi_I^\dagger(x_2, t_2) \right] | \Phi \rangle}{\langle \Phi | T^c \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I^I(t') \right) \right] | \Phi \rangle}.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck erlaubt nun die störungstheoretische Entwicklung von g^c mittels der wechselwirkungsfreien, chronologischen Einteilchen-Greensfunktion g_0^c

$$ig_0^c(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle \Phi | T^c \left[\Psi_I(x_1, t_1) \Psi_I^\dagger(x_2, t_2) \right] | \Phi \rangle. \quad (C.11)$$

Die Anwendung von Wicks Theorem [PS] in (C.10) liefert die bekannten Feynman-Regeln für den Grundzustand, der Nenner sorgt dabei dafür, dass die nicht-zusammenhängenden Digramme eliminiert werden.

C.2 Die pfadgeordnete Greensfunktion

Wir wissen nun, wie ein System im Grundzustand mittels der zeitgeordneten Greensfunktion g^c beschrieben werden kann. Auf ein System, das sich nicht im Grundzustand befindet, ist dieses Konzept aber nicht direkt übertragbar.

Das Problem liegt in Annahme, dass die Zustände $|\Phi\rangle$ und $U(+\infty, -\infty)|\Phi\rangle$ identisch sind (bis auf einen Phasenfaktor). Mit anderen Worten ausgedrückt bedeutet

124 Anhang C. Störungstheorie im thermodynamischen Gleichgewicht

das, dass der nichtwechselwirkende Grundzustand beim adiabatischen Ein- und Ausschalten der Wechselwirkung keinen Übergang in einen angeregten Zustand erfährt und daher in der Zukunft unverändert bleibt.

Auf ein System im Nichtgleichgewicht lässt sich diese Überlegung nicht anwenden, vielmehr darf kein Zustand des Systems in der Zukunft mit einem Zustand aus der Vergangenheit identifiziert werden. Formal wird dies deutlich, wenn man die Definition für den Erwartungswert eines Nichtgleichgewichtssystems (2.6) betrachtet. Das Einfügen eines Projektionsoperators gemäß (C.7), (C.8) ist in diesem Ausdruck nicht zulässig.

Um eine Alternative zu finden, betrachten wir zunächst wieder den Erwartungswert des Operators $\hat{O}_H(t)$ in einem System, das zur Zeit t_0 durch eine Dichtematrix spezifiziert wird:

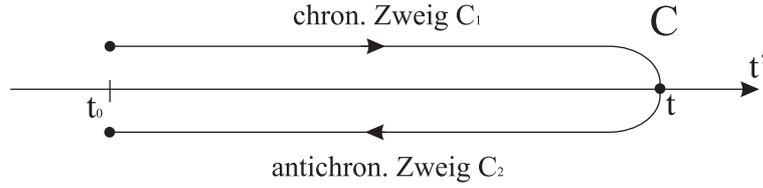
$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_H(t) \rangle &\stackrel{(C.1)}{=} \langle U(t_0, t) \hat{O}_I(t) U(t, t_0) \rangle \\ &\stackrel{(C.2), (C.3)}{=} \langle T^a \left[\exp \left(-i \int_t^{t_0} dt' H_I^I(t') \right) \right] \hat{O}_I(t) \\ &\quad \cdot T^c \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I^I(t') \right) \right] \rangle. \end{aligned} \quad (C.12)$$

Ein ähnlicher Ausdruck trat in Gleichung (C.9) auf. Dort konnten wir ausnutzen, dass links von $\hat{O}_I(t)$ nur Zeiten größer t und rechts von $\hat{O}_I(t)$ nur Zeiten kleiner t auftraten. Es war daher möglich, alle Operatoren in einem zeitgeordneten Ausdruck zusammenzufassen.

In (C.12) stehen rechts von $\hat{O}_I(t)$ ebenfalls Zeiten, die kleiner als t sind. Im Gegensatz zu (C.9) sind aber auch die Zeiten auf der linken Seite kleiner als t . Aufgrund des chronologischen und des antichronologischen Zeitordnungsoperators beginnen die Zeitargumente in (C.12) rechts bei t_0 , wachsen an bis t und fallen auf der linken Seite wieder ab bis t_0 .

