

**Über Ejektivität und periodische Lösungen  
bei autonomen Funktionaldifferentialgleichungen  
mit verteilter Verzögerung**

Habilitationsschrift

zur Erlangung der *venia legendi*

für das Fach Mathematik

am

Fachbereich Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

**Hans-Otto Walther**

München, Oktober 1977

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einführung	1
Bezeichnungen	14
I. Autonome retardierte Funktionaldifferentialgleichungen	17
1. Definitionen	17
2. Lineare Gleichungen	19
3. Liapunov-Funktional und Ejektivität	27
II. Ungedämpft schwingende Lösungen nichtlinearer Funktional- differentialgleichungen mit verteilter Verzögerung	32
1. Die Gleichung $(\alpha, f)$	32
2. Eigenwerte	33
3. Langsam schwingende Lösungen	41
4. Auf Anfangswerten langsam schwingender Lösungen der linearen Gleichung $(\alpha, id)$ verschwindet die Projektion $\pi_{\lambda_0}(\alpha)$ nicht	47
5. Vorbereitungen zum Nachweis der Voraussetzungen von Satz I.1	52
6. Ejektivität. Ungedämpft schwingende Lösungen	62
III. Periodische Lösungen	80
Literatur	88

### Einführung

Die Beschreibung technischer und natürlicher Systeme führt in manchen Fällen auf Differentialgleichungen, bei denen die aktuelle Zustandsänderung von der Vorgeschichte abhängt. In der Mathematik wurden einzelne solcher Funktionaldifferentialgleichungen schon im vorigen Jahrhundert untersucht. Etwa seit 1945 begann man, eine einheitliche, an den Ergebnissen über gewöhnliche Differentialgleichungen orientierte Theorie für diese Gleichungen zu entwickeln. Die jüngste systematische Darstellung des Erreichten gibt J. Hale in [19]. Dort findet sich auch ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Nachdem zuvor meist lineare Gleichungen behandelt worden waren, beschäftigte sich E.M. Wright in der 1955 erschienenen Arbeit [42] mit der nichtlinearen Differenzen-Differentialgleichung

$$(1) \quad \dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)]$$

mit positivem Parameter  $\alpha$ . Gleichzeitig untersuchten S. Kakutani und L. Markus [26] eine äquivalente Gleichung und kamen zu ähnlichen Ergebnissen wie Wright. Seither blieb Gleichung (1) eines der wichtigen Beispiele, an denen Methoden zur Behandlung nichtlinearer Probleme getestet wurden.

Gleichung (1) besitzt Anwendungen in verschiedenen Bereichen, darunter in der Biologie: Die Gleichung

$$(1') \quad \dot{n}(t) = r n(t)[K - n(t-\tau)]K^{-1}$$

wurde 1948 von G.E. Hutchinson als einfaches Modell einer Population vorgeschlagen, die bei kleiner Populationsdichte  $n(t)$  exponentiell mit der Rate  $r$  wächst und später ihre Größe nach einer Reaktionszeit  $\tau$  an begrenzte Lebensbedingungen anpaßt,

deren Einfluß in der Konstanten  $K$  zusammengefaßt ist [23,5,6,7]. Realistischere Modelle mit kontinuierlich verteilten Verzögerungen beschrieben G.M. Dunkel [12] und R.M. May [33]. Ein abstrakterer Zugang ist in der Arbeit [41] des Autors skizziert. Die mathematische Untersuchung derartiger Modelle hilft die Beobachtung verstehen, daß unter konstanten Umweltbedingungen bei gewissen Tierarten die Populationsdichten oszillieren [2].

Die durch  $x(t) = [K - n(\tau t)]K^{-1}$  definierte Transformation führt die Lösungen von (1') in die von (1) mit  $\alpha = r\tau$  über. Dabei wird die Gleichgewichtslösung  $n:t \mapsto K$  von (1') zur trivialen Lösung von (1), und die biologisch relevanten Lösungen  $n > 0$  gehen in die Lösungen  $x > -1$  über.

Um eine Lösung  $x$  von (1) auf  $\mathbb{R}^+$  zu bekommen, sind offenbar Werte  $\varphi(a)$  für alle Argumente  $a \in [-1,0]$  vorzugeben. Auch die Eindeutigkeitsaussage ist nur in folgender Form richtig: Stimmen zwei Lösungen  $x, y: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Anfangsintervall  $[-1,0]$  überein, so gilt  $x(t) = y(t)$  für alle  $t \geq -1$ . Beides weist darauf hin, daß es zweckmäßig ist, neben den auf  $[-1, \infty)$  stetigen, auf  $\mathbb{R}^+$  der Gleichung (1) genügenden Lösungen  $x$  auch die Trajektorien  $(x_t)_{t \geq 0}$  im Banachraum der stetigen reellen Funktionen auf  $[-1,0]$  zu untersuchen, die durch  $x_t(a) := x(t+a)$  für alle  $a \in [-1,0]$  definiert sind.

Wright zeigte, daß die triviale Lösung von (1) für  $\alpha < \pi/2$  attraktiv und stabil und für  $\alpha > \pi/2$  instabil ist. Der kritische Parameter  $\pi/2$  ist durch die linearisierte Gleichung

$$(2) \quad \dot{y}(t) = -\alpha y(t-1)$$

bestimmt. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen entscheidet

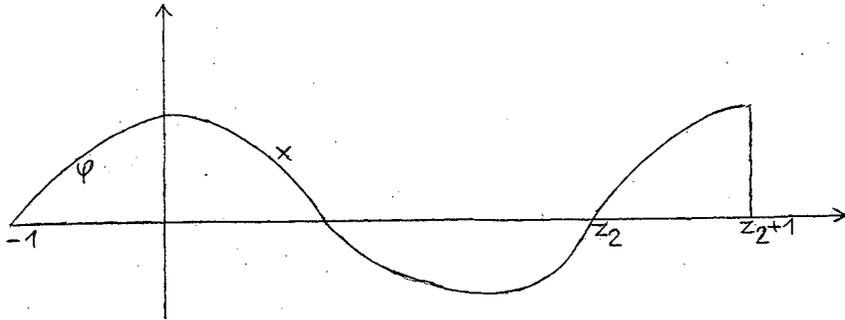
die Lage der Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$(3) \quad \lambda + \alpha e^{-\lambda} = 0,$$

die man aus dem Ansatz  $y(t) = e^{\lambda t}$  erhält, über die Stabilität von (2) und (1). - Weiter fand Wright, daß für  $\alpha > 1$  alle Lösungen  $x: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x(0) > -1$  oszillieren. Ist insbesondere  $x$  auf dem Anfangsintervall positiv, so lassen sich die Nullstellen in eine Folge  $(z_j)$  mit  $z_j + 1 < z_{j+1}$  anordnen; in sukzessiven Intervallen  $(z_j, z_{j+1})$  hat  $x$  verschiedenes Vorzeichen. Zu jedem  $\alpha > \pi/2$  gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| > \epsilon$  für alle diese Lösungen, unabhängig von ihrer Größe im Anfangsintervall. Die letzte Aussage, die dem Beweis von Theorem 4 [42] zu entnehmen ist, geht über die der gewöhnlichen Instabilität der trivialen Lösung von (1) hinaus.

Die Nichtlinearität von (1) macht alle Lösungen beschränkt; das Auftreten beschränkter ungedämpfter Oszillationen legt die Frage nach periodischen Lösungen nahe.

Ein erster, nicht ganz vollständiger Existenzbeweis stammt von G.S. Jones [26]: Zu stetigen Anfangsfunktionen  $\varphi: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(-1) = 0$  und  $\varphi > 0$  in  $(-1,0]$  werden die Lösungen  $x: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  von (1) mit  $x_0 = \varphi$  betrachtet. Auch deren Nullstellen in  $\mathbb{R}^+$  lassen sich in eine Folge  $(z_j)$  mit den beschriebenen Eigenschaften anordnen. Eine periodische Lösung ist wegen der Eindeutigkeitsaussage und wegen der Autonomie von (1) gefunden, wenn der Verschiebungsoperator  $T: \varphi \rightarrow x_{z_2+1}$  einen Fixpunkt hat.



Will man Schauders Fixpunktsatz anwenden, so ist man gezwungen,  $T$  durch den Wert 0 auf den Randpunkt  $\varphi = 0$  seines Definitionsbereichs fortzusetzen, und man kann nicht ausschließen, daß der Fixpunkt, den man bekommt, der trivialen Lösung von (1) entspricht. Tieferliegende Methoden der asymptotischen Fixpunkttheorie bieten einen Ausweg: Man kann die Instabilitätsaussage von Wright benutzen, um für alle  $\alpha > \pi/2$  auf einen nichttrivialen Fixpunkt des Verschiebungsoperators zu schließen.

Nicht sehr bekannt scheint zu sein, daß sich für große  $\alpha$  abgeschlossene konvexe Mengen von Anfangsfunktionen finden lassen, die invariant unter dem Verschiebungsoperator sind und  $\varphi = 0$  nicht enthalten; hier führt Schauders Fixpunktsatz zum Ziel, wie Dunkel nach einer Idee von Jones zeigen kann [11].

Inzwischen wurde die Existenz periodischer Lösungen für eine Reihe einfach aussehender autonomer nichtlinearer Funktionaldifferentialgleichungen gezeigt. Für die vorliegende Arbeit sind vor allem der Beweis von R.B. Grafton [13], die Methode von R.D. Nussbaum [34,35,36,37] sowie die mit beiden zusammenhängende Arbeit [3] von S.N. Chow von Interesse. Auf Nussbaums Vorgehen

basieren auch die Beweise von K.P. Hadeler und J. Tomiuk [16], sowie [39]. Andersartige Existenzbeweise gaben J.L. Kaplan und J.A. Yorke [27,28,29] und J.M. Cushing [8,9].

In [13] konnte Grafton die an der Gleichung (1) orientierte Idee von Wright zum Beweis der Instabilität vermeiden. Er benützt ein allgemeineres Ergebnis von Hale und C. Perello (Theorem 3 [21], in der vorliegenden Arbeit als Lemma I.2 wiedergegeben) über instabiles Verhalten kleiner Lösungen nichtlinearer Funktionaldifferentialgleichungen, um darauf zu schließen, daß im Zweig der Eigenvektoren des Verschiebungsoperators, betrachtet als Selbstabbildung eines Kegels von monoton wachsenden Anfangsfunktionen, ein Eigenvektor mit Eigenwert 1, also ein nichttrivialer Fixpunkt vorkommt.

Nussbaum verwendete den - auf F.E. Browder zurückgehenden - Typ von Fixpunktsatz, der dem Problem am ehesten angemessen ist. Browder zeigte, daß jede stetige Selbstabbildung einer unendlich-dimensionalen kompakten konvexen Menge  $C$  in einem Banachraum einen nichtejektiven Fixpunkt hat [1]. - Dabei heißt ein Fixpunkt  $x$  von  $T$  eektiv, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x$  in  $C$  gibt, sodaß zu jedem  $y \in U \setminus \{x\}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $T^n y \in C \setminus U$  existiert.

Für die Anwendung auf Verschiebungsoperatoren ist es zweckmäßig, dieses Ergebnis auf den Fall kompakter Abbildungen und nur abgeschlossener Mengen zu übertragen, wie dies W.A. Horn tut [22]. Anders als in [22] nennen wir in der vorliegenden Arbeit eine Abbildung  $T$ , die auf einer Teilmenge eines normierten Raums definiert ist, kompakt, wenn sie beschränkte Mengen in relativkompakte überführt. Mit dieser Definition folgt aus Theorem 14 [22]

unmittelbar

**Satz 1.** Sei  $X$  ein Banachraum, sei  $K$  eine unendlichdimensionale, abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge von  $X$ , und sei  $T:K \rightarrow K$  eine stetige und kompakte Abbildung. Dann besitzt  $T$  einen nichtejektiven Fixpunkt.

Nussbaum behandelt in [34] neben anderen die Differenzen-Differentialgleichungen

$$(4) \quad \dot{x}(t) = -f(x(t-1))$$

für stetige Funktionen  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\xi f(\xi) > 0$  für  $\xi \neq 0$ , die nach unten beschränkt sind. Die Klasse dieser Gleichungen verallgemeinert in gewissem Sinn Gleichung (1): Die Lösungen  $x > -1$  gehen vermöge der Transformation  $x \mapsto \log(x+1)$  in die Lösungen der Gleichung

$$\dot{x}(t) = -\alpha(e^{x(t-1)} - 1)$$

der Form (4) über.

Für die Gleichungen (4) definiert man den Verschiebungsoperator wie oben zu (1). Ist  $f$  an der Stelle  $\xi = 0$  differenzierbar mit  $f'(0) > \pi/2$ , so ergibt sich wie in [42] die Existenz von  $\varepsilon > 0$  mit  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| > \varepsilon$  für alle Lösungen  $x: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Anfangswerte im Definitionsbereich des Verschiebungsoperators liegen und nicht verschwinden. Die Instabilitätsaussage überträgt sich auf den Verschiebungsoperator als Ejektivität des trivialen Fixpunkts. Satz 1 liefert einen nichtejektiven, damit von Null verschiedenen Fixpunkt; dieser definiert die gesuchte periodische Lösung.

Nach Wrights Vorarbeit scheint die Wahl eines geeigneten Defini-

tionsbereichs für den Verschiebungsoperator auf der Hand zu liegen. Am Beispiel einer Gleichung (4) sieht man, daß sie mit tieferen Fragen über die Gesamtheit der Lösungen von Funktionaldifferentialgleichungen zusammenhängt: Betrachtet man eine nahe  $\xi = 0$  lineare Funktion  $f$ , so besitzt (4) stets nichtverschwindende oszillierende Lösungen, die für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null gehen, weil die zugehörige charakteristische Gleichung (3) mit  $\alpha = f'(0)$  auch im Fall  $\alpha \geq \pi/2$  Lösungen mit negativem Real- und positivem Imaginärteil hat (Theorem 5 [42]). Ejektivität des trivialen Fixpunkts läßt sich für den Verschiebungsoperator nur beweisen, wenn im Definitionsbereich Trajektorienstücke  $x_t$  derartiger Lösungen nicht vorkommen.

Die eingangs erwähnten Populationsmodelle mit verteilten Verzögerungen führen auf Gleichungen der Form

$$(5) \quad \dot{x}(t) = -\alpha \int_{-1}^0 f(x(t+a)) d\nu(a),$$

die den Typ (4) verallgemeinern, oder in spezielleren Fällen auf

$$(6) \quad \dot{x}(t) = -\alpha \int_{-1}^0 x(t+a) d\nu(a) [1 + x(t)]$$

als Verallgemeinerung von (1);  $\nu$  ist jeweils ein positives Borelmaß auf dem Anfangsintervall  $[-1, 0]$  mit der Masse  $\nu([-1, 0]) = 1$ . Gleichung (6) läßt sich wieder durch  $x \mapsto \log(x+1)$  auf die Form (5) bringen.

Versucht man, für Gleichungen (5) oder (6) die Existenz periodischer Lösungen mit Satz 1 zu beweisen, so zeigt sich, daß der Ejektivitätsnachweis von Wright und Nussbaum nur für solche Maße geeignet ausgebaut werden kann, deren Träger nahe bei  $-1$  liegt [39]. Weitere Schwierigkeiten bereiten die erforderliche Untersuchung der charakteristischen Gleichung

$$(7) \quad \lambda + \alpha \int_{-1}^0 e^{\lambda a} d\nu(a) = 0,$$

siehe [41] und [15], und die Konstruktion eines Definitionsbereichs für den Verschiebungsoperator, der in sich abgebildet wird [39].

Zwei allgemeinere, nah verwandte Methoden, Ejektivität zu zeigen, stammen von Chow [3] und Hale. Hale formuliert in [19] einen Ejektivitätssatz für abstrakt definierte Verschiebungsoperatoren (Theorem 11.2.3); die Beweisidee besteht darin, ähnlich wie in [13] Theorem 3 [21] anzuwenden. Der Beweis selbst enthält allerdings eine Lücke. Wir gehen in Abschnitt I.3 der vorliegenden Arbeit näher darauf ein.

Will man für konkrete Funktionaldifferentialgleichungen, zu denen ein Verschiebungsoperator definiert ist, Ejektivität mit Hilfe von Theorem 3 [21] zeigen, so ist jeweils eine entscheidende Aussage zu verifizieren, die sich auf eine Lösung  $\lambda$  der charakteristischen Gleichung zur linearisierten Funktionaldifferentialgleichung bezieht, welche positiven Realteil hat. Zu  $\lambda$  gehört eine Projektion  $\pi_\lambda$  auf einen Eigenraum  $P_\lambda$ , bestehend aus den Trajektorienstücken von Lösungen der linearen Gleichung, die wie  $e^{\operatorname{Re} \lambda t}$  wachsen. Für die Projektion  $\pi_\lambda$  ist nachzuweisen, daß es ein  $\eta > 0$  gibt mit

$$(8) \quad 0 < \inf\{ \|\pi_\lambda \varphi\| \mid \|\varphi\| = \eta \wedge \varphi \in \tilde{K} \}$$

für eine gewisse Menge  $\tilde{K}$ , welche von Trajektorien der im Definitionsbereich des Verschiebungsoperators startenden oszillierenden Lösungen erreicht wird. Voraussetzungen dieser Art müssen auch bei der Anwendung von Theorem 2.1 [13] und Theorem 4.1 [3] über nicht-triviale Fixpunkte erfüllt sein. Sie lassen sich bei Gleichungen mit nur einer Zeitverzögerung wie (1) und (4) elegant mit der Integraldarstellung der Projektion durch die formaladjungierte Gleichung ([20], Lemma 7.3.4 [19]) ableiten, siehe [13], [3] und Abschnitt 11.4 [19].

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht eine andere Methode, die Aussagen vom Typ (8) und damit einen neuen Ejektivitätsbeweis liefert, der sich bei den oszillierenden Lösungen von Gleichungen der Form (5) mit verteilter Verzögerung anwenden läßt. Von der erwähnten Integraldarstellung machen wir keinen Gebrauch, weil sie für Gleichungen mit verteilter Verzögerung zu nicht weniger diffizilen Beweisen führt, deren Langwierigkeit dann nur technisch durch die Gestalt der abzuschätzenden Integrale bedingt zu sein scheint.

Die Ergebnisse, die wir auf dem Weg zum Ejektivitätsbeweis in Abschnitt II.6 erhalten, lassen sich in verschiedener Weise ausbauen. Interessant könnte vor allem eine weitere Untersuchung topologischer und geometrischer Eigenschaften der Mengen  $S(\omega, f)$  und  $S(\alpha, \operatorname{id})$  (Abschnitte II.3 - II.5) sein, in denen die Trajektorien der langsam schwingenden Lösungen (Abschnitt II.3) verlaufen.

Bei der Darstellung lassen wir uns von folgenden Aspekten leiten. Ejektivität ist bei Verschiebungsoperatoren in erster Linie eine Instabilitätseigenschaft der betrachteten Funktionaldifferentialgleichung. Deshalb sollten sich Sätze mit hinreichenden Bedingungen auf die Trajektorien der Lösungen beziehen, nicht auf einen Verschiebungsoperator und seine Iterierten. Ejektivität ist lokaler Natur, daher sollten sie ohne globale Voraussetzungen an die rechte Seite der Funktionaldifferentialgleichung auskommen, wie sie etwa für die Existenz periodischer Lösungen verlangt werden müssen. Ejektivität sollte auch für Gleichungen nachweisbar sein, von denen man bisher annimmt, daß sie unbeschränkte oszillierende Lösungen besitzen, jedoch keine periodischen.

Wir geben einen Überblick der vorliegenden Arbeit.

In Kapitel I wird der Ejektivitätsbegriff in Bezug auf die Lösungen von Funktionaldifferentialgleichungen formuliert. Eine entsprechende Definition für Flüsse gab Horn [22]. Abschnitt I.2 enthält die benötigten bekannten Resultate über lineare autonome Gleichungen. Wir wählen einen etwas anderen Zugang als Hale [19], der es ermöglicht, den Begriff der formaladjungierten Gleichung insbesondere bei der Untersuchung der Formel der Variation der Konstanten zu vermeiden, auf welche sich dann der Beweis von Lemma I.2 (Theorem 3 [21]) stützt. Aus Lemma I.2 folgt Satz I.1, der hinreichende Bedingungen für Ejektivität angibt. Satz I.1 ist ein allgemeiner formuliertes Analogon zu Hales Theorem 11.2.3 [19]. Um ihn beweisen zu können, verschärfen wir eine der Voraussetzungen in Hales Satz: Wir verlangen eine Aussage vom Typ (8) für eine Menge, welche die Endstücke kleiner Trajektorien enthält und die damit stärkere Invarianzeigenschaften aufweist als der Definitionsbereich eines Verschiebungsoperators.

Kapitel II enthält den eigentlichen Ejektivitätsbeweis. Wir stellen die Methode dar am Beispiel der Gleichungen

$$(\alpha, f) \quad \dot{x}(t) = -2\alpha \int_{-1}^{-1/2} f(x(t+a)) da$$

für  $\alpha > 0$  und für stetige Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f'(0) = 1$  und  $\xi f(\xi) > 0$  für  $\xi \neq 0$ . Darunter fallen Gleichungen, die ungedämpft oszillierende Lösungen besitzen, aber keine periodischen. Einfachster Fall: Die Gleichung  $(\alpha, id)$  mit  $\alpha > 2\pi^2/9$  derart, daß keine Lösung der charakteristischen Gleichung auf der imaginären Achse liegt. - Es ist zweckmäßig, als Linearisierung der Gleichungen  $(\alpha, f)$  nicht die lineare Gleichung  $(\alpha, id)$  selbst, sondern

ihre Fortsetzung

$$(\alpha)_{\mathbb{C}} \quad \dot{y}(t) = -2\alpha \int_{-1}^{-1/2} y(t+a) da$$

auf den Bereich komplexwertiger Lösungen anzusehen.

Die Wahl des Maßes, mit dem auf der rechten Seite von  $(\alpha, f)$  integriert wird, ermöglicht zunächst den Beweis von Satz II.1, der die Verteilung der Lösungen der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$\lambda + 2\alpha \int_{-1}^{-1/2} e^{\lambda a} da = 0$$

in der komplexen Ebene beschreibt. Überschreitet  $\alpha$  den Wert  $2\pi^2/9$ , so wandert ein Paar komplex konjugierter Lösungen  $\lambda_0(\alpha), \bar{\lambda}_0(\alpha)$  mit  $0 < \text{Im } \lambda_0(\alpha) < 2\pi$  in die rechte Halbebene. Weitere Paare mit positivem Realteil kommen erst für  $\alpha > 50\pi^2/9$  vor. Grundlage unseres Ejektivitätsbeweises ist die Beobachtung im Anschluß an Satz II.1, daß reelle Anfangsfunktionen  $\psi, \varphi$  in verschiedenen Eigenräumen  $P_\lambda + P_{\bar{\lambda}}, P_\mu + P_{\bar{\mu}}$  zu Lösungen  $x, y: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  der linearen Gleichung  $(\alpha, id)$  führen, die sich in ihrem Oszillationsverhalten unterscheiden.

Im nächsten Abschnitt II.3 benutzen wir die Translationsinvarianz des Maßes in  $(\alpha, f)$ , um für alle diese Gleichungen oszillierende Lösungen zu finden, für die der Abstand genügend großer benachbarter Nullstellen größer als  $2^{-1}$  ist. Die Trajektorienstücke aller derartigen "langsam schwingenden Lösungen" von  $(\alpha, f)$  werden in der Menge  $S(\alpha, f)$  zusammengefaßt. Die Beobachtung nach Satz II.1 bauen wir in Abschnitt II.4 zu einem Beweis der Tatsache aus, daß auf dem offenen Kegel  $S(\alpha, id)$  zur speziellen Gleichung  $(\alpha, id)$  die Projektion  $\pi_0(\alpha)$  nirgends verschwindet.

In Abschnitt II.5 untersuchen wir, welche Elemente  $\psi \in S(\alpha, f)$

zugleich Anfangswerte langsam schwingender Lösungen der linearen Gleichung  $(\alpha, id)$  sind. Solche Funktionen  $\mu$  liegen in  $S(\alpha, id)$ , folglich gilt für sie  $\pi_{\lambda_0}(\alpha)\mu \neq 0$ . Im nächsten Schritt schließen wir für Teilmengen  $S^*$  von  $S(\alpha, id)$ , deren Abschluß in  $S(\alpha, id) \cup \{0\}$  liegt, mit einem Kompaktheitsargument (Lemma II.11) aus dem Nichtverschwinden der Projektion  $\pi_{\lambda_0}(\alpha)$  auf eine Aussage vom Typ (8).

In Abschnitt II.6 weisen wir mit elementaren Methoden nach, daß in  $S(\alpha, f)$  startende genügend kleine Trajektorien zu Lösungen von  $(\alpha, f)$  eine Menge  $S_1(\alpha, f)$  erreichen und nicht mehr verlassen, für die nach II.5 eine Aussage vom Typ (8) gilt. Die Anwendung von Satz I.1 liefert den Ejektivitätssatz II.2, der ein Analogon zu Wrights Ergebnis einschließt: Zu jedem  $\alpha > 2\pi^2/9$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| > \varepsilon$  für alle langsam schwingenden Lösungen von  $(\alpha, f)$ .

In Kapitel III nehmen wir die Voraussetzung  $\inf f > -\infty$  hinzu, die die Lösungen von  $(\alpha, f)$  beschränkt macht, und leiten mit Hilfe von Satz 1 die Existenz einer langsam schwingenden periodischen Lösung ab. Die Definition des Verschiebungsoperators, der Nachweis von Stetigkeit und Kompaktheit geschieht nach den Vorarbeiten in Abschnitt II.3 auf die übliche, aus anderen Arbeiten wohlbekannte Weise. Jedoch bei der Übertragung der Ejektivität von  $\varphi = 0$  bezüglich  $S(\alpha, f)$  und  $(\alpha, f)$  (Satz II.2) auf den trivialen Fixpunkt des Verschiebungsoperators muß noch einmal Folgerung II.3 verwendet werden, die schon für den Beweis von Satz II.2 wesentlich war. Dies deutet darauf hin, daß Abschätzungen wie (S5) und (S6) auch in andersartigen Ejektivitätsbeweisen für Verschiebungsoperatoren nicht zu vermeiden sind. Ein Beispiel dafür bietet [39].

Unsere Methode läßt sich insbesondere auch bei den Differenz-Differentialgleichungen (4) anwenden. Die Beweise werden dann wesentlich kürzer.

Einen Beweis der Existenz periodischer Lösungen der Gleichung (6) für Maße, deren Träger in  $[-1, -2^{-1}]$  liegt, kündigt auch Hale an (Abschnitt 11.7 [19];[4]).

Herrn Prof.Dr.E. Wienholtz möchte ich hier danken, besonders für die guten Arbeitsbedingungen, die mir bei ihm geboten waren, und für sein ständiges Interesse, das er der Entstehung dieser Arbeit entgegenbrachte. Gefördert wurde sie auch durch die Diskussionen mit Herrn Dr. Peitgen während eines kurzen Aufenthalts am Sonderforschungsbereich 72 an der Universität Bonn im Herbst 1976. Ihm und Herrn Dr. Steinlein verdanke ich viele Einsichten in die asymptotische Fixpunkttheorie. Nicht zuletzt gilt mein Dank Prof. Hale. Ein Gespräch mit ihm und eine Studie von ihm und Dr. Chow regten mich zuerst zu dieser Arbeit an.

Bezeichnungen

Abschnitte, Sätze, Lemmata, Folgerungen, Bemerkungen, Abschätzungen und andere Aussagen sind in der Einleitung und in jedem der Kapitel I, II, III fortlaufend mit arabischen Ziffern numeriert. Bei Zitaten in anderen Kapiteln wird die Nummer des Kapitels vorangestellt, aus dem das Zitat stammt; für die Einführung steht ein E.

## Zahlen, Matrizen:

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	$:= \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
sgn	Vorzeichenfunktion; $\text{sgn } x :=  x ^{-1}x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet
$\text{Re } z$	den Realteil,
$\text{Im } z$	den Imaginärteil,
$\bar{z}$	die komplex konjugierte Zahl zu $z$ . Komplexe Zahlen schreiben wir oft
$\lambda = u + iv$	mit $u = \text{Re } \lambda$ , $v = \text{Im } \lambda$ . Für Teilmengen $Q, R$ von $\mathbb{R}$ setzen wir
$Q + iR$	$:= \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z \in Q \wedge \text{Im } z \in R\}$ .
$E$	Einheitsmatrix
$B^{\text{tr}}$	Transponierte der Matrix $B$
$\det B$	Determinante von $B$

## Normen:

$ \cdot $	steht für den Betrag in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ , für die euklidische Norm in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{C}^N$ ( $N \in \mathbb{N}$ ), für die Spektralnorm bei Matrizen ( $\ C\  := \sup_{\ z\ =1} \ Cz\ $ , falls $C$ $m \times N$ -Matrix mit komplexen Koeffizienten).
$\ \cdot\ $	Supremum-Norm auf Räumen stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen, Spektralnorm für stetige lineare Abbildungen von unendlichdimensionalen Banachräumen in normierte Räume.

## Folgen:

Die Indexmenge von Folgen wie

$(\varphi_n), (\alpha(n))$  ist stets  $\mathbb{N}$ .

## Topologie:

Für eine Teilmenge  $M$  eines topologischen Raums bezeichnet

$\bar{M}$  die abgeschlossene Hülle,

$\partial M$  den Rand.

## Abbildungen, Funktionen:

$p \circ q$  Komposition zweier Abbildungen  $p, q$

Für eine auf einer Menge  $D$  erklärte Abbildung  $x$  und für eine Teilmenge  $D' \subset D$  bezeichnet

$x|_{D'}$  die Einschränkung von  $x$  auf  $D'$ .

$\sup_{D'} |x| := \sup_{t \in D'} |x(t)|$

Für Infima, Maxima, Minima werden entsprechende Abkürzungen verwendet.

Ein Punkt wie bei

$\dot{x}(t)$  und ein Apostroph wie bei

$f'(\xi)$  bezeichnen die (als Element des Wertebereichs erklärte) Ableitung von Funktionen mit reellem Argument an der Stelle  $t$  bzw.  $\xi$ .

Für Funktionen  $g$ , die auf  $\mathbb{C}$  definiert sind, steht  $g'(z)$  für die komplexe Ableitung  $\lim_{z+\xi \rightarrow z} (g(\xi) - g(z))(\xi - z)^{-1}$  an der Stelle  $z$ .

Für vektor- oder matrixwertige Funktionen  $h$  auf einer Menge  $D \subset \mathbb{R}$  ist das Lebesgue-Integral

$\int_D h$  :=  $\int_D h(t) dt$  komponentenweise erklärt.

Sind  $N^2$  beschränkte Borel-Maße  $\nu_{j1}$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$  und  $l \in \{1, \dots, N\}$ , auf einem Intervall  $[-\tau, 0]$ ,  $\tau > 0$ , gegeben, so ist

$\int_{-\tau}^0 [d\nu(a)]h(a)$  für eine vektor- oder matrixwertige Funktion  $h$  jeweils im Sinn der Multiplikation von Matrizen mit Vektoren bzw. Matrizen erklärt. Beispiel: Für  $h: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{C}^N$  ist das angegebene Integral der Spaltenvektor in  $\mathbb{C}^N$  mit den Komponenten  $\sum_{j=1}^N \int_{-\tau}^0 [d\nu_{j1}(a)]h_j(a)$ .

Für eine skalare Funktion  $h$  ist

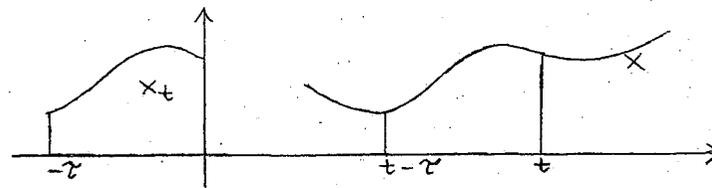
$\int_{-\tau}^0 h(a) d\nu(a)$  entsprechend der Multiplikation von komplexen Zahlen mit Matrizen erklärt.

$L_{loc}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{C}^N)$  ist die Menge der Lebesgue-meßbaren Funktionen  $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}^N$ , die über jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}_0^+$  Lebesgue-integrierbar sind.

## I. Autonome retardierte Funktionaldifferentialgleichungen

### 1. Definitionen

Sei  $\tau > 0$ . Ist  $x$  eine auf einer Menge  $J \subset \mathbb{R}$  gegebene Funktion, und liegt das Intervall  $[t-\tau, t]$  in  $J$ , so bezeichnet  $x_t$  die durch  $x_t(a) := x(t+a)$  auf  $[-\tau, 0]$  erklärte Funktion.



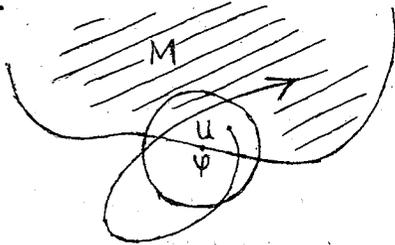
Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Mit  $X$  bezeichnen wir in Kapitel I den Banachraum der stetigen Funktionen  $\varphi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit Norm  $\|\varphi\| = \sup_{[-\tau, 0]} |\varphi|$ . Sei eine Abbildung  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^N$  gegeben. Unter einer Lösung der autonomen retardierten Funktionaldifferentialgleichung (F)  $\dot{x}(t) = F(x_t)$  verstehen wir eine stetige Funktion  $x: [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die auf  $\mathbb{R}^+$  differenzierbar ist und dort der Beziehung (F) genügt. Jede Lösung  $x$  definiert eine Familie (Trajektorie)  $(x_t)_{t \geq 0}$  im Raum  $X$ . Die Funktionen  $x_t$  nennen wir gelegentlich Trajektorienstücke von  $x$ . Wenn zu einer Anfangsfunktion  $\varphi \in X$  genau eine Lösung  $x$  von (F) mit  $x_0 = \varphi$  existiert, so bezeichnen wir diese auch mit  $x^\varphi$ .

Für jede Lösung  $x$  von (F) und für jedes  $t \geq 0$  ist die Funktion  $y: [-\tau, \infty) \ni s \mapsto x(t+s) \in \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (F) mit  $y_0 = x_t$ , da  $F$  nicht noch von  $t$  abhängt (Autonomie von (F)).

Definition 1. Sei  $M \subset X$  eine nichtleere Menge. Eine Funktion  $\varphi \in X$  heißt eektiv bezüglich (F) und M, wenn es eine Umgebung U von  $\varphi$  gibt, sodaß zu jeder Lösung x von (F) mit  $x_0 \in M \cap U \setminus \{\varphi\}$  ein  $t > 0$  mit  $x_t \notin U$  existiert.

Offenbar sind alle  $\varphi \in X \setminus \bar{M}$  eektiv bezüglich (F) und M. Zur Beziehung zwischen Eektivität und Instabilität sei folgendes bemerkt. Wenn zu jedem  $\varphi \in X$  eine Lösung x von (F) mit  $x_0 = \varphi$  existiert, wenn  $x:t \mapsto 0$  eine Lösung von (F) ist und wenn  $\tilde{\varphi} = x_0 = 0$  eektiv bezüglich (F) und einer Menge M mit  $\tilde{\varphi} = 0 \in \bar{M}$  ist, dann ist die triviale Lösung x instabil:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists (y \text{ Lösung von (F)}) \exists t > 0: \|y_0\| < \delta \wedge \varepsilon \leq \|y_t\|.$$



Aus der Autonomie von (F) folgt

Bemerkung 1. Sei  $\varphi$  eektiv bezüglich (F) und einer Menge M. Dann gibt es eine Umgebung U von  $\varphi$ , sodaß zu jeder Lösung x von (F) mit  $(t \geq 0 \Rightarrow \varphi + x_t \in M)$  eine Folge  $t_n \rightarrow \infty$  mit  $x_{t_n} \notin U$  existiert.

Mit Y bezeichnen wir in Kapitel I den Banachraum der stetigen Funktionen  $\psi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{C}^N$  mit Norm  $\|\psi\| = \sup_{[-\tau, 0]} |\psi|$ . Ist  $L: Y \rightarrow \mathbb{C}^N$  eine stetige und lineare Abbildung, so verstehen

wir unter einer Lösung der Gleichung

$$(L)_{\mathbb{C}} \quad \dot{y}(t) = Ly_t$$

eine stetige Funktion  $y: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{C}^N$ , die auf  $\mathbb{R}^+$  differenzierbar ist und dort der angegebenen Differentialgleichung genügt.

Ist die Abbildung  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^N$  gegeben, gilt  $F(0) = 0$ , und ist F an der Stelle  $\varphi = 0$  differenzierbar, so bezeichnen wir die zur komplex-linearen Fortsetzung  $L_F: Y \rightarrow \mathbb{C}^N$  der Ableitung  $DF(0): X \rightarrow \mathbb{R}^N$  definierte Gleichung  $(L_F)_{\mathbb{C}}$  als Linearisierung von (F).

## 2. Lineare Gleichungen.

Wir stellen hier einige Ergebnisse über die Gleichung  $(L)_{\mathbb{C}}$  zusammen. Dabei folgen wir zunächst der Darstellung in den Abschnitten 7.1, 7.2 und 7.4 von [19], welche auf die Arbeiten [17] von Hale und [20] von Hale und Meyer zurückgeht.

Zu jedem  $\varphi \in Y$  gibt es genau eine Lösung y von  $(L)_{\mathbb{C}}$  mit  $y_0 = \varphi$ , und die Gleichung  $T(t)\varphi = y_t$  definiert eine stark stetige Halbgruppe von linearen beschränkten Operatoren auf Y. Für  $t \geq \tau$  ist  $T(t)$  kompakt. Der Definitionsbereich der infinitesimalen Erzeugenden A besteht aus den stetig differenzierbaren  $\psi \in Y$  mit  $\dot{\psi}(0) = L\psi$ , und es gilt  $A\psi = \dot{\psi}$ . Wegen des Darstellungssatzes von Riesz gibt es zu L eine N-reihige Matrix  $\nu$  beschränkter Borel-Maße  $\nu_{1j}$  ( $1, j \in \{1, \dots, N\}$ ) auf  $[-\tau, 0]$  mit  $L\varphi = \int_{-\tau}^0 [d\nu(a)]\varphi(a)$  für alle  $\varphi \in Y$ . - Das Integral ist im Sinn der Multiplikation von Matrizen mit Spaltenvektoren erklärt, also durch

$\sum_{j=1}^N \int_{-\gamma}^0 [d\nu_{1j}(a)] \varphi_j(a)$ . Wir werden in Kapitel I stets den Matrizenkalkül benutzen, um übersichtliche Ergebnisse zu bekommen.

Mit  $\Delta(z, L) := zE - \int_{-\gamma}^0 e^{za} d\nu(a)$  für  $z \in \mathbb{C}$  erhält man nun, daß das Spektrum  $\sigma$  von  $A$  aus den Lösungen der "charakteristischen Gleichung"

$$(1) \quad \det \Delta(\lambda, L) = 0$$

besteht (Lemma 2.1, S. 168 [19]). Dem Beweis dieses Lemmas entnehmen wir, daß die Resolvente  $R_z = (A-z)^{-1}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ , gegeben ist durch die Formeln  $(R_z \psi)(a) = e^{za} \zeta + \int_0^a e^{z(a-\xi)} \psi(\xi) d\xi$  und  $\zeta = \Delta(z, L)^{-1} (-\psi(0) + \int_{-\gamma}^0 [d\nu(a)] (\int_0^a e^{z(a-\xi)} \psi(\xi) d\xi))$ .

Die Resolventen sind kompakt,  $\sigma$  ist folglich eine diskrete Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und enthält nur Eigenwerte. Rechts von jeder Parallelen zur imaginären Achse liegen höchstens endlich viele von ihnen.

Die verallgemeinerten Eigenräume und die zugehörigen Projektionsoperatoren definieren wir nun, anders als in [19], nach Kato [30] über das Resolventenintegral. Der Vorteil dieses Zugangs für unsere Zwecke zeigt sich später: Wir werden Lemma 1 in diesem Abschnitt und Lemma II.7 beweisen können, ohne von Eigenschaften der zu  $(L)_{\mathbb{C}}$  formaladjungierten Gleichung (siehe [20], oder Abschnitt 7.3 in [19]) Gebrauch zu machen. Damit dürfen wir in dieser Arbeit auf die Einführung dieses zusätzlichen Begriffs verzichten.

Ist  $\Lambda \subset \sigma$  endlich, und ist  $\Gamma$  eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in  $\mathbb{C} \setminus \sigma$ , die  $\Lambda$ , aber keine weiteren Punkte von  $\sigma$  im Inneren enthält, so ist der Operator  $\pi_{\Lambda} = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} R_z dz$  eine Projektion von  $Y$  auf einen Teilraum  $P_{\Lambda}$ , der invariant

unter  $A$  ist, und  $A|_{P_{\Lambda}}$  besitzt das Spektrum  $\Lambda$ . Der "komplementäre Teilraum"  $Q_{\Lambda} := (id - \pi_{\Lambda})Y$  ist ebenfalls invariant unter  $A$  (Theorem 6.17, S. 178 [30]). Wegen der Kompaktheit der Resolventen ist  $P_{\Lambda}$  von endlicher Dimension.

Enthält  $\Lambda$  nur einen Punkt  $\lambda$ , so schreiben wir  $P_{\lambda}$  und  $\pi_{\lambda}$ .

Bemerkung 2. Für  $\lambda \in \sigma$  und  $\mu \in \sigma \setminus \{\lambda\}$  gilt  $\pi_{\lambda} \pi_{\mu} = \pi_{\lambda}$  und  $\pi_{\mu} \pi_{\lambda} = 0$ . Ist  $\Lambda \subset \sigma$  endlich, so gilt  $\pi_{\Lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \pi_{\lambda}$ ; für alle  $t \geq 0$  sind  $T(t)$  und  $\pi_{\Lambda}$  vertauschbar, und  $P_{\Lambda}$  und  $Q_{\Lambda}$  sind invariant unter  $T(t)$ .

Wie in Abschnitt 7.2 [19] ergibt sich eine Darstellung der Halbgruppe auf den (verallgemeinerten) Eigenräumen: Zu einer Basis  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  von  $P_{\lambda}$ ,  $\lambda \in \sigma$ , existiert eine  $m$ -reihige Matrix  $B$  mit konstanten Koeffizienten mit  $A\phi = \phi B$ ; dabei wurden die Basiselemente  $\varphi_j$  zu einem Zeilenvektor  $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  zusammengefaßt.  $A\phi$  ist komponentenweise zu verstehen.  $B$  hat nur den Eigenwert  $\lambda$ , da das Spektrum von  $A|_{P_{\lambda}}$  gerade  $\{\lambda\}$  ist. Für alle Spaltenvektoren  $c \in \mathbb{C}^m$  und für alle  $t \geq 0$ ,  $a \in [-\gamma, 0]$  erhält man nun wie auf S. 170 [19]

$$(2) \quad (T(t)(\phi c))(a) = \phi(0) e^{(t+a)B} c.$$

Insbesondere gibt es zu jedem Basiselement  $\varphi = \varphi_j$  ein Polynom  $p$  vom Grad kleiner als  $m$  mit  $y^{\varphi}(t) = p(t) e^{\lambda t}$  für alle  $t \geq -\gamma$ .

B.W. Levinger [32] zeigte, daß die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen dieses Typs mit der Ordnung der Nullstelle  $\lambda$  von (1) übereinstimmt. Folglich gilt für alle  $\lambda \in \sigma$

$$(3) \quad \dim P_{\lambda} \leq \text{Ordnung der Nullstelle } \lambda \text{ von (1)}.$$

Auf den komplementären Teilräumen läßt sich das Anwachsen der Lösungen von  $(L)_{\mathbb{C}}$  abschätzen (Abschnitt 7.4 [19]):

Sei  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\Lambda := \{\lambda \in \mathcal{G} \mid u \leq \operatorname{Re} \lambda\}$ . Im Fall  $\mathcal{G} \setminus \Lambda \neq \emptyset$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $k > 0$  mit

$$(4) \quad \|\mathbb{T}(t)(\psi - \pi_{\Lambda}\psi)\| \leq k e^{(u-\varepsilon)t} \|\psi - \pi_{\Lambda}\psi\|$$

für alle  $\psi \in Y$  und für alle  $t \geq 0$ .

Wir benötigen später eine Aussage über stetige Abhängigkeit der Eigenwerte und Projektionen von  $L$ . Ist  $L': Y \rightarrow \mathbb{C}^N$  linear, stetig und von  $L$  verschieden, so bezeichne  $A'$  die infinitesimale Erzeugende der durch  $(L')$  definierten Halbgruppe.  $R'_z$  sei die Resolvente von  $A'$ ,  $\mathcal{G}'$  sei das Spektrum von  $A'$  und  $\pi'_{\lambda}$  die einem Eigenwert  $\lambda$  von  $A'$  zugeordnete Projektion.