Wenn wir nun wie in (C.9) die Exponentialfunktionen aus den Zeitentwicklungsoperatoren zusammenfassen wollen, benötigen wir einen neuen Zeitordnungsoperator. Dieser muss erkennen, ob Operatoren zum chronologischen oder antichronologischen Teil des Produkts in (C.12) gehören und diese in der entsprechenden Reihenfolge anordnen.

Dazu definieren wir einen Konturpfad C entlang der Zeitachse, wie in Abbildung C.1 dargestellt. Er beginnt bei t_0 und läuft zunächst in positiver Richtung bis zur größten auftretenden Zeit (chronologischer Zweig). In diesem Falle ist das t , das Zeitargument des Operators \hat{O}_I . Anschließend läuft der Pfad in umgekehrter Richtung zurück nach t_0 (antichronologischer Zweig). Das entspricht gerade der Reihenfolge der Zeitargumente in (C.12).

Abbildung C.1: Zeitkonturpfad C entlang der Zeitachse

Es ist möglich, die Kontur über die Zeit t hinaus zu verlängern. Dazu müssen in (C.12) zusätzliche U -Operatoren eingefügt werden. Mit $U(t, +\infty)U(+\infty, t)$ lässt sich die Kontur beispielsweise bis zu unendlichen Zeiten fortsetzen.

Nun können wir den Pfadordnungsoperator P einführen. Dieser ordnet die Operatoren in der Reihenfolge des Auftretens ihres Zeitarguments auf dem Pfad C an. Je größer die Zeit entlang C ist, desto weiter links steht der Operator. Die Operatoren auf dem antichronologischen Zweig werden links von den Operatoren auf dem chronologischen Zweig angeordnet. Beschränkt man sich auf einen Zweig der Kontur, so reduziert sich die Bedeutung von P dort auf den chronologischen (C_1) bzw. antichronologischen (C_2) Zeitordnungsoperator.

Mit Hilfe des Pfadordnungsoperators können wir nun Gleichung (C.12) analog zu (C.9) umformen:

$$\langle \hat{O}_H(t) \rangle = \langle P \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^{t_0} dt' H_I^I(t') \right) \hat{O}_I(t) \right] \rangle. \quad (\text{C.13})$$

Das Symbol $\int_{t_0}^{t_0}$ steht hierbei für die Integration entlang der Kontur C .

Wir definieren die pfadgeordnete Einteilchen-Greensfunktion g , deren Zeitargumente auf der Kontur liegen (die Kontur läuft hierbei bis zum größten Argument der Greensfunktion):

$$\begin{aligned} ig(x_1, t_1, x_2, t_2) &= \langle P \left[\Psi_H(x_1, t_1) \Psi_H^\dagger(x_2, t_2) \right] \rangle \\ &= \langle P \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^{t_0} dt' H_I^I(t') \right) \Psi_I(x_1, t_1) \Psi_I^\dagger(x_2, t_2) \right] \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

g lässt sich genau wie g^c durch die ungeordneten Greensfunktionen $g^>$ und $g^<$ ausdrücken:

$$g(x_1, t_1, x_2, t_2) = \Theta_C(t_1, t_2) g^>(x_1, t_1, x_2, t_2) + \Theta_C(t_2, t_1) g^<(x_1, t_1, x_2, t_2). \quad (\text{C.15})$$

$g^>$ und $g^<$ wurden in (2.12) und (2.13) eingeführt. Θ_C ist die verallgemeinerte Θ -Funktion auf dem Pfad. Sie ist definiert durch:

$$\Theta_C(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } t_1 \text{ später auf } C \text{ als } t_2, \\ 0 & \text{für } t_1 \text{ früher auf } C \text{ als } t_2. \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