Lemma 1. Sei  $\lambda \in \mathcal{G}$  eine einfache Nullstelle von  $\det \Delta(\cdot, L)$ . Dann gibt es eine offene Kreisscheibe  $D$  mit Mittelpunkt  $\lambda$  und eine Umgebung  $U$  von  $L$  mit  $\partial D \cap \mathcal{G}' = \emptyset$  für alle  $L' \in U$ , sodaß zu jedem  $L' \in U$  genau ein  $\lambda' \in D \cap \mathcal{G}'$  existiert. Ferner gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|L - L'\| < \delta \wedge L' \in U \Rightarrow \|\pi_{\lambda} - \pi'_{\lambda'}\| < \varepsilon$ .

Die Normen in Lemma 1 sind die üblichen für stetige lineare Abbildungen von  $Y$  in einen normierten Raum ( $\mathbb{C}^N$  beziehungsweise  $Y$ ). - Eine ähnliche Stetigkeitsaussage für Ein-Parameter-Familien  $(L(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{R}}$  macht auch Lemma 2.2, S. 171 [19]; in den Beweis gehen Eigenschaften der formaladjungierten Gleichung ein. Unser Lemma 1 wäre eine Konsequenz von Theorem 3.16, S. 212 [30], wenn man wüßte, daß die Abbildung  $L' \mapsto A'$  stetig ist bezüglich der gap-Topologie auf den abgeschlossenen linearen Operatoren in  $Y$ . Wir geben hier einen anderen, direkten Beweis, der nur auf der Definition der Projektionen durch das Resolventenintegral beruht.

Beweis von Lemma 1:

a) Offenbar ist die Abbildung  $\Delta: (z, L') \mapsto \Delta(z, L')$  stetig.

Sei  $D$  eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $\lambda$  und mit  $D \setminus \{\lambda\} \subset \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$ , also mit  $\det \Delta(z, L) \neq 0$  für alle  $z \in \partial D$ . Wegen der Kompaktheit von  $\partial D \times \{L\}$  findet man eine Umgebung  $U$  von  $L$  mit  $\det \Delta(z, L') \neq 0$  und  $|\Delta(z, L')^{-1}| < 2 \max_{\zeta \in \partial D} |\Delta(\zeta, L)^{-1}| =: \rho$  für alle  $z \in \partial D$  und alle  $L' \in U$ . Die Behauptung über  $\lambda'$  folgt nun leicht mit Satz (9.17.4) aus [10]. - Wir verwenden hier für Matrizen ebenfalls die Spektralnorm.

b) Für  $L' \in U$  folgt  $\pi'_{\lambda'} = -(2\pi i)^{-1} \int_{\partial D} R'_z dz$ , daher

$$(5) \quad \|\pi_{\lambda} - \pi'_{\lambda'}\| \leq c_1 \sup_{\partial D} \|R_z - R'_z\|$$

mit einer von  $L' \in U$  unabhängigen Zahl  $c_1$ . Abschätzung der rechten Seite: Sei  $z \in \partial D$ ,  $L' \in U$ , und sei  $\psi \in Y$  mit  $\|\psi\| = 1$  gegeben. Für  $\varphi := R_z \psi = (A - z)^{-1} \psi$  folgt  $\dot{\varphi} = \psi + z\varphi$  und  $\dot{\varphi}(0) = L\varphi$ . Entsprechendes gilt für  $\varphi' := R'_z \psi$ . Sei  $\eta := \varphi' - \varphi$ . Folgt  $\dot{\eta} = z\eta$  und  $\dot{\eta}(0) = L'\varphi' - L\varphi = L'\eta + (L' - L)\varphi$ . Daher existiert ein  $c \in \mathbb{C}^N$  mit  $\eta(a) = e^{za}c$  für  $a \in [-\tau, 0]$ . Man rechnet leicht nach, daß  $\Delta(z, L') \cdot c = (L' - L)\varphi$  gilt. Mit  $\|\psi\| = 1$ ,  $z \in \partial D$  und  $L' \in U$  folgt

$$|c| \leq |\Delta(z, L')^{-1}| \|L' - L\| \|\varphi\| \leq \rho \|L' - L\| \|R_z\|.$$

Also gilt für alle  $z \in \partial D$ ,  $L' \in U$ :

$$\|R_z - R'_z\| \leq \rho \|L' - L\| \sup_{\partial D \times [-\tau, 0]} |e^{za}| \sup_{\partial D} \|R_z\|.$$

Mit (5) schließt man auf die Stetigkeitsbehauptung von Lemma 1.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, gilt für die stetigen, auf  $\mathbb{R}^+$  differenzierbaren Funktionen  $x: [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^N$ , welche der inhomogenen linearen Funktionaldifferentialgleichung

$$(6) \quad \dot{x}(t) = Lx_t + g(t)$$

mit  $L: Y \rightarrow \mathbb{C}^N$  linear und stetig,  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{C}^N)$ , auf  $\mathbb{R}^+$  genügen, eine Formel der Variation der Konstanten

$$(7) \quad x_t = T(t)x_0 + \int_0^t U_{t-s}g(s)ds$$

für  $t \geq 0$ .

Dabei ist  $(T(t))_{t \geq 0}$  die durch  $(L)_\mathbb{C}$  definierte Halbgruppe.  $U$  ist die eindeutig bestimmte, auf  $\mathbb{R}^+$  stetige Abbildung von  $[-\tau, \infty)$  in die komplexen  $N$ -reihigen Matrizen mit

$$U(t) = E + \int_0^t \left( \int_{-\tau}^0 [d\nu(a)]U(s+a) \right) ds \quad \text{für } t \geq 0,$$

$$U(0) = E, \quad U(a) = 0 \quad \text{für } a \in [-\tau, 0).$$

Die Matrix  $\nu$  ist  $L$  wie auf S. 19 zugeordnet. Das Integral in (7) ist durch  $(\int_0^t U_{t-s}g(s)ds)(a) = \int_0^t U_{t-s}(a)g(s)ds$  für alle  $a \in [-\tau, 0]$  definiert. - Beweise von (7) finden sich in Abschnitt 6.2 von [19], siehe auch Abschnitt 4 in [40].

Die Formel (7) ermöglicht es, die skizzierte lineare Theorie zum Beweis von Stabilitätsaussagen für nichtlineare Gleichungen einzusetzen. Das Instabilitätsergebnis von Hale und Perello, das wir im nächsten Abschnitt wiedergeben, beruht auf einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung, die sich mit Hilfe von (7) ergibt, wenn man die Trajektorie  $(x_t)_{t \geq 0}$  einer Lösung  $x$  von (6) auf einen Eigenraum  $E_\lambda$  zur linearen Gleichung  $(L)_\mathbb{C}$  projiziert: Ist  $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  eine Basis von  $E_\lambda$ , so erfüllt die durch  $\pi_\lambda x_t = \phi y(t)$  definierte stetige Funktion  $y: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}^m$  die Gleichung

$$(8) \quad \dot{y}(t) = By(t) + Cg(t)$$

mit einer  $m \times m$ -Matrix  $C$ , die nur von  $L$ ,  $\lambda$  und  $\phi$  abhängt ( $B$  ist dabei wie auf S. 21 so zu  $\phi$  bestimmt, daß (2) gilt).

Die Beziehung (8) bewiesen Hale und Meyer [20] (siehe auch Abschnitt 7.6 [19]). Sie benutzten dazu Eigenschaften der zu  $(L)_\mathbb{C}$  formaladjungierten Gleichung. Da die übrigen Resultate der linearen Theorie, die wir benötigen, ohne diesen Begriff gezeigt werden können, wollen wir skizzieren, wie man (8) auf naheliegende Weise aus der Definition der Projektion über das Resolventenintegral ableiten kann:

a) Wendet man  $\pi_\lambda$  auf (7) an, so folgt mit (2)

$$(9) \quad \phi y(t) = \phi e^{Bt}y(0) + \pi_\lambda \left( \int_0^t U_{t-s}g(s)ds \right) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Da die Spalten  $(U^j)_{t-s}$  von  $U_{t-s}$  für kleine  $t - s$  unstetig sind, lassen sich Projektion und Integral nicht vertauschen.

b) Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}$  setzen wir die Resolvente  $R_z$  von  $A$  vermöge der Formeln auf S. 20 zu einer Abbildung  $\tilde{R}_z$  auf den Raum  $\tilde{Y}$  der beschränkten Borel-meßbaren Funktionen  $\varphi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{C}^N$  fort. Man sieht leicht

$$(10) \quad \tilde{R}_z \tilde{Y} \subset Y;$$

(11) für jede punktweise gegen ein  $\varphi \in \tilde{Y}$  konvergente, gleichmäßig beschränkte Folge  $(\varphi_n)$  und für jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}$  geht  $\|\tilde{R}_z \varphi_n - \tilde{R}_z \varphi\|$  gleichmäßig in  $z \in K$  gegen Null;

(12) die Abbildungen  $z \mapsto \tilde{R}_z \varphi \in Y$  sind stetig.

Nun läßt sich durch  $\tilde{\pi}_\lambda \varphi = -(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \tilde{R}_z \varphi dz$  die Projektion ebenfalls auf  $\tilde{Y}$  fortsetzen, mit  $\tilde{\pi}_\lambda \tilde{Y} \subset Y$  sowie  $\|\tilde{\pi}_\lambda \varphi_n - \tilde{\pi}_\lambda \varphi\| \rightarrow 0$  für jede punktweise gegen ein  $\varphi \in \tilde{Y}$  konvergente, gleichmäßig beschränkte Folge  $(\varphi_n)$ .

c) Zu jedem  $j \in \{1, \dots, N\}$  wählen wir eine beschränkte Folge  $(\varphi_n^j)$  in  $Y$ , die punktweise gegen  $(U^j)_0$  geht. Nach b) folgt

$$\|\tilde{\pi}_\lambda \varphi_n^j - \tilde{\pi}_\lambda(U^j)_0\| = \|\tilde{\pi}_\lambda \varphi_n^j - \tilde{\pi}_\lambda(U^j)_0\| \rightarrow 0; \text{ also}$$

$$(13) \quad \tilde{\pi}_\lambda(U^j)_0 \in \bar{P}_\lambda = P_\lambda.$$

Man kann zeigen, daß die Lösungen  $x^{jn}$  von  $(L)_\mathbb{C}$  mit Anfangswert  $\varphi_n^j$  für jedes  $t > 0$  gleichmäßig auf  $[0, t]$  gegen  $U^j$  konvergieren (dazu beachte man die Äquivalenz von  $(L)_\mathbb{C}$  mit der Integralgleichung  $x(t) = x(0) + \int_0^t L(x_s) ds$ ). Insbesondere konvergiert für  $0 \leq t$  die in  $Y$  beschränkte Folge  $((x^{jn})_t)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $(U^j)_t$ , und man erhält aus b) mit

$$T(t)\tilde{\pi}_\lambda \varphi_n^j = T(t)\pi_\lambda \varphi_n^j = \pi_\lambda T(t)\varphi_n^j = \tilde{\pi}_\lambda(x^{jn})_t:$$

$$(14) \quad T(t)\tilde{\pi}_\lambda(U^j)_0 = \tilde{\pi}_\lambda(U^j)_t \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Insbesondere:  $\tilde{\pi}_\lambda(U^j)_t \in P_\lambda$  für alle  $t \geq 0$ , wegen (13) und der Invarianz von  $P_\lambda$  unter  $T(t)$ . Mit dem Satz von Fubini zeigt man

$$(15) \quad (\pi_\lambda(\int_0^t U_{t-s} g(s) ds))(a) = \int_0^t \sum_{j=1}^N g_j(s) (\tilde{\pi}_\lambda(U^j)_{t-s})(a) ds$$

für alle  $t \geq 0$ ,  $a \in [-\tau, 0]$ .

d) Wegen (13) gibt es zu  $\Phi$  eine  $m \times N$ -Matrix  $C$  mit Komponenten  $c_{1j}$ ,

$$\text{sodaß für jedes } j \in \{1, \dots, N\} \text{ gilt } \tilde{\pi}_\lambda(U^j)_0 = \sum_{i=1}^m \varphi_{1i} c_{ij}.$$

Aus (15), (14) folgt damit

$$(\pi_\lambda(\int_0^t U_{t-s} g(s) ds))(a) = \int_0^t \Phi(a) e^{(t-s)B} C g(s) ds, \text{ und aus (9)}$$

wird nun

$$\Phi y(t) = \Phi e^{tB} y(0) + \Phi \int_0^t e^{(t-s)B} C g(s) ds. \text{ Da } \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \text{ eine}$$

Basis ist, folgt für alle  $t \geq 0$  die zu (8) äquivalente Integralgleichung.

### 3. Liapunov-Funktional und Ejektivität

Wir betrachten die Gleichung (F) für eine stetige, an der Stelle  $\varphi = 0$  differenzierbare Abbildung  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit  $F(0) = 0$ .

Ejektivität der Anfangsfunktion  $\varphi = 0$  bezüglich (F) und einer Menge  $M \subset X$ , deren Abschluß  $\varphi = 0$  enthält, ist nach Abschnitt 1 nur zu erwarten, wenn ein Eigenwert der infinitesimalen Erzeugenden  $A_F$  der von  $(L_F)_\mathbb{C}$  definierten Halbgruppe positiven Realteil hat: Wenn das Spektrum  $\sigma(A_F)$  nur aus Eigenwerten mit negativem Realteil besteht, so ist nach (4) die lineare Gleichung  $(L_F)_\mathbb{C}$  asymptotisch stabil; dies überträgt sich auf die Gleichung (F). Für Funktionaldifferentialgleichungen beweist man diesen Störungssatz ebenso wie die bekannte Version für gewöhnliche Differentialgleichungen (z.B. Satz VII, S. 215 in [38]), siehe Kapitel 18 in [18] sowie S. 5 in [40]. - Gibt es keinen Eigenwert mit positivem Realteil, dann kann die triviale Lösung von (F) stabil sein. Dies ist etwa für lineare F der Fall.

Besitzt nun  $A_F$  einen Eigenwert mit positivem Realteil, so läßt sich ein Liapunov-Funktional  $V$  konstruieren, das entlang der Trajektorien  $(x_t)_{t \geq 0}$  zu Lösungen  $x$  von (F) wächst, solange diese klein genug bleiben und solange  $V$  selbst eine von  $\|x_t\|$  abhängige Mindestgröße besitzt. Dieses Ergebnis von Hale und Perello [21] wird in etwas geänderter Form als Lemma 1.1, S. 232, und als Lemma 2.1, S. 251, in [19] wiedergegeben. Wir fassen die von uns benötigten Eigenschaften des Liapunov-Funktional zusammen in

Lemma 2. Sei  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig und bei  $\varphi = 0$  differenzierbar. Es gelte  $F(0) = 0$ . Sei  $\lambda \in \sigma(A_F)$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  gegeben.

Dann existiert ein Liapunov-Funktional  $V: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit folgenden Eigenschaften.

- i)  $s \geq 0 \wedge \varphi \in X \Rightarrow V(s\varphi) = s^2 V(\varphi)$ .
- ii) Es gibt positive Zahlen  $c_1, c_2$  mit  
 $c_1 \|\pi_\lambda \varphi\|^2 \leq V(\varphi) \leq c_2 \|\pi_\lambda \varphi\|^2$  für alle  $\varphi \in X$   
 ( $\pi_\lambda$  bezeichnet die zu  $A_F$  und  $\lambda$  gehörige Projektion).
- iii)  $\exists c > 0 \forall p \in (0,1) \exists \delta_p > 0 \forall (x \text{ Lösung von (F)})$ :  
 $\|x_0\| \leq \delta_p \wedge p^2 \|x_0\|^2 \leq V(x_0) \Rightarrow cV(x_0) \leq \dot{V}(x,0)$   
 (mit  $\dot{V}(x,t) = \lim_{0 < h \rightarrow 0} h^{-1}(V(x_{t+h}) - V(x_t))$ ).

Beweis nach [21]: Man wählt in  $P_\lambda = \pi_\lambda Y$  eine Basis  $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ .

Zu  $(L_F)_\phi$ ,  $\lambda$  und  $\phi$  gibt es eine  $m \times m$ -Matrix  $B$ , die nur den Eigenwert  $\lambda$  besitzt und für welche die Beziehung (2) richtig ist.

Zu  $B$  existiert eine positiv definite hermitesche  $m \times m$ -Matrix  $D$  mit

$$(16) \quad B^{\text{tr}} D + D B^{\text{tr}} = E$$

(Beweis:  $D := \int_0^\infty Y^{\text{tr}}(t) Y(t) dt$  mit  $Y(0) = E$ ,  $\dot{Y}(t) = Y(t)(-B)$  für  $t > 0$  - vergleiche Satz XII, S. 78 in [31]).

Man definiert  $V$  durch die Gleichungen  $\pi_\lambda \varphi = \phi b$ ,  $V(\varphi) = b^{\text{tr}} D b$  mit Spaltenvektoren  $b \in \mathbb{C}^m$ .

Offenbar gilt Behauptung i).

Zu ii): Mit  $\beta := (\inf\{b^{\text{tr}} D b \mid |b| = 1\})^{1/2} > 0$  und

$\rho := \inf\{\|\phi b\| \mid b \in \mathbb{C}^m \wedge |b| = 1\} > 0$  gilt für alle  $\varphi \in X$   
 $\|\pi_\lambda \varphi\|^2 = \|\phi b\|^2 \leq c' |b|^2 \leq c' \beta^{-1} V(\varphi)$ , wobei  $c'$  nur von  $\phi$  abhängt, sowie

$$V(\varphi) = b^{\text{tr}} D b \leq |D| |b|^2 \leq |D| \rho^{-2} \|\phi b\|^2 = |D| \rho^{-2} \|\pi_\lambda \varphi\|^2.$$

- Wir verwenden wieder die Spektralnorm für Matrizen.

Zu iii):

a) Ist  $x$  eine Lösung von (F), so gilt für die durch  $\pi_\lambda x_t = \phi y(t)$  definierte Funktion  $y: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}^m$  wegen (8) - mit  $g(t) = F(x_t) - L_F x_t$  und wegen der Stetigkeit von  $F$  -

$$(17) \quad \dot{y}(t) = B y(t) + C(F(x_t) - L_F x_t) \quad \text{für } t > 0, \pi_\lambda x_0 = \phi y(0),$$

mit einer  $m \times n$ -Matrix  $C$ , die nur von  $\lambda, \phi$  und  $L_F$  abhängt.

Sei  $\tilde{g}(\varphi) := C(F(\varphi) - L_F \varphi)$  für  $\varphi \in X$ . Da  $F(0) = 0$ , und da  $F$  bei

$\varphi = 0$  differenzierbar ist, existiert eine stetige Funktion

$\eta: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\eta(0) = 0$  und

$$(18) \quad |\tilde{g}(\varphi)| \leq \eta(\delta) \|\varphi\| \quad \text{für alle } \varphi \in X \text{ mit } \|\varphi\| \leq \delta$$

für alle  $\delta > 0$ .

b) Sei  $\gamma := \sup\{b^{\text{tr}} D b \mid |b| = 1\} > 0$ . Zu  $p \in (0,1)$  wählt man

ein  $\delta_p > 0$  mit  $4\gamma |D| \eta(\delta_p) < p\beta$ . - Sei  $x$  eine Lösung von (F) mit  $\|x_0\| \leq \delta_p$  und  $p^2 \|x_0\|^2 \leq V(x_0)$ .

Wegen (17) und  $V(x_h) - V(x_0) = y(h)^{\text{tr}} D y(h) - y(0)^{\text{tr}} D y(0)$  für  $h > 0$  existiert  $\dot{V}(x,0)$  und ist gleich

$$\dot{y}(0)^{\text{tr}} D y(0) + y(0)^{\text{tr}} D \dot{y}(0) =$$

$$y(0)^{\text{tr}} D y(0) + \tilde{g}(x_0)^{\text{tr}} D y(0) + y(0)^{\text{tr}} D \tilde{g}(x_0) \quad (\text{mit (17), (16)})$$

$$\geq \gamma^{-1} V(x_0) - 2\eta(\delta_p) \|x_0\| |D| \beta^{-1} V^{1/2}(x_0) \quad (\text{mit } V(x_0) = y(0)^{\text{tr}} D y(0)$$

$$\text{und (18), } \|x_0\| \leq \delta_p)$$

$$\geq \gamma^{-1} V(x_0) (1 - 2^{-1} p \|x_0\| V^{-1/2}(x_0)) \quad (\text{nach Wahl von } \delta_p)$$

$$\geq (2\gamma)^{-1} V(x_0) \quad (\text{mit } p^2 \|x_0\|^2 \leq V(x_0)).$$

Die Autonomie von (F) liefert

Bemerkung 3. Für jede Lösung  $x$  von (F) ist die Funktion

$t \mapsto V(x_t)$ ,  $t > 0$ , differenzierbar mit Ableitung

$t \mapsto \dot{V}(x(\cdot+t), 0)$ .

Satz 1. Sei  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig und an der Stelle  $\varphi = 0$  differenzierbar. Es gelte  $F(0) = 0$ . Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A_F$  mit positivem Realteil.

Sei  $M$  eine nichtleere Teilmenge von  $X$ . Es gebe eine Menge  $M_1$  in  $X \setminus \{0\}$  mit folgenden Eigenschaften.

- i)  $s > 0 \wedge \varphi \in M_1 \Rightarrow s\varphi \in M_1$ .
- ii)  $0 < \inf\{\|\pi_\lambda \varphi\| \mid \varphi \in M_1 \wedge \|\varphi\| = 1\}$  für die zu  $\lambda$  und  $A_F$  gehörende Projektion  $\pi_\lambda$ .
- iii) Es gibt ein  $\delta > 0$ , sodaß zu jeder Lösung  $x$  von (F) mit  $x_0 \in M$  und  $\sup_{[-t_x, \infty)} |x| < \delta$  ein  $t_x \geq 0$  existiert mit  $t_x \leq t \Rightarrow x_t \in M_1$ .

Dann ist  $\varphi = 0$  ektiv bezüglich (F) und  $M$ .

Beweis: Zu  $\lambda$  gibt es ein Liapunov-Funktional  $V$  gemäß Lemma 2.

Aussage ii) von Lemma 2 und Voraussetzung ii) des Satzes geben  $0 < \inf\{V(\varphi) \mid \varphi \in M_1 \wedge \|\varphi\| = 1\}$ ; mit  $0 \notin M_1$ , Aussage i) von Lemma 2 und Voraussetzung i) folgt  $0 < V|M_1$ . - Wir wählen ein  $p \in (0, 1)$  mit  $p^2 < \inf\{V(\varphi) \mid \varphi \in M_1 \wedge \|\varphi\| = 1\}$  und zu  $p$  ein  $\delta_p$  nach Aussage iii) von Lemma 2.

Wir nehmen an, die Behauptung von Satz 1 sei falsch. Dann

existiert eine Lösung  $x$  von (F) mit  $0 \neq x_0 \in M \cap U$ ,

$U := \{\varphi \in X \mid \|\varphi\| < \min\{\delta, \delta_p\}\}$ , und mit  $x_t \in U$  für alle  $t \geq 0$ .

Wegen Voraussetzung iii) gibt es ein  $t_x$  mit  $x_t \in M_1 \cap U$  für  $t \geq t_x$ .

Wegen Voraussetzung i) und der Wahl von  $p$  gilt für  $t \geq t_x$

$V(x_t) = \|x_t\|^2 V(\|x_t\|^{-1} x_t) > \|x_t\|^2 p^2$ . Mit  $\|x_t\| < \delta_p$  liefert

Aussage iii) von Lemma 2  $cV(x_t) \leq \dot{V}(x(\cdot+t), 0)$  für alle  $t \geq t_x$ .

Mit Bemerkung 3 und  $0 < V|M_1$  folgt daher

$0 < e^{c(t-t_x)} V(x_{t_x}) \leq V(x_t)$  für alle  $t \geq t_x$ , im Widerspruch zu

$V(x_t) \leq c_2 \|\pi_\lambda x_t\|^2 \leq c_2 \delta^2$  für alle  $t \geq 0$  (mit  $\|\pi_\lambda\| = 1$  und mit Aussage ii) von Lemma 2).

Nachbemerkung: Der Beweis von Satz 1 beruhte offenbar darauf, daß die Voraussetzung ii) für eine Menge  $M_1$  verlangt wird, welche von allen kleinen, in  $M$  startenden Trajektorien erreicht und nicht mehr verlassen wird. Diese Invarianzeigenschaft - die die Menge  $M$  nicht besitzen muß - ermöglicht es, die Differentialgleichung  $cV(x_t) \leq \dot{V}(x(\cdot+t), 0)$  zum Ektivitätsbeweis auszunutzen.

In Theorem 11.2.3 [19] wird das Analogon zu unserer Bedingung ii) nur für den Definitionsbereich  $K$  des Verschiebungsoperators vorausgesetzt. In den bekannten Beispielen wird diese Menge  $K$  von den zu betrachtenden Trajektorien nur für eine diskrete Folge  $(t_n)$  mit  $t_n \rightarrow \infty$  erreicht.

Will man Theorem 11.2.3 beweisen, so ergibt sich, wenn  $x$  eine Lösung der nichtlinearen Funktionaldifferentialgleichung mit  $x_0 \in K$  und  $0 < \|x_0\| < \delta_0$  ist, die erforderliche Differentialgleichung aus  $p^2 \|x_0\|^2 < V(x_0)$  zunächst nur für  $t = 0$ . Mit Stetigkeitsargumenten läßt sie sich noch für kleine positive  $t$  nachweisen. Aber es ist nicht möglich, allein mit diesen letzten Informationen und mit Lemma 2 (oder mit dem schwächeren Lemma 11.2.1 in [19]) auf ein Wachsen von  $V$  längs  $(x_t)_{t \geq 0}$  zu schließen, solange  $\|x_t\| \leq \delta_0$  bleibt. Hier liegt eine nach unserer Auffassung entscheidende Schwäche des Beweises von Theorem 11.2.3 [19].

II. Ungedämpft schwingende Lösungen von nichtlinearen  
Funktionaldifferentialgleichungen mit verteilter Verzögerung

1. Die Gleichung  $(\alpha, f)$

In Kapitel II verwenden wir die Bezeichnungen  $X$  und  $Y$ , spezieller als in Kapitel I, für die Banachräume der stetigen Funktionen auf  $[-1, 0]$  mit Werten in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ .

Wir untersuchen die Gleichung

$$(\alpha, f) \quad \dot{x}(t) = -2\alpha \int_{-1}^{-1/2} f(x(t+a)) da$$

mit  $\alpha > 0$  für stetige Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die der Voraussetzung

$$(H1) \quad \xi f(\xi) > 0 \text{ für alle } \xi \neq 0, f \text{ an der Stelle } \xi = 0 \text{ differenzierbar mit } f'(0) = 1$$

genügen. In dieser Funktionenklasse liegt insbesondere  $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Mit  $I := [-1, -2^{-1}]$  und  $I(t) := [t-1, t-2^{-1}]$  für  $t \geq 0$  schreiben wir für das Integral in der Gleichung  $(\alpha, f)$  auch

$$\int_I f(x(t+a)) da, \int_{t-1}^{t-1/2} f(x(s)) ds, \int_{I(t)} f \circ x.$$

Lemma 1. Zu jeder Funktion  $\varphi \in X$  gibt es genau eine Lösung

$x^\varphi: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  von  $(\alpha, f)$  mit  $(x^\varphi)_0 = \varphi$ . Für jede Lösung  $x$  von

$(\alpha, f)$  gilt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  und zu jedem  $t > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$\sup_{[-1, t]} |x - x^\varphi| + \sup_{(0, t]} |\dot{x} - \dot{x}^\varphi| < \varepsilon$$

für alle Lösungen  $x^\varphi$  von  $(\beta, f)$  mit  $\|\varphi - x_0\| + |\beta - \alpha| < \delta$  (stetige Abhängigkeit von Anfangswert und Parameter).

Den Beweis erhält man aus der für  $t \in [0, 2^{-1}]$  geltenden Formel

$$x^\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t (-2\alpha \int_I f(\varphi(s+a)) da) ds$$

durch Iteration.

Für die Linearisierung

$$(\alpha)_\mathbb{C} \quad \dot{y}(t) = -2\alpha \int_I y(t+a) da$$

von  $(\alpha, f)$  gilt offenbar

Bemerkung 1. Sei  $\psi \in Y$ . Dann stimmt die Lösung  $x^{\text{Re } \psi}$  von  $(\alpha, \text{id})$  mit dem Realteil der Lösung  $y^\psi$  von  $(\alpha)_\mathbb{C}$  überein. Für jedes  $\varphi \in X \subset Y$  ist die Lösung  $x^\varphi$  von  $(\alpha, \text{id})$  Lösung von  $(\alpha)_\mathbb{C}$ .

Wir bezeichnen die zu  $(\alpha)_\mathbb{C}$  gehörende Halbgruppe mit  $(T_\alpha(t))_{t \geq 0}$ , ihre infinitesimale Erzeugende mit  $A_\alpha$  und deren Spektrum mit  $\sigma_\alpha$ .  $\pi_\lambda$  sei im folgenden die zu  $A_\alpha$  und einem Eigenwert  $\lambda \in \sigma_\alpha$  nach Kapitel I definierte Projektion.

2. Eigenwerte

Das - nur Eigenwerte enthaltende - Spektrum  $\sigma_\alpha$  besteht nach Abschnitt I.2 aus den Nullstellen der ganzen Funktion

$$\xi_\alpha: z \mapsto z + 2\alpha \int_{-1}^{-1/2} e^{za} da.$$

Bemerkung 2.  $\lambda \in \sigma_\alpha \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_\alpha$ .

Wir beschreiben nun  $\sigma_\alpha$ . Wegen Bemerkung 2 beschränken wir uns auf Eigenwerte mit nichtnegativem Imaginärteil. Zum Beweis des nachfolgenden Satzes verwenden wir die gleiche Methode wie bei der Untersuchung der Gleichung  $\lambda + \alpha \int_{-1}^0 e^{\lambda a} da = 0$  in [41].

Satz 1. Sei  $\alpha > 0$ . Dann gibt es kein  $\lambda = u + iv \in \sigma_\alpha$  mit  $v = 2\pi k$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Es gilt:

- i) In jedem Streifen  $\mathbb{R} + i(2\pi k, 2\pi k + 2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , gibt es genau einen Eigenwert  $\lambda_k(\alpha) = u_k(\alpha) + iv_k(\alpha)$ . Dieser ist eine ein-

fache Nullstelle von  $g_\alpha$ .

Mit  $\alpha_k := 2^{-1}(2\pi k + \pi + (-1)^{k+1}3^{-1}\pi)^2$  für  $k \in \mathbb{N}$  gilt

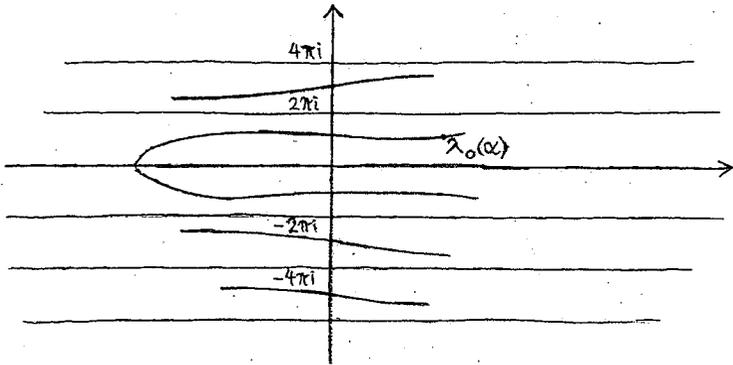
$\alpha < \alpha_k \Rightarrow u_k(\alpha) < 0$ ,  $u_k(\alpha_k) = 0$ ,  $\alpha_k < \alpha \Rightarrow 0 < u_k(\alpha)$ .

ii) Für  $\alpha < \alpha_0 := 2\pi^2/9$  haben alle Eigenwerte in  $\mathbb{R} + i[0, 2\pi)$  negativen Realteil. Mit  $\alpha^* := \max_{u < 0} u^2/(2e^{-u} - 2e^{-u/2})$  gilt: Für  $\alpha^* < \alpha$  gibt es genau einen Eigenwert

$\lambda_0(\alpha) = u_0(\alpha) + iv_0(\alpha)$  in  $\mathbb{R} + i[0, 2\pi)$ . Es ist  $0 < v_0(\alpha)$ .

$\lambda_0(\alpha)$  ist einfache Nullstelle von  $g_\alpha$ , und es gilt

$\alpha^* < \alpha_0$ ,  $u_0(\alpha_0) = 0$ ,  $\alpha_0 < \alpha \Rightarrow 0 < u_0(\alpha)$ .



Beweis: Aus

$$(1) \quad 0 = \lambda + 2\alpha \int_{\mathbb{I}} e^{\lambda a} da = g_\alpha(\lambda)$$

für  $\lambda \in \mathcal{G}_\alpha$  folgt

$$(2) \quad \lambda \in \mathcal{G}_\alpha \wedge 0 \leq u \Rightarrow u \leq |\lambda| \leq \alpha.$$

Es gilt

$$(3) \quad \alpha < \pi/2 \wedge \lambda \in \mathcal{G}_\alpha \Rightarrow u < 0.$$

(Beweis: Sei  $g_\alpha(u+iv) = 0$ .  $\alpha < \pi/2$  und  $0 \leq u$  geben  $|v| =$

$|2\alpha \int_{\mathbb{I}} e^{ua} \sin(va) da| < \pi/2$ , also  $-\int_{\mathbb{I}} e^{ua} \cos(va) da < 0$  im Widerspruch zu  $0 \leq u = -2\alpha \int_{\mathbb{I}} e^{ua} \cos(va) da$ .)

Aus (1) ersieht man  $0 \notin \mathcal{G}_\alpha$ . Daher:  $\lambda \in \mathcal{G}_\alpha \Leftrightarrow$

$$(4) \quad \lambda^2 + 2\alpha(e^{-\lambda/2} - e^{-\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(5) \quad u^2 - v^2 + 2\alpha(e^{-u/2} \cos(v/2) - e^{-u} \cos v) = 0 \quad \wedge$$

$$(6) \quad 2uv + 2\alpha(e^{-u} \sin v - e^{-u/2} \sin(v/2)) = 0.$$

Beweis der ersten Aussage von Satz 1: Für  $u + 2\pi ik \in \mathcal{G}_\alpha$ ,

$k \in \mathbb{N}$ , folgt aus (6)  $u = 0$ , also mit (5):  $(2\pi k)^2/(2\alpha) = \cos(\pi k) - \cos(2\pi k) = \cos(\pi k) - 1 \leq 0$ , Widerspruch.

Der Beweis der Aussagen i) und ii) erfordert mehrere Schritte.

a)  $v > 0 \wedge iv \in \mathcal{G}_\alpha \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0: \alpha = \alpha_k \wedge v^2 = 2\alpha)$ .

Beweis: Sei zunächst  $2\pi k < v < 2\pi k + 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $iv \in \mathcal{G}_\alpha$ . Folgt  $\pi k < v/2 < \pi k + \pi$ ,  $2\pi k < (v/2) + \pi k < 2\pi k + \pi$ . Sei noch  $k$  gerade. Dann gilt  $\sin(v/2) = \sin((v/2) + \pi k)$ . Mit  $2\pi k < (v/2) + \pi k < 2\pi k + \pi$  folgt

$$(7) \quad 0 < \sin((v/2) + \pi k) = \sin(v/2) = \sin v,$$

letzteres nach (6). - Daher  $2\pi k < v < 2\pi k + \pi$ . Wegen  $\pi k < v/2$  ist  $(v/2) + \pi k < v$ . Zusammen:  $2\pi k < (v/2) + \pi k < v < 2\pi k + \pi$ .

Der Graph von  $\sin$  ist symmetrisch bezüglich  $2\pi k + (\pi/2)$ , deswegen folgt nun aus (7)

$$v - (2\pi k + (\pi/2)) = 2\pi k + (\pi/2) - ((v/2) + \pi k), \text{ also}$$

$v = 2\pi k + (2\pi/3)$ . - Mit  $\cos(\pi k + (\pi/3)) = \cos(\pi/3)$  und mit  $\cos(2\pi k + (2\pi/3)) = -\cos(\pi/3)$  folgt aus (5)

$$v^2/(2\alpha) = 2 \cos(\pi/3) = 1, \text{ daher } v^2 = 2\alpha \text{ und } \alpha = \alpha_k.$$

Sei  $k$  ungerade. Es ist  $2\pi k + \pi < (v/2) + \pi(k+1) < 2\pi k + 2\pi$ , und wegen (6) und  $(k+1)$  gerade gilt

$$(8) \quad \sin v = \sin(v/2) = \sin((v/2) + \pi(k+1)) < 0.$$

Aus (8) und  $v/2 < \pi k + \pi$  folgt

$2\pi k + \pi < v < (v/2) + \pi(k+1) < 2\pi k + 2\pi$ . Die Symmetrie von  $\sin$  bezüglich  $2\pi k + (3\pi/2)$  liefert nun mit (8)

$2\pi k + (3\pi/2) - v = (v/2) + \pi k + \pi - (2\pi k + (3\pi/2))$ . Folgt  
 $v = 2\pi k + (4\pi/3)$ . Gleichung (5),  $\cos v = \cos(4\pi/3) = \cos(2\pi/3)$   
 und  $\cos(v/2) = \cos(\pi + (2\pi/3))$  ergeben dann  $v^2 = 2\alpha$  und  $\alpha = \alpha_k$ .

Die andere Implikation in a) bestätigt man durch nachrechnen.

b) Wir bezeichnen die eindeutig bestimmte Zahl  $v \in (2\pi k, 2\pi k + 2\pi)$

mit  $iv \in \mathcal{G}_{\alpha_k}$  durch  $v_k$ . Wir setzen  $I_0 := (-2\pi, 2\pi)$ ,  $G_0 := \mathbb{R} + iI_0$   
 und  $I_k := (2\pi k, 2\pi k + 2\pi)$ ,  $G_k := \mathbb{R} + iI_k$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

$Z(\alpha, k)$  bezeichnet die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Nullstellen von  $g_\alpha$  in  $G_k$ .

c) Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $\alpha \leq \alpha_k \wedge \lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_\alpha \Rightarrow u \leq 0$ .

Beweis: Sei  $\alpha \leq \alpha_k$ ,  $0 < u$ ,  $\lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_\alpha$ . Dann existiert auch ein  $\alpha' < \alpha_k$  und ein  $\lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_{\alpha'}$  mit  $0 < u$ . Wegen (3) folgt  $1 < \pi/2 \leq \alpha'$ . Nach (2) gilt  $\lambda \in (0, \alpha' + 1) + iI_k =: B$ , daher  $\mathcal{G}_{\alpha'} \cap B \neq \emptyset$ . Für  $1 \leq \alpha \leq \alpha'$  ist  $\mathcal{G}_\alpha \cap \partial B = \emptyset$  (mit der ersten Aussage von Satz 1, mit (2), a) und  $\alpha < \alpha_k$ . Im Fall  $k = 0$  ist noch Bemerkung 2 zu verwenden.).

Mit Hilfe von Satz (9.17.4) aus [10] folgt, daß auch  $g_1$  eine Nullstelle mit positivem Realteil hat im Widerspruch zu (3).

d) Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 < \alpha$ . Es gibt ein  $T(\alpha, k) < 0$  mit

$$\alpha \leq \alpha' \wedge \lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_{\alpha'} \wedge u < 0 \Rightarrow T(\alpha, k) < u.$$

Beweis: Sei  $\alpha \leq \alpha'$ ,  $\lambda \in \mathcal{G}_{\alpha'}$ . Mit (4):

$$1 + (u^2 + v^2)e^{u/2}(2\alpha)^{-1} \geq 1 + (u^2 + v^2)e^{u/2}(2\alpha')^{-1} \geq$$

$$|\lambda^2 e^{\lambda/2}(2\alpha')^{-1} + 1| = |e^{-\lambda/2}| = e^{-u/2}.$$

Für  $v \in I_k$  folgt weiter

$$u^2(2\alpha)^{-1} \geq e^{-u/2} - 1 - (2\pi k + 2\pi)^2(2\alpha)^{-1}. \text{ Man sieht, daß die}$$

Menge der  $u < 0$ , die dieser Abschätzung genügen, beschränkt ist.

e) Zu jedem  $k \in \mathbb{N}_0$  existiert ein  $\alpha_k^* > \alpha_k$  mit

$$\alpha_k^* \leq \alpha \wedge \lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_\alpha \Rightarrow 0 < u.$$

Beweis: Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Angenommen, es gibt Folgen  $\alpha(n)$ ,  $(\lambda_n)$  mit  $\alpha_k < \alpha(n) \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_n \in G_k \cap \mathcal{G}_{\alpha(n)}$ ,  $u_n \leq 0$ . Mit a) folgt aus  $\alpha_k < \alpha(n)$ :  $u_n < 0$ . Wir leiten einen Widerspruch ab.

Mit d) geben  $1 < \alpha_k < \alpha(n)$  und  $u_n < 0$  mit Hilfe von (4)

$$1 + ((2\pi k + 2\pi)^2 + T(1, k)^2)(2\alpha(n))^{-1} \geq 1 + (v_n^2 + u_n^2)e^{u_n/2}(2\alpha(n))^{-1} \geq e^{-u_n/2} \quad (\text{Dies folgt wie die}$$

analoge Abschätzung im Beweis von d)). Für  $n \rightarrow \infty$  geht daher

$u_n$  gegen Null (mit  $u_n < 0$ ). Da  $v_n \in I_k$ , dürfen wir noch

$v_n \rightarrow v \in \bar{I}_k$  annehmen. Also  $\lambda_n \rightarrow iv$ .

Falls  $v = 0$  oder  $v = 2\pi j$  mit  $j$  ungerade, so konvergiert

$$2 \int_I e^{\lambda n a} da \text{ gegen } 1 \text{ oder gegen } 2(2\pi j i)^{-1}(e^{-\pi j i} - e^{-2\pi j i}) =$$

$$(\pi j i)^{-1}(e^{-\pi i} - 1) \neq 0. \text{ Mit } \alpha(n) \rightarrow \infty, \lambda_n \rightarrow iv \text{ und}$$

$$\lambda_n + 2\alpha(n) \int_I e^{\lambda n a} da = 0 \text{ erhält man einen Widerspruch.}$$

Im Fall  $0 \neq v \in I_k$  betrachten wir die zu (4) äquivalente Gleichung

$$\lambda_n^2 e^{\lambda_n/2} - 1 = \alpha(n)(e^{-\lambda_n/2} - 1). \text{ Die linke Seite bleibt}$$

für  $n \rightarrow \infty$  beschränkt. Mit  $e^{-\lambda_n/2} - 1 \rightarrow e^{-iv/2} - 1 \neq 0$  folgt

ein Widerspruch zu  $\alpha(n) \rightarrow \infty$ .

Im Fall  $v = 4\pi j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , betrachten wir die aus (4) folgende

Gleichung

$$2\alpha(n)e^{-\lambda_n/2} = \lambda_n^2 e^{\lambda_n/2} + 2\alpha(n). \text{ Mit } u_n < 0 \text{ ergibt sich}$$

$$|2\alpha(n)|^2 \leq |(\lambda_n e^{\lambda_n/4})^2 + 2\alpha(n)|^2.$$

Wir setzen  $z_n := \lambda_n e^{\lambda_n/4}$ ,  $\beta_n := 2\alpha(n)$  und bekommen mit  $r_n := \text{Re } z_n$  und  $s_n := \text{Im } z_n$

$$\beta_n^2 \leq |z_n|^4 + \beta_n^2 + 2\beta_n(r_n^2 - s_n^2), \text{ also}$$

$2\beta_n(s_n^2 - r_n^2) \leq |z_n|^4$ . Wegen  $u_n \rightarrow 0$ ,  $v_n \rightarrow v$  ist  $|z_n|^4$  unabhängig von  $n$  beschränkt. Für  $n \rightarrow \infty$  geht

$r_n = e^{u_n/4}(u_n \cos(v_n/4) - v_n \sin(v_n/4))$  gegen  $-v \sin(v/4)$ , und  $s_n$  geht gegen  $v \cos(v/4)$ .