Beschränkt man die Zeitargumente auf jeweils einen der Zweige von C , dann erhält man aus g gerade wieder die herkömmlichen Greensfunktionen:

$$\begin{aligned}
 g^c(1, 2) &= -i\langle T^c[\Psi_H(1)\Psi_H^\dagger(2)] \rangle && \text{für } t_1, t_2 \in C_1 \\
 g^a(1, 2) &= -i\langle T^a[\Psi_H(1)\Psi_H^\dagger(2)] \rangle && \text{für } t_1, t_2 \in C_2 \\
 g^>(1, 2) &= -i\langle \Psi_H(1)\Psi_H^\dagger(2) \rangle && \text{für } t_1 \in C_2, t_2 \in C_1 \\
 g^<(1, 2) &= +i\langle \Psi_H^\dagger(2)\Psi_H(1) \rangle && \text{für } t_1 \in C_1, t_2 \in C_2.
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

C.3 Störungsentwicklung im Nichtgleichgewicht

Gleichung (C.14) hat große Ähnlichkeit mit (C.10). Es ist daher nicht überraschend, dass für die pfadgeordnete Greensfunktion eine vollkommen analoge Störungsentwicklung existiert wie im Falle des Grundzustandes. Damit eine Störungsentwicklung möglich ist, muss der Anfangszustand zur Zeit t_0 eine Wickzerlegung zulassen. Das bedeutet, dass der Anfangszustand unkorreliert sein muss. Der Dichteoperator des Zustandes hat in diesem Fall die Form

$$\begin{aligned}
 \rho &= \exp(\mathcal{A}) \\
 \mathcal{A} &= \sum_j \mathcal{A}_j a_j^\dagger a_j,
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

der Operator \mathcal{A} ist also ein Einteilchenoperator [Da84]. Diese Einschränkung ist notwendig, da der Dichteoperator in der Definition des Erwartungswertes auftritt (vgl. (2.5), (2.6)).

Die Durchführung der Wickzerlegung [Da84] soll hier nicht im Detail besprochen werden. Es wird im Wesentlichen ausgenutzt, dass der Erwartungswert eines Produktes von Operatoren durch eine Summe über Produkte von Erwartungswerten von Operatorpaaren ausgedrückt werden kann (Kontraktionen).

Als Ergebnis erhält man Feynman-Regeln, die denen für den Grundzustand sehr ähnlich sind. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Zeitintegration nicht mehr von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft, sondern stattdessen entlang der Kontur. Wie bereits gesagt, ist es dabei erforderlich, dass die Kontur mindestens bis zum größten äußeren Zeitargument reicht. Die nichtverbundenen Diagramme verschwinden, da keine äußeren Zeiten auftreten und die Kontur sich daher auf t_0 zusammenziehen lässt. Die Feynman-Regeln lauten:

1. Zeichne alle Diagramme, die topologisch unterscheidbar und zusammenhängend sind.

2. Teilchenlinien von (x', t') nach (x, t) stellen nichtwechselwirkende Greensfunktionen g_0 dar:

$$\begin{aligned} ig_0(x, t, x', t') &= \langle \Phi_I(t_0) | P \left[\Psi_I(x, t) \Psi_I^\dagger(x', t') \right] | \Phi_I(t_0) \rangle & (C.19) \\ &= \Theta_C(t, t') ig_0^>(x, t, x', t') + \Theta_C(t', t) ig_0^<(x, t, x', t'). \end{aligned}$$

3. Zu jeder Wechselwirkungslinie korrespondiert ein Faktor

$$-iU(x, t, x', t') = -iV(x - x') \delta_C(t, t'). \quad (C.20)$$

Die Funktion δ_C ist auf der Kontur definiert:

$$\delta_C(t, t') = \begin{cases} +\delta(t - t') & \text{für } t, t' \text{ auf } C_1 \\ -\delta(t - t') & \text{für } t, t' \text{ auf } C_2. \end{cases} \quad (C.21)$$

Das negative Vorzeichen kompensiert gerade den Vorzeichenwechsel, der sich aus dem Richtungswechsel der Integration auf C_2 ergibt.