Also  $s_n^2 - r_n^2 \rightarrow v^2(\cos^2(v/4) - \sin^2(v/4)) = v^2 \neq 0$  (mit  $v = 4\pi j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ). Daher  $2\beta_n(s_n^2 - r_n^2) \rightarrow \infty$ , Widerspruch.

f) Die komplexe Ableitung  $g'_{\alpha_k}(iv_k)$  verschwindet für kein  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Beweis: Für  $z \neq 0$  gilt (partielle Integration)

$$g'_{\alpha}(z) = 1 + 2\alpha \int_{\mathbb{I}} a e^{za} da = 1 + 2\alpha z^{-1}(-2^{-1}e^{-z/2} + e^{-z} - \int_{\mathbb{I}} e^{za} da).$$

Für  $g_{\alpha}(\lambda) = 0$  und  $\lambda \neq 0$  folgt

$$g'_{\alpha}(\lambda) = 1 + 2\alpha \lambda^{-1}(e^{-\lambda} - 2^{-1}e^{-\lambda/2}) + 1.$$

Gleichung (4) liefert  $2\alpha e^{-\lambda/2} = 2\alpha e^{-\lambda} - \lambda^2$ . Damit:

$$g'_{\alpha}(\lambda) = 2 + \lambda 2^{-1} + \alpha e^{-\lambda} \lambda^{-1}. \text{ Für } \lambda = iv, \alpha = v^2/2 \text{ ergibt sich}$$

$$g'_{\alpha}(iv) = 2 + iv 2^{-1}(1 - e^{-iv}) \text{ und } \operatorname{Im} g'_{\alpha}(iv) = v 2^{-1}(1 - \cos v).$$

Wegen  $0 < v_0 < 2\pi$  und  $v_k \in I_k$  ist der letzte Ausdruck für  $v = v_k$ ,

$\alpha = \alpha_k$  nicht Null.

$$g) Z(\alpha_0, 0) = 2. \forall k \in \mathbb{N}: Z(\alpha_k, k) = 1.$$

Beweis: Auf  $G_0 \cap i\mathbb{R}$  besitzt  $g_{\alpha_0}$  nach a) und f) genau zwei

Nullstellen,  $iv_0$  und  $-iv_0$ . Nullstellen in  $G_0$  mit  $u > 0$  gibt es

wegen c) nicht. Wir nehmen an, es gebe ein  $\lambda \in G_0 \cap \mathcal{G}_{\alpha_0}$  mit  $u < 0$ .

Dann existiert auch ein  $\alpha' \in (\alpha_0, \alpha_0^*)$  und ein  $\lambda \in G_0 \cap \mathcal{G}_{\alpha'}$  mit

$u < 0$ .  $\lambda$  liegt in  $B := (T(\alpha_0, 0), 0) + iI_0$ , wegen d).

Für  $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha_0^*$  ist  $\partial B \cap \mathcal{G}_{\alpha} = \emptyset$  (mit Bemerkung 2, mit der ersten

Aussage von Satz 1, mit d) und  $\alpha_0 < \alpha$ , sowie mit  $\alpha_0 < \alpha$  und a)).

Es folgt  $B \cap \mathcal{G}_{\alpha_0^*} \neq \emptyset$ , Widerspruch zu e).

Für  $k \in \mathbb{N}$  verläuft der Beweis analog.

$$h) \forall \alpha > 0: Z(\alpha, 0) = 2. \forall \alpha > 0 \forall k \in \mathbb{N}: Z(\alpha, k) = 1.$$

Beweis: Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha_k < \alpha$  (Für  $\alpha < \alpha_k$  verläuft der Beweis analog).

Es gibt ein  $T > 0$  mit

$$(9) \quad \alpha_k \leq \alpha' \leq \alpha \wedge \lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_{\alpha'} \Rightarrow |\lambda| < T,$$

wegen (2) und d). Sei  $B := (-T, T) + iI_k$ . Für  $\alpha_k \leq \alpha' \leq \alpha$  ist

$\partial B \cap \mathcal{G}_{\alpha'} = \emptyset$ . Nun folgt die Behauptung mit dem schon mehrfach verwendeten Homotopieargument aus g) und aus (9).

j) Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Wegen a) und c) folgt  $u < 0$  für  $\lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_{\alpha}$  mit

$\alpha < \alpha_k$ . Sei nun  $\alpha_k < \alpha$ . Wir setzen  $B := (T(\alpha, k), 0) + iI_k$ .

Wegen e) gibt es ein  $\tilde{\alpha} \geq \alpha$  mit  $B \cap \mathcal{G}_{\tilde{\alpha}} = \emptyset$ . Für  $\alpha \leq \alpha' \leq \tilde{\alpha}$  ist

auch  $\partial B \cap \mathcal{G}_{\alpha'} = \emptyset$  (mit a) und  $\alpha_k < \alpha'$ , mit der ersten Aussage

von Satz 1, und mit d); für  $k = 0$  ist noch Bemerkung 2 zu beachten).

Also  $B \cap \mathcal{G}_{\alpha} = \emptyset$ . Mit d) folgt daraus, daß es kein

$\lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_{\alpha}$  mit  $u < 0$  gibt. Somit gilt  $0 \leq u$  für die (eindeutig

bestimmte) Nullstelle  $\lambda \in G_k \cap \mathcal{G}_{\alpha}$ . Aus a) und  $\alpha_k < \alpha$  folgt  $0 < u$ .

k) Für reelle  $u \in \mathcal{G}_{\alpha}$  folgt aus  $u + 2\alpha \int_{\mathbb{I}} e^{ua} da = 0: u < 0$ .

Mit (5) ergibt sich  $\alpha \leq \alpha^*$ . Wir zeigen  $\alpha^* \leq 2/e$  (Daraus folgt

$\alpha^* < \alpha_0$ , und  $\lambda_0(\alpha)$  ist insbesondere für  $\alpha > 2$  definiert.):

Sei  $u < 0$ . Dann gibt es ein  $\xi \in \mathbb{I}$  mit

$$u^2(2e^{-u} - 2e^{-u/2})^{-1} = -u(2 \int_{\mathbb{I}} e^{ua} da)^{-1} = -ue^{-u\xi}.$$

Die Funktion  $t \rightarrow -te^{-t\xi}$ ,  $t < 0$ , ist durch  $2/e$  nach oben be-

schränkt. Also  $\alpha^* = \sup_{u < 0} u^2(2e^{-u} - 2e^{-u/2})^{-1} \leq 2/e$ .

Aus Teil k) des Beweises von Satz 1 folgt

Bemerkung 3.  $\lambda_0(\alpha)$  ist für  $\alpha > 2$  definiert.

Wir wollen später Satz I.1 auf die Gleichung  $(\alpha, f)$  mit der Linearisierung  $(\alpha)_0$  anwenden. Nach Satz 1 gibt es für  $\alpha \leq 2\pi^2/9$

keinen Eigenwert von  $A_{\alpha}$  mit positivem Realteil; für

$2\pi^2/9 < \alpha < 50\pi^2/9 = \alpha_1$  haben nur die Eigenwerte  $\lambda_0(\alpha)$ ,  $\bar{\lambda}_0(\alpha)$

positiven Realteil. Deshalb werden wir zum Nachweis der Voraussetzung ii) von Satz I.1 die Projektion  $\pi_{\lambda_0(\alpha)}$ ,  $\alpha > 2\pi^2/9$ , untersuchen. Insbesondere müssen wir Teilmengen von  $X$  finden, auf denen diese Projektion nirgends verschwindet.

Folgerung 1. Sei  $\alpha > 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ , oder sei  $\alpha > \alpha^*$  und  $k = 0$ .

Dann gilt  $\dim P_{\lambda_k(\alpha)} = 1 = \dim P_{\bar{\lambda}_k(\alpha)}$ . Zu jedem  $\varphi \in P_{\lambda_k(\alpha)} + P_{\bar{\lambda}_k(\alpha)}$

gibt es reelle Zahlen  $a, b$  mit

$$t \geq 0 \Rightarrow y^{\operatorname{Re} \varphi}(t) = \operatorname{Re} y^\varphi(t) = \operatorname{Re}(T_\alpha(t)\varphi)(0) = e^{u_k(\alpha)t} (a \cos(v_k(\alpha)t) + b \sin(v_k(\alpha)t))$$

für die Lösungen  $y^{\operatorname{Re} \varphi}$  und  $y^\varphi$  von  $(\alpha)_\mathbb{C}$ . Im Fall  $\operatorname{Re} \varphi \neq 0$  gilt

$a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ .

Beweis:  $\lambda_k(\alpha)$  und  $\bar{\lambda}_k(\alpha)$  sind einfache Nullstellen von  $g_\alpha$  (mit  $g'_\alpha(\bar{z}) = \overline{g'_\alpha(z)}$ ). Daher folgt die Dimensionsaussage aus (I.3).

Aus ihr ergibt sich mit (I.2) und Bemerkung 1 die Gleichung für

$y^{\operatorname{Re} \varphi}(t)$  mit reellen Zahlen  $a, b$ ; außerdem:  $\operatorname{Re} \varphi(a) =$

$e^{u_k(\alpha)t} (a \cos(v_k(\alpha)t) + b \sin(v_k(\alpha)t))$  für  $t \in [-1, 0]$ . Die letzte

Gleichung liefert  $(a, b) \neq (0, 0)$  für  $\operatorname{Re} \varphi \neq 0$ .

Da für  $v > 2\pi$  die Funktion  $h: t \mapsto a \cos(vt) + b \sin(vt)$  eine Folge  $z_j \rightarrow \infty$  von Nullstellen mit  $0 < z_{2j} - z_{2j-1} < 2^{-1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  besitzt, existiert zu jeder reellen Lösung  $y$  von  $(\alpha)_\mathbb{C}$  mit

$y_t \in P_{\lambda_k(\alpha)} + P_{\bar{\lambda}_k(\alpha)}$  für alle  $t \geq 0$ ,  $k \geq 1$ , eine solche Folge

von Nullstellen, nach Folgerung 1 mit  $v_k(\alpha) > 2\pi$  für  $k \geq 1$ .

Dies läßt vermuten, daß  $\pi_{\lambda_0(\alpha)}\varphi \neq 0$  oder  $\pi_{\bar{\lambda}_0(\alpha)}\varphi \neq 0$  gilt für die

Anfangswerte  $\varphi = y_0$  von reellen Lösungen  $y$ , für welche der Abstand je zwei verschiedener Nullstellen größer als  $2^{-1}$  ist.

Zum Beweis bietet sich folgende Überlegung an. Angenommen,  $y$  ist eine solche Lösung mit  $(\pi_{\lambda_0(\alpha)} + \pi_{\bar{\lambda}_0(\alpha)})\varphi = 0$ . Wenn es unter den  $\lambda_j(\alpha)$ ,  $j \geq 1$ , genau eines - etwa  $\lambda_k(\alpha)$  - mit maximalem Realteil gibt, so wende man die Abschätzung (I.4) an auf  $\varphi - \pi_\Lambda \varphi$  mit  $\Lambda = \{\mu \in \mathbb{C} \mid u_k(\alpha) \leq \operatorname{Re} \mu\}$ . Wegen der Annahme gilt  $\varphi - \pi_\Lambda \varphi = \varphi - (\pi_{\lambda_k(\alpha)} + \pi_{\bar{\lambda}_k(\alpha)})\varphi$ , und (I.4) liefert mit  $y(t) = (T_\alpha(t)\varphi)(0) = \operatorname{Re}(T_\alpha(t)\varphi)(0)$  und mit Folgerung 1  $e^{-u_k(\alpha)t} y(t) - a \cos(v_k(\alpha)t) - b \sin(v_k(\alpha)t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Wenn  $\operatorname{Re} \pi_\Lambda \varphi \neq 0$ , so ist  $(a, b) \neq (0, 0)$ , und wir erhalten mit  $v_k(\alpha) > 2\pi$  aus der Konvergenzaussage, daß  $y$  in jedem Halbstrahl  $[t, \infty)$  Nullstellen  $z \neq z'$  mit  $|z - z'| < 2^{-1}$  besitzt, Widerspruch.

Diese Überlegung verwendet zwei unbewiesene Annahmen, die auch nicht aus  $(\pi_{\lambda_0(\alpha)} + \pi_{\bar{\lambda}_0(\alpha)})\varphi = 0$  folgen. Wir werden sie mit zusätzlichen Stetigkeitsargumenten umgehen.

### 3. Langsam schwingende Lösungen

Wir untersuchen ähnlich wie bei den Beweisen von Lemma 5 in [42], Lemma 2.3 in [34], Lemma 2 und Lemma 3 in [39] mit elementaren Methoden Lösungen der im allgemeinen nichtlinearen Gleichung  $(\alpha, f)$ , welche oszillieren und für die der Abstand sukzessiver Nullstellen genügend groß, größer als  $2^{-1}$ , bleibt. Zusammen mit Abschnitt 2 bildet diese Untersuchung die Grundlage unseres Ejektivitätsbeweises.

Bemerkung 4. Zu jeder stetigen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit (H1) und zu jedem  $\alpha > 2$  gibt es ein  $\eta > 0$  mit  $(0 < |\xi| \leq \eta \Rightarrow 2\alpha^{-1}|\xi| < |f(\xi)|)$ .

Lemma 2. Sei  $x$  eine Lösung von  $(\alpha, f)$  mit  $\alpha > 2$ . Sei  $x(t) \neq 0$  für ein  $t \geq -1$ . Dann gibt es ein  $s > t$  mit  $\operatorname{sgn} x(s) = -\operatorname{sgn} x(t)$ .

Beweis: Sei  $x$  eine Lösung von  $(\alpha, f)$  mit  $\alpha > 2$ , und sei  $x(t) < 0$  mit  $t \geq -1$ . (Im anderen Fall verläuft der Beweis genauso.) Wir nehmen  $x|_{[t, \infty)} \leq 0$  an. Mit  $f|_{\mathbb{R}^-} < 0$  liefert die Differentialgleichung  $(\alpha, f)$

$$(10) \quad 0 \leq \dot{x} \text{ in } (t+1, \infty).$$

a) Im Fall  $x(t+1) = 0$  folgt aus (10) und aus der Annahme  $x = 0$  in  $[t+1, \infty)$ , also  $\dot{x} = 0$  in  $(t+1, \infty)$ . Wegen  $x(t) < 0$ ,  $x|_{[t, t+1]} \leq 0$  gibt  $(\alpha, f)$  andererseits  $0 < \dot{x}(t+1+\varepsilon)$  für kleine positive  $\varepsilon$ ; Widerspruch.

b) Im Fall  $x(t+1) < 0$  und  $z := \sup\{s > t+1 \mid x|_{[t+1, s]} < 0\} < \infty$  ist  $x = 0$  in  $[z, \infty)$ , also  $\dot{x} = 0$  in  $(z, \infty)$ . Im Widerspruch dazu folgt mit  $(\alpha, f)$  aus  $x < 0$  in  $[t+1, z)$  und aus  $x \leq 0$  in  $[z-2^{-1}, z]$ , daß  $\dot{x}(z+2^{-1})$  positiv ist.

c) Im Fall  $x(t+1) < 0$  und  $z = \infty$ , also  $x < 0$  in  $[t+1, \infty)$ , existiert wegen (10) ein  $q \leq 0$  mit  $x(s) \rightarrow q$  für  $s \rightarrow \infty$ . Integration der Differentialgleichung gibt

$$x(n+1) - x(n) = \int_n^{n+1} (-2\alpha \int_{\mathbb{I}} f(x(s+a)) da) ds \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht die linke Seite gegen 0 und die rechte gegen  $-\alpha f(q)$ , daher  $q = 0$ . - Wir wählen zu  $f$  und  $\alpha > 2$  ein  $\eta > 0$  gemäß Bemerkung 4. Wegen  $0 = q = \lim_{s \rightarrow \infty} x(s)$  gibt es ein  $t_0 \geq t+1$  mit  $-\eta \leq x < 0$  in  $[t_0, \infty)$ .

Für  $t_0 + 1 \leq s \leq t_0 + 2^{-1}$  und  $a \in \mathbb{I}$  gilt  $t_0 \leq s+a \leq t_0 + 1$ , also  $-\eta < x(s+a) \leq 0$  und daher nach Bemerkung 4 und (10)

$$-2\alpha^{-1}x(t_0+1) \leq -2\alpha^{-1}x(s+a) = 2\alpha^{-1}|x(s+a)| < |f(x(s+a))|.$$

Es folgt

$$x(t_0+2^{-1}) - x(t_0+1) = \int_{t_0+1}^{t_0+(3/2)} \dot{x} = \int_{t_0+1}^{t_0+(3/2)} (-2\alpha \int_{\mathbb{I}} f(x(s+a)) da) ds > \int_{t_0+1}^{t_0+(3/2)} 2\alpha^{-1}(-2\alpha^{-1}x(t_0+1)) ds = -x(t_0+1)$$

im Widerspruch zu  $x(t_0+2^{-1}) \leq 0$ .

Im Beweis des nächsten Lemma nutzen wir wesentlich aus, daß das Maß in der rechten Seite der Gleichung  $(\alpha, f)$  translationsinvariant ist.

Lemma 3. Sei  $x$  eine Lösung von  $(\alpha, f)$  mit  $\alpha > 2$ . Sei  $x_0 \neq 0$ , und gelte  $0 \leq x|_{\mathbb{I}}$ ,  $x|_{[-2^{-1}, 0]} \leq 0$ . Dann gibt es eine Folge von Nullstellen  $z_j = z_j(x)$  und eine Folge von lokalen Extrema  $m_j = m_j(x)$  von  $x$  mit den Eigenschaften

$$\text{i)} \quad x \leq 0 \text{ in } [-2^{-1}, z_1], \quad 0 < x \text{ in } (z_1, z_2),$$

$$z_1 + 2^{-1} \leq m_1 < \min\{z_1+1, z_2\};$$

$$\text{ii)} \quad 0 \leq \dot{x} \text{ in } (z_1, m_1], \quad \dot{x} < 0 \text{ in } (m_1, z_2];$$

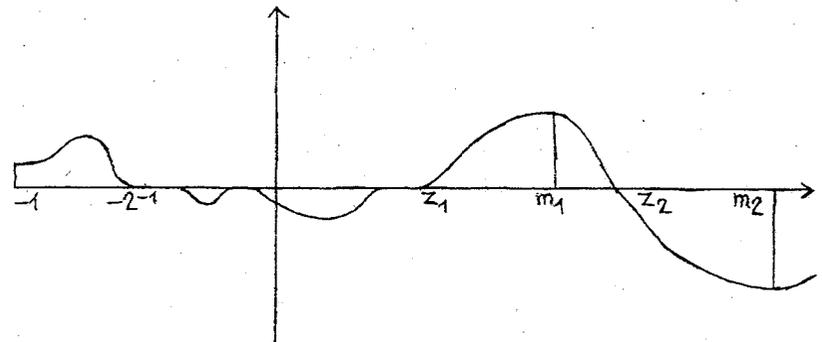
$$\text{iii)} \quad z_j + 2^{-1} < m_j < \min\{z_j+1, z_{j+1}\} \text{ für } j \in \mathbb{N} \text{ und } j \geq 2,$$

$$0 < x \text{ in } (z_j, z_{j+1}) \text{ für } j \in \mathbb{N} \text{ ungerade,}$$

$$x < 0 \text{ in } (z_j, z_{j+1}) \text{ für } j \in \mathbb{N} \text{ gerade;}$$

$$\text{iv)} \quad \dot{x} < 0 \text{ in } (m_j, m_{j+1}) \text{ für } j \in \mathbb{N} \text{ ungerade,}$$

$$0 < \dot{x} \text{ in } (m_j, m_{j+1}) \text{ für } j \in \mathbb{N} \text{ gerade.}$$



Beweis: Sei  $\alpha > 2$ , und sei  $x$  eine Lösung von  $(\alpha, f)$ , die den Voraussetzungen genügt.

a)  $z_1 := \inf\{t > 0 \mid 0 < x(t)\}$  ist endlich.

Beweis: Für  $x(t) < 0$  mit  $-2^{-1} < t \leq 0$  folgt dies aus Lemma 2. Andernfalls gilt  $x|_{[-2^{-1}, 0]} = 0$  und  $0 < x(t)$  mit  $t \in I$ ; nach Lemma 2 existiert ein  $s > 0$  mit  $x(s) < 0$  und zu  $s$  ein  $s' > s$  mit  $x(s') > 0$ .

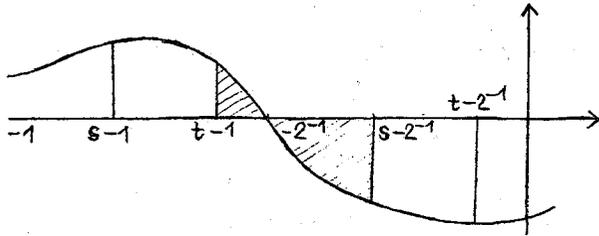
b) In  $(0, 2^{-1}]$  wächst  $\dot{x}$ .  $0 \leq \dot{x}(2^{-1})$ .

Beweis: Wegen  $f < 0$  in  $\mathbb{R}^-$ ,  $0 < f$  in  $\mathbb{R}^+$  sowie  $0 \leq x|I$ ,

$x|_{[-2^{-1}, 0]} \leq 0$  gilt:  $0 < s < t \leq 2^{-1} \Rightarrow$

$s - 1 < t - 1 \leq -2^{-1} < s - 2^{-1} < t - 2^{-1} \leq 0 \Rightarrow$

$$-(2\alpha)^{-1} \dot{x}(t) = \int_{t-1}^{t-(1/2)} f \circ x + \int_{t-1}^{s-(1/2)} f \circ x + \int_{s-(1/2)}^{t-(1/2)} f \circ x \leq \\ \int_{t-1}^{s-(1/2)} f \circ x + \int_{s-1}^{t-1} f \circ x = -(2\alpha)^{-1} \dot{x}(s).$$



$0 \leq \dot{x}(2^{-1})$  folgt aus  $(\alpha, f)$  und  $x|_{[-2^{-1}, 0]} \leq 0$ .

c)  $0 < x$  und  $0 \leq \dot{x}$  in  $(z_1, z_1 + 2^{-1}]$ .

Beweis: Im Fall  $2^{-1} \leq z_1$  und  $t \in [z_1, z_1 + 2^{-1}]$  gilt  $x|I(t) \leq 0$ . Mit  $(\alpha, f)$  folgt daraus  $0 \leq \dot{x}(t)$ . - Nach Definition von  $z_1$  gibt es eine Folge  $t_n \rightarrow z_1$  mit  $t_n > z_1$  und  $x(t_n) > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zusammen mit  $0 \leq \dot{x}$  in  $[z_1, z_1 + 2^{-1}]$  folgt  $0 < x$  in  $(z_1, z_1 + 2^{-1}]$ .

Für  $0 < z_1 < 2^{-1}$  bemerken wir, daß die Definition von  $z_1$   $0 \leq \dot{x}(z_1)$  impliziert. Mit b) folgt  $0 \leq \dot{x}$  in  $[z_1, 2^{-1}]$  und daher

$0 < x$  in  $(z_1, 2^{-1}]$  (letzteres mit der Definition von  $z_1$ ).  $0 \leq \dot{x}$  (und damit  $0 < x$ ) in  $(2^{-1}, z_1 + 2^{-1}]$  ergibt sich aus  $I(t) = [2^{-1}, z_1]$  für  $t \in [2^{-1}, z_1 + 2^{-1}]$  mit Hilfe von  $x \leq 0$  in  $[-2^{-1}, z_1]$  und  $(\alpha, f)$ .

Im Fall  $z_1 = 0$  liefert die Definition von  $z_1$   $0 \leq \limsup_{0 < t \rightarrow 0} \dot{x}(t)$ .