4. Integriere alle internen Variablen über den gesamten Raum und entlang des Zeitkonturpfades C von t_0 nach t_0 .
5. Eine Greensfunktion mit gleichen Zeitargumenten wird als $g_0^<$ interpretiert (dies entspricht einer Kontraktion zweier Feldoperatoren in H_I^I und berücksichtigt deren definierte Anordnung).
6. Jedes Diagramm erhält einen Faktor $(-1)^F$, wobei F für die Zahl der geschlossenen 'Fermionenloops' steht.

Soll ein bestimmter Typ von Greensfunktion g^{\geq}, g^a, g^c (als Spezialfall von g , vgl. (C.17)) berechnen werden, kann es von Vorteil sein, in den Feynman-Regeln die Kontur in die beiden Zweige zu zerlegen. Die entsprechenden Regeln finden sich am Ende des Kapitels.

C.4 Feldtheorie bei endlichen Temperaturen

Die Überlegungen des letzten Abschnittes sollen nun auf ein System im Gleichgewicht bei endlicher Temperatur übertragen werden. Das Ergebnis wird der so genannte Realzeit-Formalismus sein.

Betrachtet man den Dichteoperator für das thermodynamischen Gleichgewicht, $\rho_{GC} = e^{-\beta(H - \mu N)}$, dann stellt man fest, dass er die Bedingung (C.18) für einen nichtkorrelierten Anfangszustand verletzt. Die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt sind also nicht direkt anwendbar. Es ist aber möglich, den korrelierten

128 Anhang C. Störungstheorie im thermodynamischen Gleichgewicht

Anfangszustand durch eine Entwicklung in Richtung der imaginären Zeitachse aus einem nichtkorrelierten Zustand zu präparieren [Da84, Das].

Dazu stellen wir zunächst fest, dass die Dichtematrix (2.1) die Form eines Zeitentwicklungsoperators hat, wenn wir β als eine negative, imaginäre Zeit interpretieren (das entspricht gerade der Vorgehensweise im Matsubara-Formalismus). Wir betrachten die Zustandssumme eines großkanonischen Ensembles,

$$Z = \text{Tr} (e^{-\beta\mathcal{H}}) = \text{Tr} (e^{-\beta(H-\mu N)}).$$

Durch die Zerlegung von H in die beiden Anteile H_0 und $(H - H_0)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} (e^{-\beta(H_0-\mu N)} e^{-\beta(H-H_0)}) \\ &= \text{Tr} (e^{-\beta\mathcal{H}_0} e^{(\beta+it_0)H_0} e^{-(\beta+it_0)H} e^{it_0H} e^{-it_0H_0}). \end{aligned}$$

mit $\mathcal{H}_0 = H_0 - \mu N$. Nun verallgemeinern wir den Zeitentwicklungsoperator auf komplexe Zeiten. Es gilt:

$$\begin{aligned} U(\tau) &= e^{iH_0\tau} e^{-iH\tau}, \\ U^\dagger(\tau) &:= (U(\tau^*))^\dagger, \\ U(\tau, \tau_0) &:= U(\tau)U^\dagger(\tau_0). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Zustandssumme folgender Ausdruck:

$$Z = Z_0 \langle U(t_0 - i\beta)U^\dagger(t_0) \rangle_0 = Z_0 \langle U(t_0 - i\beta, t_0) \rangle_0. \quad (\text{C.22})$$

Dabei wurde die folgende Abkürzung eingeführt:

$$\langle \dots \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} (e^{-i\beta\mathcal{H}_0} \dots).$$

Unter Verwendung von (C.22) erhalten wir für den Erwartungswert eines Operators mit einem Zeitargument:

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_H(t) \rangle &= \frac{\text{Tr} (e^{(-\beta\mathcal{H})} \hat{O}_H(t))}{Z} = \frac{\langle U(t_0 - i\beta, t_0) \hat{O}_H(t) \rangle_0}{\langle U(t_0 - i\beta, t_0) \rangle_0} \\ &= \frac{\langle U(t_0 - i\beta, t_0) U(t_0, t) \hat{O}_I(t) U(t, t_0) \rangle_0}{\langle U(t_0 - i\beta, t_0) \rangle_0}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Die Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators erlauben es nun, (C.23) wie folgt umzuformen:

$$\langle \hat{O}_H(t) \rangle = \frac{\langle U(t_0 - i\beta, t_0) U(t_0, t'_0) U(t'_0, t_0) U(t_0, t) \hat{O}_I(t) U(t, t_0) \rangle_0}{\langle U(t_0 - i\beta, t_0) U(t_0, t'_0) U(t'_0, t_0) \rangle_0}. \quad (\text{C.24})$$

Für die auftretenden Zeiten t_0 und t'_0 soll dabei gelten $t_0 \rightarrow -\infty$ und $t'_0 \rightarrow +\infty$. Aus den vorhergehenden Abschnitten ist die Bedeutung dieses Ausdrucks sofort klar. Das System entwickelt sich entlang der in Abbildung C.2 dargestellten Zeitkontur C_R . Die Entwicklung erfolgt entlang der reellen Zeitachse von t_0 bis zur Zeit t , an der der Operator \hat{O} auftritt. Dann entwickelt sich das System weiter bis t'_0 und anschließend rückwärts in der Zeit bis nach t_0 . Schließlich folgt die Entwicklung in imaginärer Zeitrichtung von t_0 nach $t_0 - i\beta$. Aufgrund der zyklischen Eigenschaften der Spur, die in der Definition des Erwartungswerts auftritt, ist es übrigens unerheblich, ob die Entwicklung in der imaginären Zeit vor C_1 oder nach C_2 erfolgt.

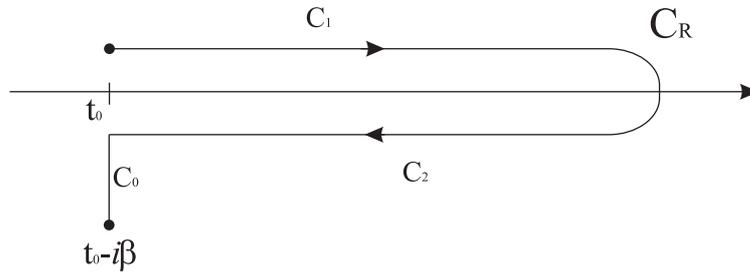


Abbildung C.2: Zeitkonturpfad C_R in der komplexen Zeitebene

Wir definieren einen Pfadordnungsoperator P^{C_R} analog zu P für die Kontur C . Damit lässt sich der Erwartungswert von \hat{O} in übersichtlicherer Form darstellen:

$$\langle \hat{O}_H(t) \rangle = \frac{\langle P^{C_R} \left[\exp \left(-i \int_{C_R} dt' H_I^I(t') \right) \hat{O}_I(t) \right] \rangle_0}{\langle P^{C_R} \left[\exp \left(-i \int_{C_R} dt' H_I^I(t') \right) \right] \rangle_0}. \quad (\text{C.25})$$

Für die Greensfunktion auf dem Pfad C_R ergibt sich analog:

$$g(x_1, t_1, x_2, t_2) = \frac{\langle P^{C_R} \left[\exp \left(-i \int_{C_R} dt' H_I^I(t') \right) \Psi_I(x_1, t_1) \Psi_I^\dagger(x_2, t_2) \right] \rangle_0}{\langle P^{C_R} \left[\exp \left(-i \int_{C_R} dt' H_I^I(t') \right) \right] \rangle_0}. \quad (\text{C.26})$$

Man kann nun argumentieren [Gr92, Das, Jo89], dass der Beitrag des Abschnitts C_0 zur Störungsentwicklung für endliche $t_1, t_2 \in C_1, C_2$ verschwindend klein ist, da t_0 in der fernen Vergangenheit liegt. Im Wesentlichen beruht die Argumentation darauf, dass Greensfunktionen für große Zeitdifferenzen verschwinden. Das Ergebnis ist eine reine Realzeittheorie für Greensfunktionen bei endlichen Temperaturen. Gleichung (C.26) geht über zu:

$$g(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle P \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{-\infty} dt' H_I^I(t') \right) \Psi_I(x_1, t_1) \Psi_I^\dagger(x_2, t_2) \right] \rangle_0. \quad (\text{C.27})$$

Dieser Ausdruck erlaubt nun die Wickzerlegung ($-\beta \mathcal{H}_0$ entspricht der verlangten Form für einen nichtkorrelierten Anfangszustand) und führt zu den gleichen

Feynman-Regeln wie für Systeme im Nichtgleichgewicht, die bereits im letzten Abschnitt eingeführt wurden.

C.5 Aufspaltung der Kontur in die Zweige

Die Zeitargumente der Greensfunktionen ig^{\lessgtr} , ig^a und ig^c befinden sich auf festgelegten Zweigen der Kontur (vgl. (C.17)), gleiches gilt im Falle der Selbstenergien $-i\Sigma^{\lessgtr}$. Das lässt sich ausnutzen, um spezielle Feynman-Regeln zu formulieren, mit denen sich diese Größen bequem berechnen lassen. Es treten insbesondere keine Integrationen über den Zeitkonturpfad auf.

C.5.1 Feynman-Regeln im Ortsraum

1. Die Zeichenebene wird durch eine vertikale Linie in zwei Hälften unterteilt, die den beiden Zweigen der Kontur (chronologisch und antichronologisch) entsprechen. Zeichne für jedes Funktionsargument einen Punkt auf der einen oder der anderen Seite der Linie, entsprechend des Funktionstyps der berechnet werden soll¹.
2. Zeichne alle Diagramme, die topologisch unterscheidbar und zusammenhängend sind. Jede Teilchenlinie erhält eine Richtung. Diagramme, die an verschiedenen Stellen von der vertikalen Linie geschnitten werden, sind unterscheidbar. Wechselwirkungslinien dürfen nicht von der Trennlinie geschnitten werden.
3. Eine Teilchenlinie steht für $ig_0^<$, $ig_0^>$, ig_0^a oder ig_0^c , abhängig davon, auf welcher Seite der Trennlinie sie beginnt und auf welcher sie endet.
4. Zu jeder Wechselwirkungslinie korrespondiert ein Faktor

$$-iV(x_1 - x_2)\delta(t_1 - t_2).$$

5. Zu jeder Wechselwirkungslinie auf der antichronologischen Seite korrespondiert zusätzlich ein Faktor (-1) .
6. Eine Teilchenlinie mit gleichen Zeitargumenten wird als $ig_0^<$ interpretiert.
7. Jedes Diagramm erhält einen Faktor $(-1)^F$, wobei F für die Zahl der geschlossenen 'Fermionenloops' steht.
8. Integriere alle internen Variablen über den gesamten Raum bzw. von t_0 bis zum größten Zeitargument der zu berechnenden Funktion.

¹Der Funktionstyp legt fest, auf welchem Zweig der Kontur die Argumente liegen, vgl. (C.17).

9. Zu jeder Zeit-Integration auf der antichronologischen Seite korrespondiert ein Faktor (-1) .

Die Regeln 5 und 9 ergeben zusammengenommen gerade einen Faktor (-1) für jede Wechselwirkung auf dem antichronologischen Zweig, wenn über beide Vertizes integriert wird.