Mit b) folgt  $0 \leq \dot{x}$  in  $(0, 2^{-1}]$ , daher (mit der Definition von  $z_1$ )  $0 < x$  in  $(0, 2^{-1}]$ .

d)  $x$  hat in  $[z_1 + 2^{-1}, z_1 + 1]$  genau ein lokales Extremum, ein Maximum.

Beweis: Wie in b) schließen wir aus  $x \leq 0$  in  $[z_1 - 2^{-1}, z_1]$  und  $0 < x$  in  $(z_1, z_1 + 2^{-1}]$ , daß  $\dot{x}$  in  $[z_1 + 2^{-1}, z_1 + 1]$  streng monoton fällt mit  $\dot{x}(z_1 + 1) < 0$ . Mit  $0 \leq \dot{x}(z_1 + 2^{-1})$  folgt d).

e) Wir bezeichnen diese Maximumstelle mit  $m_1$ . Es gilt  $\dot{x} < 0$  in  $(m_1, m_1 + 2^{-1}]$ .

Beweis: Nach d):  $\dot{x} < 0$  in  $(m_1, z_1 + 1]$ . Mit  $0 < x$  in  $(z_1, m_1]$  und  $z_1 + 2^{-1} \leq m_1$  folgt aus  $(\alpha, f)$   $\dot{x} < 0$  in  $[z_1 + 1, m_1 + 2^{-1}]$ .

f) Wegen Lemma 2 ist  $z_2 := \inf\{t > z_1 \mid x(t) < 0\}$  endlich.

Es gilt  $\dot{x} < 0$  in  $(m_1, z_2 + 2^{-1}]$ .

Beweis: Wir setzen  $z^* := \sup\{t > z_1 \mid x|_{(z_1, t)} > 0\}$  und zeigen zuerst  $z^* = z_2$ . - Offenbar gilt  $m_1 < z^* \leq z_2$ . Für  $z^* \in (m_1, m_1 + 2^{-1}]$  folgt  $z^* = z_2$  aus  $\dot{x}(z^*) < 0$  (siehe e)). Für  $m_1 + 2^{-1} < z^*$  gilt  $0 < x|I(z^*)$ , folglich  $\dot{x}(z^*) < 0$ , und daher  $z^* = z_2$ .

Nun sei  $t \in (m_1, z_2 + 2^{-1}]$ . Wegen e) dürfen wir  $t \in (m_1 + 2^{-1}, z_2 + 2^{-1}]$  voraussetzen. Dann gilt  $I(t) = (z_1, z_2] = (z_1, z^*]$ , daher  $0 < x|_{[t-1, t-2^{-1}]}$  und folglich  $\dot{x}(t) < 0$ .

g) Wir haben neben  $z_1 + 2^{-1} \leq m_1 < z_2$ ,  $0 < x$  in  $(z_1, z_2)$ ,  $\dot{x} < 0$  in  $(m_1, z_2]$  die Beziehungen  $0 < x$  in  $[z_2 - 2^{-1}, z_2)$ ,  $x < 0$  in  $(z_2, z_2 + 2^{-1}]$ ,  $\dot{x} < 0$  in  $(z_2, z_2 + 2^{-1}]$  bekommen, und es ist klar, wie der Beweis von Lemma 3 mit vollständiger Induktion zu Ende

zu führen ist.

Wir bezeichnen die Menge der  $\varphi \in X \setminus \{0\}$  mit  $0 \leq \varphi|I$  und  $\varphi|[-2^{-1}, 0] \leq 0$  mit  $S$ . Mit der Autonomie von  $(\alpha, f)$  folgt aus Lemma 3, daß es "viele" Lösungen  $x$  gibt, die der Voraussetzung  $x_0 \in S$  nicht genügen und für die doch sukzessive Nullstellen weiter als  $2^{-1}$  voneinander entfernt sind.

Definition 1. Eine stetige Funktion  $x: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt langsam schwingend, wenn es ein  $t \geq -1$  gibt mit  $t \leq z < z' \wedge x(z) = 0 = x(z') \Rightarrow 2^{-1} < z' - z$ .

Wir bezeichnen die Menge der Anfangswerte langsam schwingender Lösungen von  $(\alpha, f)$  mit  $S(\alpha, f)$ .

Bemerkung 5.

- i) Alle Trajektorienstücke  $x_t$  einer langsam schwingenden Lösung  $x$  von  $(\alpha, f)$  liegen in  $S(\alpha, f)$ .
- ii) Liegt ein Trajektorienstück  $x_t$  einer Lösung  $x$  von  $(\alpha, f)$  in  $S(\alpha, f)$ , so ist  $x$  langsam schwingend.
- iii) Für alle  $\alpha > 2$  und für alle stetigen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit (H1) gilt  $S = S(\alpha, f)$ .
- iv) Für jede langsam schwingende Lösung  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $\alpha > 2$  gilt:  $\forall s \geq 0 \exists t > s: 0 < x|[t-1, t-2^{-1}) \wedge \dot{x}(t-2^{-1}) < 0 \wedge x|(t-2^{-1}, t] < 0$ .

Beweis: i) und ii) sind Konsequenzen der Autonomie von  $(\alpha, f)$ . Lemma 3 gibt iii). Zu iv): Zu  $x$  existiert ein  $t_0 \geq -1$  mit  $(t_0 < z < z' \wedge x(z) = 0 = x(z') \Rightarrow 2^{-1} < z' - z)$ . Zu jedem  $s \geq 0$  existiert daher ein  $t_1 > \max\{t_0 + 1, s\}$  mit  $x(t_1) \neq 0$ . Nach Lemma 2

folgt, daß es ein  $t_2 \geq t_1$  mit  $x(t_2) > 0$  gibt. Ebenfalls nach Lemma 2 ist  $z := \inf\{t' > t_2 | x(t') < 0\}$  endlich, und  $x(z) = 0$ . Wegen  $z > t_2 > t_0 + 1$  folgt  $x_{z+(1/2)} \in S$ . Zur Lösung  $y$  von  $(\alpha, f)$  mit  $y_0 = x_{z+(1/2)}$  existiert nach Lemma 3 ein  $t_3 > 0$  mit  $0 < y|[t_3-1, t_3-2^{-1})$ ,  $\dot{y}(t_3-2^{-1}) < 0$ ,  $y|(t_3-2^{-1}, t_3] < 0$ . Mit der Autonomie von  $(\alpha, f)$  folgen für  $t := z + 2^{-1} + t_3$  die in iv) behaupteten Aussagen.

4. Auf Anfangswerten langsam schwingender Lösungen der linearen Gleichung  $(\alpha, id)$  verschwindet die Projektion  $\pi_{\lambda_0}(\alpha)$  nicht.

Wir leiten zuerst die in Abschnitt 2 angekündigten Stetigkeitsaussagen her.

Lemma 4. Zu jedem  $\alpha > 0$  gibt es eine Umgebung  $W$ , sodaß zu jedem  $\beta \in W \setminus \{\alpha\}$  genau ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert mit  $\operatorname{Re} \lambda_j(\beta) < \operatorname{Re} \lambda_k(\beta)$  für alle  $j \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$ .

Beweis: Die Funktionen  $\beta \mapsto u_j(\beta)$ ,  $\beta > 0$ , mit  $j \in \mathbb{N}$  sind analytisch, da  $\lambda_j(\beta)$  einfache Nullstelle der ganzen Funktion  $g_\beta$  ist, und paarweise verschieden, weil nur für  $j = k$   $u_j(\alpha_k)$  verschwindet. Sei  $\alpha > 0$ . Wir setzen  $u := \sup\{u_j(\alpha) | j \in \mathbb{N}\}$ .

a) Es gibt eine natürliche Zahl  $l \geq 2$  mit  $(0 < \beta < \alpha + 1 \wedge u - 1 \leq u_j(\beta) \Rightarrow j \leq l)$

Beweis: Für  $\beta < \alpha + 1$ ,  $u - 1 \leq u_j(\beta)$  folgt aus  $\operatorname{Im} g_\beta(\lambda_j(\beta)) = 0$   $2\pi j < v_j(\beta) \leq 2\beta \int_{\mathbb{I}} e^{u_j(\beta)} da \leq 2(\alpha + 1) \max\{1, e^{-u_j(\beta)}\} \leq 2(\alpha + 1) \max\{1, e^{1-u_j}\}$ .

b) Wegen a) existieren ein  $\varepsilon \in (0, 1)$ , ein  $m \in \{1, \dots, l\}$  und eine

Permutation  $p$  von  $\{1, \dots, l\}$  mit  $u_{p(j)}(\alpha) = u$  für  $j = 1, \dots, m$  und  $u_{p(j)}(\alpha) < u - \varepsilon$  für  $j = m+1, \dots, l$ . (Die einfacheren Fälle  $m = 1, m = l$  betrachten wir hier nicht.) - Wir wählen eine Umgebung  $W_0$  von  $\alpha$  mit  $u_{p(j)}(\beta) < u - \varepsilon$  für alle  $\beta \in W_0$  und alle  $j \in \{m+1, \dots, l\}$ , ferner zu jedem  $j \in \{1, \dots, m\}$  eine Umgebung  $W_j$  von  $\alpha$  mit den beiden Eigenschaften

$$\beta \in W_j \Rightarrow u - \varepsilon < u_{p(j)}(\beta),$$

$$\beta \in W_j \setminus \{\alpha\} \wedge n \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\} \Rightarrow u_{p(j)}(\beta) \neq u_{p(n)}(\beta).$$

Die zweite Eigenschaft läßt sich erreichen, da die Funktionen  $\beta \mapsto u_j(\beta)$  analytisch und paarweise verschieden sind.

Sei  $W := \bigcap_1^m W_j \cap W_0 \cap (0, \alpha+1)$ . Für  $\beta \in W \setminus \{\alpha\}$  folgt  $u - \varepsilon < u_{p(1)}(\beta) \leq \sup\{u_j(\beta) \mid j \in \mathbb{N}\}$ , für  $1 < j$  gilt  $u_j(\beta) < u - 1 < u - \varepsilon$ , und für  $j \in \{m+1, \dots, l\}$  ist  $u_{p(j)}(\beta)$  kleiner als  $u - \varepsilon$ . Das Supremum der  $u_j(\beta)$  wird also von einem der  $u_{p(j)}(\beta)$  mit  $j \in \{1, \dots, m\}$  angenommen. Da diese paarweise verschieden sind für  $\beta \in \bigcap_1^m W_j \setminus \{\alpha\}$ , erhält man die Aussage von Lemma 4.

Lemma 5. Die Abbildungen  $\alpha \mapsto \pi_{\lambda_j}(\alpha)$  und  $\alpha \mapsto \pi_{\overline{\lambda_j}}(\alpha)$  sind für alle  $j \in \mathbb{N}$  auf  $\mathbb{R}^+$  und für  $j = 0$  auf  $(\alpha^*, \infty)$  stetig.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall der Abbildung  $\alpha \mapsto \pi_{\lambda_j}(\alpha)$

mit  $j \in \mathbb{N}$ , da der Beweis in den anderen Fällen genauso verläuft.

Sei  $\alpha > 0$ . Wir setzen  $L_\beta \varphi := -2\beta \int_I \varphi$  für  $\beta > 0$  und  $\varphi \in Y$  und wählen zu  $L_\alpha$  und  $\lambda_j(\alpha)$  Umgebungen  $U$  von  $L_\alpha$  und  $D$  von  $\lambda_j(\alpha)$  gemäß Lemma I.1. Dabei liege  $D$  in  $\mathbb{R} + i(2\pi j, 2\pi j + 2\pi)$ . Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir ein  $\delta > 0$ , ebenfalls gemäß Lemma I.1. Zu  $\delta$  und  $\alpha$  existiert ein  $\eta \in (0, \alpha)$  mit  $|\beta - \alpha| < \eta \Rightarrow$

$L_\beta \in U \wedge \|L_\beta - L_\alpha\| < \delta$ ). Wegen  $D \subset \mathbb{R} + i(2\pi j, 2\pi j + 2\pi)$  und Aussage i) von Satz 1 stimmt der nach Lemma I.1 existierende und eindeutig bestimmte Eigenwert  $\lambda \in \mathcal{C}_\beta \cap D$  mit  $\lambda_j(\beta)$  überein, und es folgt  $\|\pi_{\lambda_j}(\beta) - \pi_{\lambda_j}(\alpha)\| < \varepsilon$  für  $|\beta - \alpha| < \eta$ .

Lemma 6. Die Menge  $\{(\varphi, \alpha) \in X \times \mathbb{R}^+ \mid 2 < \alpha \wedge \varphi \in S(\alpha, \text{id})\}$  ist offen in  $X \times \mathbb{R}^+$ .

Beweis: Sei  $2 < \alpha, \varphi \in S(\alpha, \text{id})$ . Die Lösung  $y$  von  $(\alpha, \text{id})$  mit  $y_0 = \varphi$  hat nach Bemerkung 5 eine Nullstelle  $z$  mit  $0 < y[z-2^{-1}, z]$ ,  $\dot{y}(z) < 0$ ,  $y[z, z+2^{-1}] < 0$ . Daher existieren ein  $\delta \in (0, 2^{-1})$ , ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $\eta > 0$  mit  $2\varepsilon < -\dot{y}(s)$  für  $|s - z| \leq \delta$ ,  $2\eta < |y(s)|$  für  $\delta \leq |s - z| \leq 2^{-1}$ . - Aus Lemma 1 folgt, daß es Umgebungen  $U \subset X$  von  $\varphi$  und  $V \subset (2, \infty)$  von  $\alpha$  gibt, sodaß für jede Lösung  $y^\sharp$  von  $(\beta, \text{id})$  mit  $\psi \in U, \beta \in V$ , gilt:  $\delta \leq |s - z| \leq 2^{-1} \Rightarrow |y(s) - y^\sharp(s)| < \eta$ , und  $|s - z| < \delta \Rightarrow \varepsilon < -\dot{y}^\sharp(s)$ . Insbesondere ist  $y^\sharp$  positiv in  $[z-2^{-1}, z-\delta]$ , streng monoton fallend in  $[z-\delta, z+\delta]$ , negativ in  $[z+\delta, z+2^{-1}]$ . Also  $(y^\sharp)_{z+(1/2)} \in S$ , daher  $\psi \in S(\beta, \text{id})$  (Bemerkung 5).

Ferner benötigen wir

Lemma 7. Sei  $\alpha > 0, \varphi \in X$  und  $\lambda \in \mathcal{C}_\alpha$ . Dann gilt  $\overline{\pi_\lambda \varphi} = \pi_\lambda \overline{\varphi}$ .

Beweis: Nach Abschnitt I.2 sind der Definitionsbereich  $D_\alpha$  und die Wirkung von  $A_\alpha$  bekannt; man sieht:  $\mathcal{X} \in D_\alpha \Leftrightarrow \overline{\mathcal{X}} \in D_\alpha, A_\alpha \mathcal{X} = A_\alpha \overline{\mathcal{X}}$ .

Bemerkung 2 liefert:  $z \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\alpha \Leftrightarrow \overline{z} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\alpha$ . Wir bezeichnen die Resolventen von  $A_\alpha$  mit  $R_{\alpha, z}$  und erhalten für  $z \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\alpha, \varphi \in X$   $\overline{R_{\alpha, z} \varphi} = R_{\alpha, \overline{z}} \overline{\varphi}$  (Beweis: Mit  $\mathcal{X} := R_{\alpha, z} \varphi$  gilt  $\varphi = \overline{\varphi} = \overline{(A_\alpha - z)\mathcal{X}} =$

$A_\alpha \bar{\chi} - \bar{z} \bar{\chi} = (A_\alpha - \bar{z}) \bar{\chi}$ , also  $\bar{\chi} = R_{\alpha, \bar{z}} \varphi$ .

Nun sei  $\varphi \in X$ ,  $\lambda \in \mathcal{G}_\alpha$ , und sei ein  $r > 0$  gewählt mit  $\{\lambda\} = \mathcal{G}_\alpha \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| \leq r\}$ . Mit dem durch  $w: t \mapsto \lambda + r e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , parametrisierten Weg  $\Gamma$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \pi_\lambda \varphi &= -(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma R_{\alpha, z} \varphi dz = (2\pi i)^{-1} \int_0^{2\pi} R_{\alpha, w(t)} \varphi \dot{w}(t) dt = \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_0^{2\pi} R_{\alpha, \bar{w}(t)} \varphi \dot{\bar{w}}(t) dt = -(2\pi i)^{-1} \int_{2\pi}^0 R_{\alpha, \bar{w}(t)} \varphi \dot{\bar{w}}(t) dt = \pi_{\bar{\lambda}} \varphi, \end{aligned}$$

mit  $\{\bar{\lambda}\} = \mathcal{G}_\alpha \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \bar{\lambda}| \leq r\}$ .

**Lemma 8.** Sei  $\alpha > 2$ . Dann gilt  $\pi_{\lambda_0(\alpha)} \varphi \neq 0$  für alle  $\varphi \in S(\alpha, id)$ .

**Beweis:** Sei  $\alpha > 2$ ,  $\varphi \in S(\alpha, id)$ . Zu  $\alpha$  sei eine Umgebung  $W$  gewählt gemäß Lemma 4. Für  $\alpha^* < \beta$  setzen wir  $\pi_\beta := \pi_{\lambda_0(\beta)} + \pi_{\bar{\lambda}_0(\beta)}$ .

Wir nehmen  $\pi_{\lambda_0(\alpha)} \varphi = 0$  an und bekommen mit Lemma 7  $\pi_\alpha \varphi = 0$ .

a) Nach Lemma 5 und Lemma 6 gibt es wegen  $\operatorname{Re} \pi_\alpha \varphi = 0$  ein  $\beta \in W$  mit  $2 < \beta \neq \alpha$ , sodaß für  $\psi := \varphi - \pi_\beta \varphi$  gilt:

$\operatorname{Re} \psi = \varphi - \operatorname{Re} \pi_\beta \varphi \in S(\beta, id)$ . Zu  $\beta$  existiert nach Lemma 4 ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $(k \neq j \in \mathbb{N} \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_j(\beta) < \operatorname{Re} \lambda_k(\beta))$ .

Für  $\Lambda := \{\lambda \in \mathcal{G}_\beta \mid u_k(\beta) \leq \operatorname{Re} \lambda\}$  folgt

$$\{\lambda_k(\beta), \bar{\lambda}_k(\beta)\} \subset \Lambda = \{\lambda_k(\beta), \bar{\lambda}_k(\beta), \lambda_0(\beta), \bar{\lambda}_0(\beta)\}.$$

b) Der Fall  $\operatorname{Re}(\pi_{\lambda_k(\beta)} \psi + \pi_{\bar{\lambda}_k(\beta)} \psi) \neq 0$ .

Nach (I.4) gilt mit gewissen  $\varepsilon > 0$ ,  $c > 0$ , für alle  $t \geq 0$

$$(11) \quad \|\operatorname{Re} T_\beta(t) \operatorname{Re} \psi - \operatorname{Re} T_\beta(t) \pi_\Lambda \psi\| = \|\operatorname{Re} T_\beta(t) (\psi - \pi_\Lambda \psi)\| \leq c e^{(u_k(\beta) - \varepsilon)t} \|\psi - \pi_\Lambda \psi\|.$$

$\pi_\beta \psi = 0$  (nach Konstruktion von  $\psi$ ) liefert  $\operatorname{Re} T_\beta(t) \pi_\Lambda \psi =$

$\operatorname{Re} T_\beta(t) (\pi_{\lambda_k(\beta)} \psi + \pi_{\bar{\lambda}_k(\beta)} \psi)$  für alle  $t \geq 0$ . Mit Folgerung 1 er-

gibt sich

$$e^{-u_k(\beta)t} \operatorname{Re}(T_\beta(t) \pi_\Lambda \psi)(0) = a \cos(v_k(\beta)t) + b \sin(v_k(\beta)t) =: h(t)$$

mit  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Für  $t \geq 0$  ist  $(T_\beta(t) \operatorname{Re} \psi)(0)$  gerade der Wert  $y(t)$  der Lösung  $y$  von  $(\beta, id)$  mit  $y_0 = \operatorname{Re} \psi$  (Bemerkung 1).

Damit folgt aus (11)

$$(12) \quad e^{-u_k(\beta)t} y(t) - h(t) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

$h$  verschwindet nicht identisch und hat die Periode  $2\pi(v_k(\beta))^{-1} < 1$ , da  $1 \leq k$ . Es gibt Zahlen  $t_1 < t_2 < t_3$  mit  $2^{-1} > t_3 - t_1$  und mit  $h(t_j) \neq 0$ ,  $\operatorname{sgn} h(t_1) = -\operatorname{sgn} h(t_2) = \operatorname{sgn} h(t_3)$ . Die Periodizität von  $h$  und die Konvergenzaussage (12) implizieren, daß es zu jedem  $t \in \mathbb{R}$  Zahlen  $s_1 < s_2 < s_3$  mit  $t < s_1$ ,  $s_3 - s_1 < 2^{-1}$  und mit  $y(s_j) \neq 0$ ,  $\operatorname{sgn} y(s_1) = -\operatorname{sgn} y(s_2) = \operatorname{sgn} y(s_3)$  gibt. Andererseits ist  $y$  wegen  $y_0 = \operatorname{Re} \psi \in S(\beta, id)$  langsam schwingend, Widerspruch.

c) Im Fall  $\operatorname{Re}(\pi_{\lambda_k(\beta)} \psi + \pi_{\bar{\lambda}_k(\beta)} \psi) = 0$  wählt man ein  $\chi$  in

$$P_{\lambda_k(\beta)} + P_{\bar{\lambda}_k(\beta)} \quad \text{mit } \operatorname{Re} \chi \neq 0 \quad \text{und mit } \operatorname{Re} \chi + \operatorname{Re} \psi \in S(\beta, id).$$

Wegen Lemma 6 ist das möglich. Dann geht man wie in b) vor,

mit  $\psi + \chi$  an Stelle von  $\psi$ . (Die Wahl von  $\chi$  impliziert  $\pi_\beta \chi = 0$ .)

$$\text{Also } \operatorname{Re} \pi_\Lambda (\psi + \chi) = \operatorname{Re}(\pi_{\lambda_k(\beta)} (\psi + \chi) + \pi_{\bar{\lambda}_k(\beta)} (\psi + \chi)) =$$

$$\operatorname{Re}(\pi_{\lambda_k(\beta)} \chi + \pi_{\bar{\lambda}_k(\beta)} \chi) = \operatorname{Re} \chi \neq 0.$$

**Nachbemerkung:** Der Übergang zu einem Parameterwert  $\beta$ , für den es genau ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $u_k(\beta) = u := \max\{u_j(\beta) \mid j \in \mathbb{N}\}$  gibt, war notwendig, weil man im anderen Fall auf eine Vergleichsfunktion  $\tilde{h}: t \mapsto e^{-ut} \operatorname{Re}(T_\beta(t) \pi_\Lambda \psi)(0)$  mit  $\Lambda = \{\lambda \in \mathcal{G}_\beta \mid \operatorname{Re} \lambda = u\}$  geführt wird, die im allgemeinen nur fastperiodisch ist; man kann dann nicht ohne weiteres aus dem Analogon zu (12) einen Widerspruch zur Nullstellenverteilung einer langsam schwingenden Lösung herleiten.