C.5.2 Feynman-Regeln im Impulsraum

Zunächst müssen die Diagramme im Ortsraum gezeichnet werden, so wie in den Regeln 1 und 2 des letzten Abschnitts beschrieben. Im Impulsraum haben diese Diagramme dann die folgenden Eigenschaften:

1. Zeichne die Diagramme in der Ortsraumdarstellung, gemäß den Feynman-Regeln 1 und 2 für den Ortsraum.
2. Die Teilchen- und Wechselwirkungslinien werden mit Energie- und Impulsvariablen versehen.
3. An den Vertizes gilt Energie- und Impulserhaltung.
4. Eine Teilchenlinie steht auf der chronologischen Seite für $ig^c(\omega, p)$ und auf der antichronologischen Seite für $ig^a(\omega, p)$. Teilchenlinien, die die Trennlinie überschreiten, stehen für $ig^{\lessgtr}(\omega, p)$.
5. Zu jeder Wechselwirkungslinie korrespondiert ein Faktor $-iV(\vec{p})$.
6. Zu jeder Wechselwirkungslinie auf der antichronologischen Seite korrespondiert zusätzlich ein Faktor (-1) .
7. Zu jedem internen Vertex auf der antichronologischen Seite korrespondiert ein Faktor (-1) .
8. Jedes Diagramm erhält einen Faktor $(-1)^F$, wobei F für die Zahl der geschlossenen 'Fermionenloops' steht.
9. Integriere über alle internen Impulse und Energien.

Zusammengenommen ergeben die Regeln 6 und 7 einen Faktor (-1) für jede interne Wechselwirkung auf der antichronologischen Seite.

Literaturverzeichnis

- [BD] J.D. Bjorken, S.D. Drell,
Relativistische Quantenfeldtheorie,
Unveränd. Nachdruck, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1993).
- [Bh] O. Benhar, A. Fabrocini, S. Fantoni,
The nucleon spectral function in nuclear matter,
Nucl. Phys. **A505** (1989) 267;
Nucl. Phys. **A550** (1992) 201.
- [Bo90] W. Botermans, R. Malfliet,
Quantum Transport Theory of Nuclear Matter,
Phys. Rep. **198** (1990) 115.
- [Bz01] P. Bożek, P. Czerski,
Thermodynamic consistency for nuclear matter calculations,
nucl-th/0102020 (2001).
- [Da84] P. Danielewicz,
Quantum Theory of Nonequilibrium Processes,
Ann. Phys. **152** (1984) 305.
- [dA91] C. Ciofi degli Atti, E. Pace, G. Salme,
Y Scaling analysis of quasielastic electron scattering and nucleon momentum distributions in few body systems, complex nuclei and nuclear matter,
Phys. Rev. **C43** (1991) 1153.
- [Das] A. Das,
Finite Temperature Field Theory,
World Scientific, Singapur (1997).
- [Ed98] A. Edin, G. Ingelman,
A model for the parton distributions in hadrons,
Phys. Lett. **B432** (1998) 402.

- [Ef99] M. Effenberger,
Eigenschaften von Hadronen in Kernmaterie in einem vereinheitlichten Transportmodell,
Dissertation, Gießen (1999).
- [FW] A.L. Fetter, J.D. Walecka,
Quantum Theory of Many-Particle Systems,
McGraw-Hill, New York (1971).
- [Gr92] C. Greiner,
Gedächtniseffekte im Stoßterm in einer relativistischen Transporttheorie,
Dissertation, Erlangen (1992).
- [Ho84] C.J. Horowitz, B.D. Serot,
Two-nucleon correlations in a relativistic theory of nuclear matter,
Phys. Lett. **B137** (1984) 287.
- [Jo89] J. Joubert, J. Cleymans,
Real-Time Greens Functions in Finite-Temperature Quantum Field Theory,
UCT-TP 127/1989.
- [KB] L.P. Kadanoff, G. Baym,
Quantum Statistical Mechanics,
Benjamin, New York (1962).
- [Kl92] S.P. Klevansky,
The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics,
Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 649.
- [Kö00] H.S. Köhler, K. Morawetz,
Correlations in Many-Body Systems with Two-time Green's Functions,
nucl-th/0102059 (2001).
- [KW90] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl, W. Weise,
Generalized $SU(3)$ Nambu–Jona-Lasinio Model,
Nucl. Phys. **A516** (1990) 429.
- [Le00] J. Lehr, M. Effenberger, H. Lenske, S. Leupold, U. Mosel,
Transport Theoretical Approach to the Nucleon Spectral Function in Nuclear Matter,
Phys. Lett. **B483** (2000) 324.