Die fragliche Eindeutigkeitsaussage scheint, falls sie richtig ist, wenigstens nicht leicht beweisbar zu sein, denn man kann zeigen, daß für  $\alpha \rightarrow \infty$  die Zweige  $(\lambda_j(\alpha))_{\alpha > 0}$  sich zurückbiegen und gegen Werte in  $i[2\pi j, 2\pi j + 2\pi]$  streben.

Wie ersichtlich, umgehen wir diese Schwierigkeit mit Hilfe von Lemma 4, Lemma 5 und Lemma 6.

Die Voraussetzung  $\alpha > 2$  läßt sich abbauen zu  $\alpha > 0$ , wenn man  $\pi_{\Lambda'}$  mit  $\Lambda' := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| < 2\pi\}$  statt  $\pi_{\lambda_0}(\alpha)$  betrachtet und Modifikationen von Lemma 3 und Lemma 6 verwendet, die Lösungen einbeziehen, welche auf unbeschränkten Intervallen monoton sind.

#### 5. Vorbereitungen zum Nachweis der Voraussetzungen von Satz I.1

Wir wollen zeigen, daß  $\psi = 0$  für  $\alpha > 2\pi^2/9$  eektiv bezüglich  $(\alpha, f)$  und  $S(\alpha, f)$  ist. Zur Konstruktion einer Menge  $S_1(\alpha, f)$ , die den Voraussetzungen i) - iii) von Satz I.1 genügt, sind die Eigenschaften der Trajektorienstücke  $x_t$  zu Lösungen  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $x_0 \in S(\alpha, f)$  für große  $t$  zu untersuchen. Man darf sich dabei auf  $x_0 \in S$  beschränken, da die Gleichung  $(\alpha, f)$  autonom ist und da die Trajektorien langsam schwingender Lösungen für  $\alpha > 2$  die Menge  $S$  erreichen. Nach Lemma 3 liegen in diesem Fall die Trajektorienstücke  $x_t$  für  $t > z_1(x) + 1$  in der Menge der differenzierbaren Funktionen  $\psi \in X$  mit den Eigenschaften

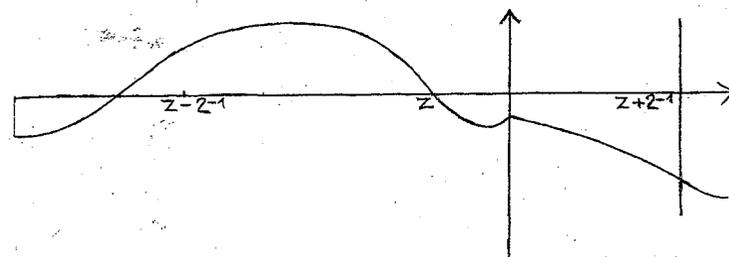
- (S1)  $\psi(z) = 0 = \psi(z') \wedge z < z' \Rightarrow z + 2^{-1} < z'$ ;  
 (S2)  $\psi(z) = 0 \Rightarrow \dot{\psi}(z) \neq 0$ ;  
 (S3)  $-2^{-1} \leq a \wedge \dot{\psi}(a) \leq 0 < \psi(a) \Rightarrow 0 < \psi|[a-2^{-1}, a]$ ,  
 $-2^{-1} \leq a \wedge \psi(a) < 0 \leq \dot{\psi}(a) \Rightarrow \psi|[a-2^{-1}, a] < 0$ .

Diese Funktionen können zwei Nullstellen in  $(-1, 0)$  haben. Wir müssen derartige Funktionen in die zu konstruierende Menge  $S_1(\alpha, f)$  notwendig aufnehmen, weil wir nicht ausschließen können, daß zu jeder Lösung  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $\alpha > 2$ ,  $x_0 \in S$ , beliebig große  $j$  mit  $z_{j+1}(x) - z_j(x) < 1$  existieren.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit dem Nachweis der Voraussetzung ii) von Satz I.1 für Mengen differenzierbarer Funktionen in  $X$  mit den Eigenschaften (S1), (S2), (S3). - Für differenzierbare Funktionen  $\psi \in X$  mit den Eigenschaften (S1) und (S2), welche höchstens eine Nullstelle in  $(-1, 0)$  besitzen, könnte man für  $\alpha > 2$  ähnlich wie im Beweis von Lemma 3 zeigen, daß  $\psi$  in  $S(\alpha, \text{id})$  liegt und folglich nach Lemma 8  $\pi_{\lambda_0}(\alpha)\psi \neq 0$  gilt. Dies wäre ein erster Schritt zum Nachweis der Voraussetzung ii) von Satz I.1. Für die übrigen differenzierbaren Funktionen  $\psi \in X$  mit (S1) und (S2) benötigen wir zum Beweis von  $\psi \in S(\alpha, \text{id})$  die zusätzliche Eigenschaft

(S4)  $-2^{-1} < z \leq 0 \wedge \psi(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} \int_{\mathbb{I}} \psi = \operatorname{sgn} \psi(z-2^{-1})$ .

Dazu ein Beispiel: In der skizzierten Situation



ergibt (S4), daß  $0 < \int_{\mathbb{I}} \psi = \int_{\mathbb{I}} y$  gilt. Wegen  $\dot{y}(t) = -2\alpha \int_{\mathbb{I}} y(t+a) da \leq -2\alpha \int_{\mathbb{I}} y$  für  $0 < t \leq z + 2^{-1}$  garantiert (S4) also, daß  $y$  auf  $[0, z+2^{-1}]$  fällt, daher liegt

das Trajektorienstück  $y_{z+(1/2)}$  in  $S$ , und man kann mit Bemerkung 5 auf  $\psi \in S(\alpha, \text{id})$  schließen.

Wir zeigen

**Lemma 9.** Sei  $\alpha > 2$ . Sei  $y$  eine Lösung von  $(\alpha, \text{id})$ .  $y_0$  sei differenzierbar und habe die Eigenschaften (S1), (S2) und (S4).

Dann gilt

$$i) \quad -1 \leq z < z' \wedge y(z) = 0 = y(z') \Rightarrow 2^{-1} < z' - z.$$

Insbesondere liegt  $y_0$  in  $S(\alpha, \text{id})$ , und es gilt  $\pi_{\lambda_0}(\alpha)y_0 \neq 0$ .

Beweis:

a) Wir betrachten zuerst eine Lösung  $w$  von  $(\alpha, \text{id})$  mit  $\alpha > 2$ ,  $0 < w$  in  $[-1, -2^{-1}]$ ,  $w < 0$  in  $(-2^{-1}, 0]$ . Für die nach Lemma 3 gegebene Nullstelle  $z_1$  folgt  $0 < z_1$  und

$$(13) \quad w < 0 \text{ in } (-2^{-1}, z_1).$$

Beweis: Wir setzen  $z := \sup\{t > 0 \mid 0 > w|_{[0,t]}\}$ . Es folgt

$0 < z \leq z_1$ ,  $w(z) = 0$ ,  $0 \leq \dot{w}(z)$ . - Im Fall  $2^{-1} \leq z$  ergibt die Differentialgleichung  $(\alpha, \text{id})$  wegen  $w < 0$  in  $(z-1, z-2^{-1}]$   $0 < \dot{w}(z)$ . Dies impliziert  $z_1 = z$ ; daraus folgt (13). - Im Fall  $0 < z < 2^{-1}$  würde aus  $\dot{w}(z) = 0$  folgen, daß in  $(0, z]$  gilt:  $\dot{w} \leq 0$  (Denn  $\dot{w}$  wächst in  $(0, 2^{-1}]$ , siehe Teil b) des Beweises von Lemma 3.).

Also  $0 = w(z) \leq w(0)$ , Widerspruch. Daher gilt auch in diesem Fall  $0 < \dot{w}(z)$ , folglich  $z_1 = z$ , daher (13).

Wegen (13) und Lemma 3 gilt für  $w$  die Aussage i) von Lemma 9. Ist  $\tilde{w}$  eine Lösung von  $(\alpha, \text{id})$  mit  $\alpha > 2$ ,  $\tilde{w} < 0$  in  $[-1, -2^{-1}]$ ,  $0 < \tilde{w}$  in  $(-2^{-1}, 0]$ , so ist Aussage i) für die Lösung  $-\tilde{w}$  der linearen Gleichung  $(\alpha, \text{id})$  richtig, daher auch für  $\tilde{w}$  selbst.

b) Nun sei  $y$  eine Lösung von  $(\alpha, \text{id})$  mit  $\alpha > 2$ .  $y_0$  sei differenzierbar und habe die Eigenschaften (S1), (S2), (S4). Wir

definieren  $z := -2^{-1}$  für  $y(-2^{-1}) = 0$  und  $z := \inf\{t > 2^{-1} \mid \text{sgn } y(t) = -\text{sgn } y(-2^{-1})\}$  sonst. Nach Lemma 2 ist  $z$  endlich.

Wir zeigen:

(14)  $y$  hat in  $[-1, z)$  höchstens eine Nullstelle;

(15)  $-1 \leq z' < z \wedge y(z') = 0 \Rightarrow 2^{-1} < z - z'$ ;

(16)  $(y|_{[z-2^{-1}, z]} < 0 \wedge 0 < y|_{(z, z+2^{-1}]}) \vee$   
 $(0 < y|_{[z-2^{-1}, z]} \wedge y|_{(z, z+2^{-1}]} < 0).$

b1) Der Fall  $y(0) = 0$  und  $y(a) \neq 0$  für alle  $a \in (-1, 0)$ .

Ist  $y < 0$  in  $(-1, 0)$ , so liefert  $(\alpha, \text{id})$   $0 < \dot{y}$  in  $(0, 2^{-1}]$ . Mit  $y(0) = 0$  folgen  $z = 0$  und (16). (14) und (15) sind offensichtlich. - Für  $0 < y$  in  $(-1, 0)$  analoger Beweis.

b2) Der Fall  $y(0) = 0$  und  $y(z') = 0$  für ein  $z' \in (-1, 0)$ .

Dann gibt (S1)  $z' < -2^{-1}$ . Sei noch  $y < 0$  in  $(z', 0)$  (für  $0 < y$  in  $(z', 0)$  analoger Beweis). Mit (S2) folgt  $0 < y$  in  $[-1, z']$ . Wie in Teil b) des Beweises von Lemma 3 ergibt sich daraus, daß  $\dot{y}$  in  $(0, z'+1]$  wächst. Wegen (S4) ist  $\int_{\mathbb{I}} y < 0$ . Mit  $(\alpha, \text{id})$  folgt daraus  $0 < \dot{y}(t)$  für alle genügend kleinen  $t > 0$ . Also  $0 < \dot{y}$  in  $(0, z'+1]$ . Wegen  $I(t) \subset [z', 0]$  für alle  $t \in (z'+1, 2^{-1}]$  ist  $\dot{y}$  auch in  $(z'+1, 2^{-1}]$  positiv. Mit  $y(0) = 0$  folgen  $z = 0$  und (16). (15) ist offensichtlich. (14) folgt aus (S1).

b3) Der Fall  $y(0) \neq 0$  und  $y(a) \neq 0$  für alle  $a \in (-1, 0)$ .

Sei noch  $y < 0$  in  $(-1, 0]$  (für  $0 < y$  in  $(-1, 0]$  analoger Beweis). Wir setzen  $z^* := \sup\{t > 0 \mid 0 > y|_{[0,t]}\}$  und bekommen  $0 < z^* \leq z$ ,  $y < 0$  in  $(-1, z^*)$ ,  $y(z^*) = 0$ . Die Gleichung  $(\alpha, \text{id})$  liefert  $0 < \dot{y}$  in  $[z^*, z^*+2^{-1}]$ , da  $I(t) \subset (-1, z^*]$  für alle  $t \in [z^*, z^*+2^{-1}]$ . Es folgen  $z = z^*$  und (16). (14) und (15) sind offensichtlich.

b4) Der Fall  $y(0) \neq 0$  und  $y(z') = 0$  für ein  $z' \in (-1, -2^{-1})$  und

$y(a) \neq 0$  für alle  $a \in (z', 0)$ .

Sei noch  $y < 0$  in  $(z', 0]$  (für  $0 < y$  in  $(z', 0]$  analoger Beweis).

Wir setzen  $z^* := \sup\{t > 0 \mid 0 > y(z', t)\}$  und erhalten  $0 < z^* \leq z$ ,  $y < 0$  in  $(z', z^*)$ ,  $y(z^*) = 0$ ,  $0 \leq \dot{y}(z^*)$ .

Für  $z' + 1 \leq z^*$  liefert  $(\alpha, \text{id})$   $0 < \dot{y}$  in  $[z^*, z^* + 2^{-1}]$ , daraus folgen  $z = z^*$  und (16).

Für  $z^* < z' + 1$  folgt aus  $0 = \dot{y}(z^*)$  wie in Teil a) ein Widerspruch zu  $y(0) < 0$ , da  $y(z^*) = 0$  gilt und da  $\dot{y}$  in  $(0, z' + 1]$  wächst. - Also  $0 < \dot{y}(z^*)$ . Mit  $0 = y(z^*)$  folgt  $z = z^*$ . Im Intervall  $(z, z' + 1] = (z^*, z' + 1]$  gilt  $0 < \dot{y}(z^*) \leq \dot{y}$ , und in  $(z' + 1, z + 2^{-1}] = (z' + 1, z^* + 2^{-1}]$  ist  $\dot{y}$  positiv wegen  $I(t) = (z', z^*)$  für alle  $t$  in  $(z' + 1, z^* + 2^{-1}]$ . Zusammen folgt  $0 < y$  in  $(z, z + 2^{-1}]$  und damit (16).

(14) und (15) ergeben sich jeweils aus  $y(-1) \neq 0$  (wegen (S1) und  $-1 < z' < -2^{-1}$ ) und aus  $z' < -2^{-1} < 0 < z^* = z$ .

b5) Im Fall  $y(0) \neq 0$  und  $y(-2^{-1}) = 0$  folgen (14), (15) und (16) aus (S1) und (S2).

b6) Der Fall  $y(0) \neq 0$  und  $y(\tilde{z}) = 0$  für ein  $\tilde{z} \in (-2^{-1}, 0)$ .

Sei noch  $y(0) < 0$  (für  $0 < y(0)$  analoger Beweis). (S1) und (S2) geben  $y < 0$  in  $(\tilde{z}, 0]$  und  $0 < y$  in  $[\tilde{z} - 2^{-1}, \tilde{z})$ . Also  $z = \tilde{z}$ .

Für  $0 < y$  in  $(-1, z)$  folgt mit  $(\alpha, \text{id})$ :  $\dot{y} < 0$  in  $(0, z + 2^{-1}]$ . Damit sind in dieser Situation (14), (15) und (16) offensichtlich.

Für  $y(z') = 0$  mit einem  $z' \in (-1, z)$  folgt  $z' < z - 2^{-1}$  und  $y < 0$  in  $[-1, z')$ . Wie in Teil b) des Beweises von Lemma 3 erhält man daraus, daß  $\dot{y}$  in  $(0, z' + 1]$  fällt. Wegen  $0 < y(z - 2^{-1})$  gibt (S4)  $0 < \int_I y$ . Also ist  $\dot{y} < 0$  für genügend kleine  $t > 0$ . Zusammen:  $\dot{y} < 0$  in  $(0, z' + 1]$ . In  $(z' + 1, z + 2^{-1}]$  ist  $\dot{y}$  negativ wegen  $I(t) = [z', z]$  für alle  $t \in (z' + 1, z + 2^{-1}]$ . Insgesamt folgt:

$y < 0$  in  $(z, z + 2^{-1}]$ . Damit gilt (16). (15) und (14) sind klar.

c) Die Funktion  $t \mapsto y(t + z + 2^{-1})$ ,  $t \geq -1$ , ist eine Lösung von  $(\alpha, \text{id})$ , für die wegen (16) nach Teil a) die Aussage i) von Lemma 9 gilt. Für  $y$  selbst folgt  $2^{-1} < z' - z''$  für alle Nullstellen  $z''$ ,  $z'$  mit  $z - 2^{-1} < z'' < z'$ .

Mit (14) und (15) ergibt sich die Behauptung von Lemma 9.

Für die Menge  $S_0(\alpha, \text{id})$  der Anfangswerte aller langsam schwingenden Lösungen von  $(\alpha, \text{id})$ , für welche Aussage i) von Lemma 9 richtig ist, gilt

Lemma 10. Sei  $\alpha > 2$ . Dann liegt  $\overline{S_0(\alpha, \text{id})}$  in  $S(\alpha, \text{id}) \cup \{0\}$ .

Beweis: Sei  $\alpha > 2$ . Sei  $(\varphi_n)$  eine Folge in  $S_0(\alpha, \text{id})$ , die gegen ein  $\varphi \in X \setminus \{0\}$  konvergiert. Die Lösungen  $y^n$  von  $(\alpha, \text{id})$  mit  $(y^n)_0 = \varphi_n$  konvergieren auf jedem beschränkten Intervall in  $[-1, \infty)$  gleichmäßig gegen die Lösung  $y$  von  $(\alpha, \text{id})$  mit  $y_0 = \varphi$ .

a) Die Menge  $\{t \geq -1 \mid y(t) \neq 0\}$  ist unbeschränkt.

Beweis: Angenommen  $b := \sup\{t \geq -1 \mid y(t) \neq 0\}$  ist endlich.  $\varphi \neq 0$  gibt  $b > -1$ . Daher existiert ein  $t_1 \in (b - 2^{-1}, b)$  mit  $t_1 \geq -1$  und  $y(t_1) \neq 0$ . Wegen Lemma 2 gibt es ein  $t_2 > t_1$  mit  $\text{sgn } y(t_2) = -\text{sgn } y(t_1)$ ;  $t_2$  liegt in  $(t_1, b)$ , weil nach Annahme  $y = 0$  in  $[b, \infty)$  gilt. Ebenso existiert ein  $t_3 \in (t_2, b)$  mit  $\text{sgn } y(t_3) = -\text{sgn } y(t_2)$ . Für ein genügend großes  $n \in \mathbb{N}$  gilt folglich  $0 \neq \text{sgn } y^n(t_1) = -\text{sgn } y^n(t_2) = \text{sgn } y^n(t_3)$ . Also besitzt  $y^n$  Nullstellen in  $(t_1, t_2)$  und in  $(t_2, t_3)$ . Mit  $t_3 - t_1 < 2^{-1}$  folgt ein Widerspruch zu  $\varphi_n \in S_0(\alpha, \text{id})$ .

b) Wegen a) und wegen Lemma 2 gibt es ein  $s \geq -2^{-1}$  mit  $0 < y(s)$  und ein  $t > s$  mit  $y(t) < 0$ .

Wir dürfen annehmen, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$   $0 < y^n(s)$  und  $y^n(t) < 0$  gelten. Dann besitzt jedes  $y^n$  eine kleinste Nullstelle  $Z_n$  in  $(s, t)$ . Wir dürfen weiter annehmen, daß die Folge  $(Z_n)$  gegen ein  $Z \in [s, t]$  konvergiert. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $0 < y^n$  in  $[Z_n - 2^{-1}, Z_n)$ .

Daraus folgt  $0 \leq y$  in  $[Z - 2^{-1}, Z]$ . Beweis: Jedes  $\tilde{t} \in (Z - 2^{-1}, Z)$  liegt für unendlich viele  $n$  in  $(Z_n - 2^{-1}, Z_n)$ , daher  $0 < y^n(\tilde{t})$  für unendlich viele  $n$ , also  $0 \leq y(\tilde{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^n(\tilde{t})$ .

Wenn es nur endlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $0 < y^n(Z_n + 2^{-1})$  gibt, so folgt  $y^n < 0$  in  $(Z_n, Z_n + 2^{-1}]$  für unendlich viele  $n$ , und damit  $y \leq 0$  in  $[Z, Z + 2^{-1}]$ . Mit  $y_{Z+(1/2)} \neq 0$  (andernfalls würde sich ein Widerspruch zu a) ergeben) erhalten wir im betrachteten Fall  $y_{Z+(1/2)} \in S$ . Bemerkung 5 liefert  $\varphi \in S(\alpha, id)$ .

Wenn unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $0 < y^n(Z_n + 2^{-1})$  existieren, so folgt  $0 \leq y$  in  $[Z, Z + 2^{-1}]$ , und daher:  $0 \leq y$  in  $[Z - 2^{-1}, Z + 2^{-1}]$ . Wegen Lemma 2 ist  $Z^* := \inf\{t > Z \mid y(t) < 0\}$  endlich; offenbar gelten  $y(Z^*) = 0$  und  $0 \leq y$  in  $[Z^* - 1, Z^*]$ . Mit  $(\alpha, id)$  folgt  $\dot{y} \leq 0$  in  $(Z^*, Z^* + 2^{-1}]$ . Also  $y \leq 0$  in  $(Z^*, Z^* + 2^{-1}]$ .  $y_{Z^*+(1/2)} = 0$  würde einen Widerspruch zu a) ergeben. Zusammen:  $y_{Z^*+(1/2)} \in S$ . Daher mit Bemerkung 5:  $\varphi \in S(\alpha, id)$ .

Wir können nun die Infimum-Abschätzung in Voraussetzung ii) von Satz I.1 ableiten.

Lemma 11. Sei  $\alpha > 2$ . Sei  $S'$  eine Teilmenge von  $S_0(\alpha, id)$ . Es gebe ein  $\eta > 0$  mit

$$i) \quad 0 < \inf\{\|T_\alpha(1)\varphi\| \mid \varphi \in S' \wedge \|\varphi\| = \eta\}.$$

Dann gilt

$$0 < \inf\{\|\pi_{\lambda_0(\alpha)}\varphi\| \mid \varphi \in S' \wedge \|\varphi\| = \eta\}.$$

Beweis: Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann enthält  $S'$  eine Folge  $(\varphi_n)$  mit  $\|\varphi_n\| = \eta$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und mit  $\pi_{\lambda_0(\alpha)}\varphi_n \rightarrow 0$ . Wegen der Kompaktheit von  $T_\alpha(1)$  konvergiert eine Teilfolge von  $(T_\alpha(1)\varphi_n)$  gegen ein  $\psi \in X$ . Wegen  $\pi_{\lambda_0(\alpha)}T_\alpha(1)\varphi_n = T_\alpha(1)\pi_{\lambda_0(\alpha)}\varphi_n \rightarrow 0$  gilt  $\pi_{\lambda_0(\alpha)}\psi = 0$ . Aus der Definition von  $S_0(\alpha, id)$  folgt, daß mit den  $\varphi_n$  auch die  $T_\alpha(1)\varphi_n$  in  $S_0(\alpha, id)$  liegen. Lemma 10 gibt daher  $\psi \in S(\alpha, id) \cup \{0\}$ . Wegen Voraussetzung i) gilt  $\psi \neq 0$ . Also  $\psi \in S(\alpha, id)$  und  $\pi_{\lambda_0(\alpha)}\psi = 0$  im Widerspruch zu Lemma 8.