- [Lp00] S. Leupold,
Towards a test particle description of transport processes for states with continuous mass spectra,
Nucl. Phys. **A672** (2000) 475.
- [Ma55] T. Matsubara,
A New Approach to Quantum Statistical Mechanics,
Prog. Theor. Phys. **14** (1955) 351.
- [Mo99] U. Mosel,
Fields, Symmetries and Quarks,
2. Auflage, Springer, Berlin (1999).
- [Mt59] P.C. Martin, J. Schwinger,
Theory of Many Particle Systems,
Phys. Rev. **115** (1959) 1342.
- [NAG] *NAG Fortran Library Manual, Mark 19*,
Numerical Algorithms Group, Oxford (1999).
- [Ne01] R. Nebauer, J. Aichelin,
Thermodynamics of the 3-flavor NJL model: chiral symmetry breaking and color superconductivity,
hep-ph/0101289 (2001).
- [PD00] Particle Data Group,
Particle Physics Booklet (2000).
- [PB] M. Plischke, B. Bergersen,
Equilibrium Statistical Physics,
2. Auflage, World Scientific, Singapur (1994).
- [PS] M.E. Peskin, D.V. Schroeder,
An Introduction to Quantum Field Theory,
Addison-Wesley, Reading (1995).
- [Sch61] J. Schwinger,
Brownian Motion of a Quantum Oscillator,
J. Math. Phys. **2** (1961) 407.
- [Sch98] T. Schäfer, E.V. Shuryak,
Instantons in QCD,
Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323.
- [We] H. Weyl,
The Theory of Groups and Quantum Mechanics,
Dover, New York (1931).

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Professor Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in das Institut und die interessante Themenstellung. Sein stetes Interesse und seine zahlreichen Anregungen haben viel zum Fortschreiten dieser Arbeit beigetragen. Durch seine motivierende Art hat er immer wieder den Eindruck vermitteln können, dass alles zu schaffen ist.

Größten Dank bin ich auch Dr. Stefan Leupold schuldig. Er hat alle meine Fragen geduldig beantwortet und mit vielen, detaillierten Vorschlägen entscheidend dazu beigetragen, dass diese Arbeit gelingen konnte. Durch die schnelle und gründliche Durchsicht dieses Manuskripts hat er sich zusätzlich verdient gemacht.

Jürgen Lehr danke ich für die Überlassung seines Programmcodes. Die klare Struktur und die gute Lesbarkeit haben für einen angenehmen Einstieg in das Thema gesorgt.

Ohne den stabilen Betrieb von 'Wasti' wäre es kaum möglich gewesen, die numerischen Rechnungen durchzuführen. Ganz besonders deshalb bedanke ich mich bei Christoph Keil, Frank Hofmann und Annette Gail für die zuverlässige Betreuung der Computer.

Meinem Zimmerkollegen Pascal Mühlich danke ich für die angenehme Gesellschaft und für die gute Zusammenarbeit bei der Planung und Durchführung diverser Institutsveranstaltungen.

Elke Jung war bei der Bewältigung administrativer Probleme unentbehrlich. Dank ihrer hilfsbereiten Art war der 'Papierkram' immer schnell erledigt.

Allen anderen Mitgliedern des Instituts, die hier nicht namentlich erwähnt werden, sei für das angenehme Arbeitsklima gedankt. Auch für das Interesse an meiner Arbeit und die eine oder andere Diskussion bin ich sehr dankbar.

Schließlich muß ich noch meiner ganzen Familie ein herzliches Dankeschön aussprechen. Der Rückhalt, den sie mir gegeben hat, ist von unschätzbarem Wert. Ganz besonders meine Eltern haben mir während des gesamten Studiums viele Lasten – nicht nur finanzieller Art – abgenommen.