Die Menge aller differenzierbaren Funktionen  $\psi \in X$  mit den Eigenschaften (S1), (S2), (S4) liegt zwar nach Lemma 9 für  $\alpha > 2$  in  $S_0(\alpha, id)$ ; sie erfüllt jedoch nicht die Voraussetzung i) von Lemma 11: Zu jedem  $\eta > 0$  gibt es in dieser Menge eine Folge  $(\psi_n)$  mit  $\|\psi_n\| = \psi_n(-1) = \eta$  und  $|\psi_n| < n^{-1}$  in  $[-1 + n^{-1}, 0]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man zeigt leicht  $T_\alpha(1)\psi_n \rightarrow 0$ .

Lemma 12. Sei  $\alpha > 0$ . Sei  $S^*$  eine Menge differenzierbarer Funktionen  $\psi \in X$  mit der Eigenschaft (S3): Es gebe ein  $k > 0$  mit

$$(S5) \quad \sup_I |\psi| \leq k \sup_{[-1/2, 0]} |\psi| \quad \text{und}$$

$$(S6) \quad \sup_{[-1/2, 0]} |\dot{\psi}| \leq k \|\psi\|$$

für alle  $\psi \in S^*$ .

Dann gilt für alle  $\eta > 0$

$$0 < \inf\{\|T_\alpha(1)\psi\| \mid \psi \in S^* \wedge \|\psi\| = \eta\}.$$

Beweis: Sei  $\alpha > 0$ ,  $\psi \in S^*$ ,  $\|\psi\| = \eta > 0$ . Wir schätzen die Lösung  $y$  von  $(\alpha, id)$  mit  $y_0 = \psi$  auf  $[0, 1]$  ab. Wir dürfen  $k \geq 1$  annehmen.

Mit (S5) und  $\|\psi\| = \max\{\sup_I |\psi|, \sup_{[-1/2, 0]} |\psi|\}$  folgt

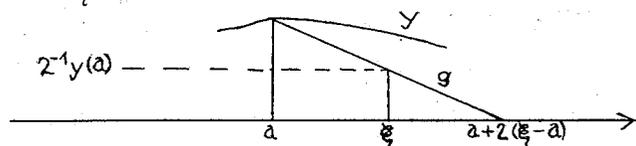
$$(17) \quad 0 < \eta k^{-1} \leq \sup_{[-1/2, 0]} |\psi|.$$

Wir wählen ein  $a$  im Intervall  $[-2^{-1}, 0]$  mit  $|y(a)| = \sup_{[-1/2, 0]} |y|$  und nehmen  $0 < y(a)$  an (Im Fall  $y(a) < 0$  verläuft der Beweis analog.).

Wir betrachten die Gerade  $g$  mit  $g(a) = y(a)$  und  $\dot{g} = -\eta k$ .  $g$  trifft die Abszisse in  $a + 2(\xi - a)$ ,  $\xi := a + y(a)(2\eta k)^{-1}$ .

(S6) liefert  $|\dot{y}(s)| \leq \eta k$  für alle  $s \in [-2^{-1}, 0]$ ; es folgt

$$g \leq y \text{ in } [a, a + 2(\xi - a)] \cap [-1, 0].$$



a) Im Fall  $0 \leq \xi$  ergibt sich

$$(18) \quad \eta(2k)^{-1} \leq 2^{-1}y(a) = g(\xi) \leq g(0) \leq y(0) \leq \|\psi_1\|.$$

b) Im Fall  $\xi < 0$  benutzen wir

$$(19) \quad 0 < y \text{ in } [a - 2^{-1}, \xi].$$

Beweis dieser Aussage: Für  $a = -2^{-1}$  ist  $\dot{y}(a) \leq 0$  wegen  $y \leq y(a)$  in  $[-2^{-1}, 0]$ ; für  $-2^{-1} < a < 0$  gilt  $\dot{y}(a) = 0$ . Die Eigenschaft (S3) von  $\psi = y_0$  liefert, da  $0 < y(a)$ ,  $0 < y$  in  $[a - 2^{-1}, a]$ . Im Intervall  $[a, \xi] \subset [-1, 0]$  gilt  $0 < g \leq y$ .

Wir betrachten nun das Intervall  $J := [a + 2^{-1}(\xi - a) + 2^{-1}, \xi + 2^{-1}]$ .

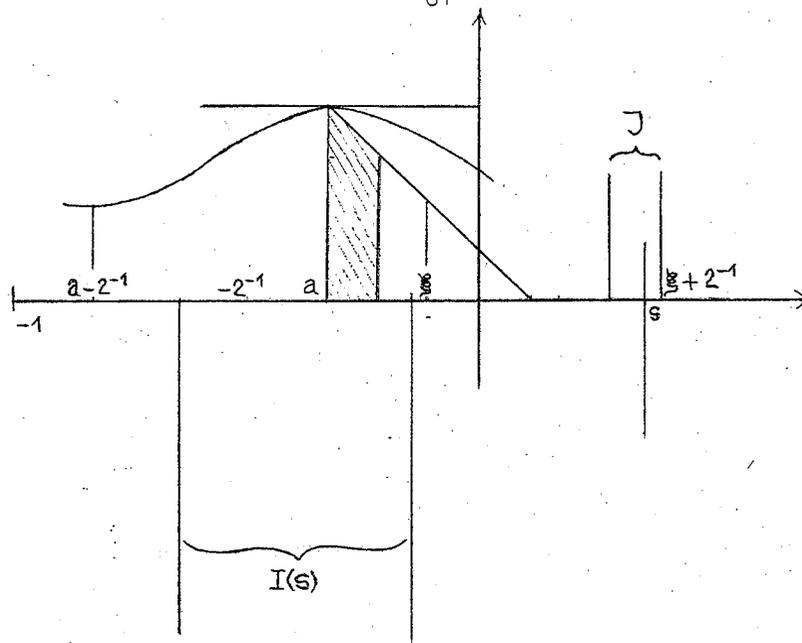
Wegen  $-2^{-1} \leq a$  und  $\xi < 0$  liegt  $J$  in  $(0, 2^{-1}]$ , und mit (19) folgt

$$(20) \quad 0 < y \text{ in } I(s) \text{ für alle } s \in J.$$

Wir zeigen  $[a, a + 2^{-1}(\xi - a)] \subset I(s)$  für alle  $s \in J$ : Für  $s \in J$

gilt  $a + 2^{-1}(\xi - a) + 2^{-1} \leq s$ , also  $a + 2^{-1}(\xi - a) \leq s - 2^{-1}$ ;

außerdem gilt  $s - 1 \leq \xi + 2^{-1} - 1 < -2^{-1} \leq a$  für  $s \in J$ .



Für alle  $s \in J$  folgt mit (20) und mit  $0 < g \leq y$  im Intervall  $[a, a + 2^{-1}(\xi - a)]$

$$-\dot{y}(s) = 2\alpha \int_{I(s)} y \geq 2\alpha \int_a^{a + 2^{-1}(\xi - a)} g = (8\eta k)^{-1} 3\alpha (y(a))^2,$$

also wegen (17)

$$|y(\xi + 2^{-1}) - y(a + 2^{-1}(\xi - a) + 2^{-1})| = \int_J -\dot{y} \geq (4\eta k)^{-1} y(a) (8\eta k)^{-1} 3\alpha (y(a))^2 \geq (2k)^{-5} 3\alpha \eta,$$

folglich

$$(21) \quad 2^{-1} (2k)^{-5} 3\alpha \eta \leq \|\psi_1\|.$$

Nach (18) und (21) läßt sich  $\|T_\alpha(1)\psi\| = \|\psi_1\|$  durch eine positive Konstante nach unten abschätzen, die nur von  $\alpha$ ,  $\eta$  und  $k$  abhängt. Daraus folgt die Behauptung.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen in

Folgerung 2. Sei  $\alpha > 2$ . Sei  $k > 0$ , und sei  $S(k)$  eine Menge differenzierbarer Funktionen  $\psi \in X$  mit (S1), (S2), (S3), (S4), welche zusätzlich den Abschätzungen (S5) und (S6) genügen.

Dann gilt für alle  $\eta > 0$

$$0 < \inf\{ \|\pi_{\lambda_0}(\alpha)\psi\| \mid \psi \in S(k) \wedge \|\psi\| = \eta \}.$$

### 6. Ejektivität. Ungedämpft schwingende Lösungen

Wir leiten zuerst Abschätzungen vom Typ (S5) und (S6) für die Trajektorienstücke  $x_t$  beschränkter Lösungen  $x$  von  $(\alpha, f)$  her.

Bemerkung 6. Zu jeder stetigen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft (H1) und zu jeder Zahl  $r > 0$  gibt es Zahlen  $c = c(f, r) \in (0, 1)$ ,  $d = d(f, r) > 1$  mit

$$0 < |\xi| \leq r \Rightarrow c|\xi| < |f(\xi)| < d|\xi|.$$

In den Lemmata, Bemerkungen und Folgerungen dieses Abschnitts betrachten wir stets eine Lösung  $x$  von  $(\alpha, f)$  unter den Voraussetzungen  $\alpha > 2$  und  $x_0 \in S$ . Wir schreiben  $z_j$  und  $m_j$  an Stelle von  $z_j(x)$  und  $m_j(x)$  für die nach Lemma 3 gegebenen Nullstellen und Extrema von  $x$ .

Lemma 13. Es sei  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < r$ . Dann gilt mit der Zahl  $d = d(f, r)$

aus Bemerkung 6:

$$m_j < t \leq m_j + 2^{-1} \Rightarrow -\alpha d x(m_j)(t - m_j) + x(m_j) < x(t) \quad \text{für alle ungeraden } j \in \mathbb{N}, \text{ und}$$

$m_j < t \leq m_j + 2^{-1} \Rightarrow x(t) < -\alpha d x(m_j)(t - m_j) + x(m_j)$  für alle geraden  $j \in \mathbb{N}$ .

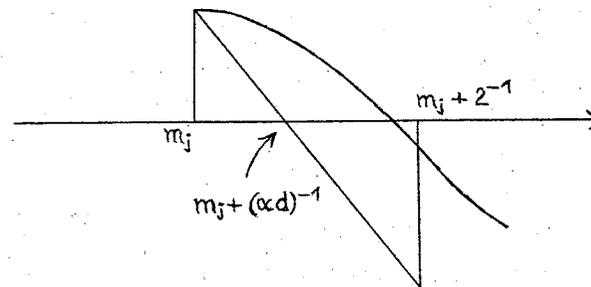
Beweis: Sei  $j \in \mathbb{N}$  ungerade, also  $0 < x(m_j)$ . Für  $m_j \leq t$ ,  $t \leq m_j + 2^{-1} < z_{j+1} + 2^{-1}$  gilt  $\dot{x}(t) \leq 0$  und  $I(t) \subset [z_j - 2^{-1}, z_{j+1}]$ , folglich  $x \leq 0$  in  $I(t) \cap [z_j - 2^{-1}, z_j]$  (Man beachte im Fall  $j = 1$ , daß  $x_0 \in S$ .) sowie  $0 < f \circ x < dx$  in  $I(t) \cap (z_j, z_{j+1})$  wegen

$\sup_{[-1, \infty)} |x| < r$  und Bemerkung 6. Es folgt

$$0 \leq -\dot{x}(t) = 2\alpha \int_{I(t)} f \circ x \leq 2\alpha \int_{I(t) \cap (z_j, z_{j+1})} f \circ x <$$

$$\alpha d \sup_{[z_j, z_{j+1}]} x = \alpha d x(m_j),$$

daher die Behauptung für  $j$  ungerade.



Für gerade  $j \in \mathbb{N}$  schließt man analog.

Wir schätzen nun für  $t \in [m_j, m_{j+1})$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , die Größe

$$\varrho(t) := \sup_{[t - (1/2), t]} |x| \text{ durch } \sup_{[t, t + (1/2)]} |x| \text{ nach oben ab.}$$

Im Fall  $t - 2^{-1} \leq m_j$  gilt wegen Lemma 3:  $\varrho(t) = |x(m_j)|$  oder

$$\varrho(t) = |x(t)|.$$

Im Fall  $m_j < t - 2^{-1}$  gilt wegen Lemma 3:  $\varrho(t) = |x(t - 2^{-1})|$  oder

$$\varrho(t) = |x(t)|.$$

Im Fall  $\varphi(t) = |x(t)|$ , der nach Lemma 3 insbesondere für  $z_{j+1} \leq t - 2^{-1} < t < m_{j+1}$  eintritt, erhalten wir sofort

$$(22) \quad \varphi(t) \leq \sup_{[t, t+(1/2)]} |x|.$$

Nichttrivial sind nach diesen Vorbemerkungen höchstens die Fälle

$$t - 2^{-1} \leq m_j < t \text{ und } \varphi(t) = |x(m_j)|,$$

$$m_j < t - 2^{-1} < z_{j+1} \text{ und } \varphi(t) = |x(t-2^{-1})|.$$

Lemma 14. Sei  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < r$ . Es gibt eine nur von  $\alpha > 2$ ,  $r$  und

$f$  abhängende Zahl  $k_1 = k_1(\alpha, f, r)$  mit

$$t - 2^{-1} \leq m_j < t \wedge |x(m_j)| = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(t) \leq k_1 \sup_{[t, t+(1/2)]} |x|$$

und mit

$$m_j < t - 2^{-1} < z_{j+1} \wedge z_{j+1} \leq m_j + 2^{-1} \wedge \varphi(t) = |x(t-2^{-1})| \Rightarrow$$

$$\varphi(t) \leq k_1 \sup_{[t, t+(1/2)]} |x|$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

Beweis:

a) Zur ersten Implikation. Sei  $j \in \mathbb{N}$ ,  $0 < x(m_j)$  (Im Fall

$x(m_j) < 0$  leitet man die gesuchte Abschätzung analog her.).

Wir betrachten die Gerade  $g: s \mapsto -\alpha d x(m_j)(s-m_j) + x(m_j)$  aus

Lemma 13, setzen  $\xi := m_j + (2\alpha d)^{-1}$  und gehen wie beim Beweis

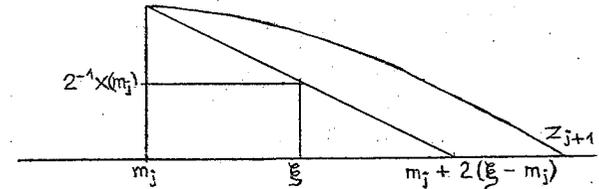
von Lemma 12 vor.

$g$  trifft die Abszisse in  $m_j + 2(\xi - m_j)$ . Dieser Punkt und  $\xi$  selbst

liegen wegen  $\alpha > 2$ ,  $d > 1$  in  $(m_j, m_j + 2^{-1})$ . Auf  $[m_j, m_j + 2(\xi - m_j))$

gilt  $0 < g \leq x$  (Lemma 13). Insbesondere folgt

$$\xi < m_j + 2(\xi - m_j) \leq z_{j+1}.$$



a1) Im Fall  $t \leq \xi$  folgt wegen Lemma 13

$$2^{-1}\varphi(t) = 2^{-1}x(m_j) = g(\xi) \leq g(t) \leq x(t) \leq \sup_{[t, t+(1/2)]} |x|.$$

a2) Im Fall  $\xi < t$  liegt das Intervall

$$J := [m_j + 2^{-1}(\xi - m_j) + 2^{-1}, \xi + 2^{-1}] \text{ in } [t, t+2^{-1}]. \text{ Beweis:}$$

$s \leq \xi + 2^{-1}$  und  $\xi < t$  geben  $s < t + 2^{-1}$ ;

$m_j + 2^{-1}(\xi - m_j) + 2^{-1} \leq s$  und  $t - 2^{-1} \leq m_j$  geben  $t \leq m_j + 2^{-1} < s$ .

Für alle  $s \in J$  gilt  $I(s) = (z_j, z_{j+1})$ . Beweis:  $z_j \leq m_j - 2^{-1}$  und  $m_j + 2^{-1}(\xi - m_j) + 2^{-1} \leq s$  geben  $z_j < s - 1$ .  $s - 2^{-1} < z_{j+1}$  folgt aus  $s - 2^{-1} \in [m_j, \xi]$  und  $\xi < z_{j+1}$ .

Wir erhalten  $0 < x$  in  $I(s)$  und  $\dot{x} < 0$  in  $J$ , letzteres wegen

$$m_j < s \leq \xi + 2^{-1} < z_{j+1} + 2^{-1} \text{ für alle } s \in J.$$

Für alle  $s \in J$  gilt  $[m_j, m_j + 2^{-1}(\xi - m_j)] \subset I(s)$ . Beweis:

$$m_j + 2^{-1}(\xi - m_j) \leq s - 2^{-1} \text{ nach Definition von } J. \quad s \leq \xi + 2^{-1}$$

$$\text{und } \xi < m_j + 2^{-1} \text{ geben } s - 1 \leq \xi - 2^{-1} < m_j.$$

Wegen  $\dot{x} < 0$  in  $J$  gilt

$$2 \sup_{[t, t+(1/2)]} |x| \geq |x(\xi + 2^{-1}) - x(m_j + 2^{-1}(\xi - m_j) + 2^{-1})| =$$

$$|\int_J \dot{x}| = -\int_J \dot{x} = 2\alpha \int_J (\int_{I(s)} f \circ x) ds.$$

Das innere Integral läßt sich nach den vorigen Überlegungen

für alle  $s \in J$  nach unten abschätzen durch

$$\int_{m_j}^{m_j + 2^{-1}(\xi - m_j)} f \circ x \geq \int_{m_j}^{m_j + 2^{-1}(\xi - m_j)} cx \geq c \int_{m_j}^{m_j + 2^{-1}(\xi - m_j)} x \geq$$

$$c \int_{m_j}^{m_j + 2^{-1}(\xi - m_j)} 2^{-1}x(m_j) = c2^{-2}(\xi - m_j)x(m_j),$$

mit der Zahl  $c = c(f, r)$  aus Bemerkung 6. Es folgt

$$\sup_{[t, t+(1/2)]} |x| \geq \alpha 2^{-1} (\xi - m_j) c 2^{-2} (\xi - m_j) x(m_j) = 2^{-5} \alpha^{-1} d^{-2} c \varrho(t).$$

Mit  $k_1 := k_1(\alpha, f, r) := 2^5 \alpha d^2 c^{-1} > 2$  erhalten wir aus a1) und aus a2) die erste Implikation von Lemma 14.

b) Zur zweiten Implikation.  $m_j \in [z_{j+1} - 2^{-1}, z_{j+1})$  gibt

$$|x(m_j)| = \sup_{[z_{j+1} - (1/2), z_{j+1}]} |x| = \varrho(z_{j+1}).$$

Mit der schon bewiesenen ersten Implikation folgt

$$(23) \quad |x(m_j)| \leq k_1 \sup_{[z_{j+1}, z_{j+1} + (1/2)]} |x|.$$

Wegen  $m_j < t - 2^{-1} < z_{j+1}$  gilt  $\varrho(t) = |x(t - 2^{-1})| \leq |x(m_j)|$ .

Wegen  $|x| \leq |x(z_{j+1} + 2^{-1})|$  in  $[z_{j+1}, z_{j+1} + 2^{-1}]$  und wegen  $z_{j+1} + 2^{-1} \in [t, t + 2^{-1}]$  (da  $t - 2^{-1} < z_{j+1} \leq m_j + 2^{-1} < t$ ) gilt

$$\sup_{[z_{j+1}, z_{j+1} + (1/2)]} |x| \leq \sup_{[t, t + (1/2)]} |x|.$$

Nun folgt die behauptete Abschätzung aus (23).

Lemma 15. Sei  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < r$ .

i) Es gibt eine nur von  $\alpha > 2$ ,  $r$  und  $f$  abhängende Zahl

$$k_2 = k_2(\alpha, f, r) \text{ mit}$$

$$t - 1 \leq m_j < t - 2^{-1} < z_{j+1} \wedge \varrho(t) = |x(t - 2^{-1})| \wedge$$

$$m_j + 2^{-1} < z_{j+1} \Rightarrow \varrho(t) \leq k_2 \sup_{[t, t + (1/2)]} |x|$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

ii) Es gibt eine nur von  $\alpha > 2$ ,  $r$  und  $f$  abhängende Zahl

$$k_3 = k_3(\alpha, f, r) \text{ mit}$$

$$m_j < t - 1 < t - 2^{-1} < z_{j+1} \wedge \varrho(t) = |x(t - 2^{-1})| \Rightarrow$$

$$\varrho(t) \leq k_3 \sup_{[t, t + (1/2)]} |x|$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

Beweis:

a) Zu i).  $m_j + 2^{-1} < z_{j+1}$  gibt  $|x(m_j)| = \sup_{[m_j, m_j + (1/2)]} |x|$ . Die

erste Implikation in Lemma 14 liefert

$$k_1^{-1} |x(m_j)| \leq \sup_{[m_j + (1/2), m_j + 1]} |x|. \text{ Wegen } m_j < t - 2^{-1} < z_{j+1} \text{ gilt}$$

$\varrho(t) = |x(t - 2^{-1})| \leq |x(m_j)|$ ; wegen  $m_j < m_j + 2^{-1} < m_j + 1 = (m_j + 2^{-1}) + 2^{-1} < z_{j+1} + 2^{-1}$  ist die rechte Seite der vorletzten Abschätzung gleich  $|x(m_j + 2^{-1})|$  oder gleich  $|x(m_j + 1)|$ , siehe

Lemma 3. Wir erhalten

$$(24) \quad \varrho(t) \leq k_1 \max\{|x(m_j + 2^{-1})|, |x(m_j + 1)|\}.$$

a1) Abschätzung von  $|x(m_j + 2^{-1})|$ . Sei noch  $0 < x(m_j)$  (Im Fall  $x(m_j) < 0$  geht man analog vor.). Für alle  $s \in [m_j + 4^{-1}, m_j + 1]$

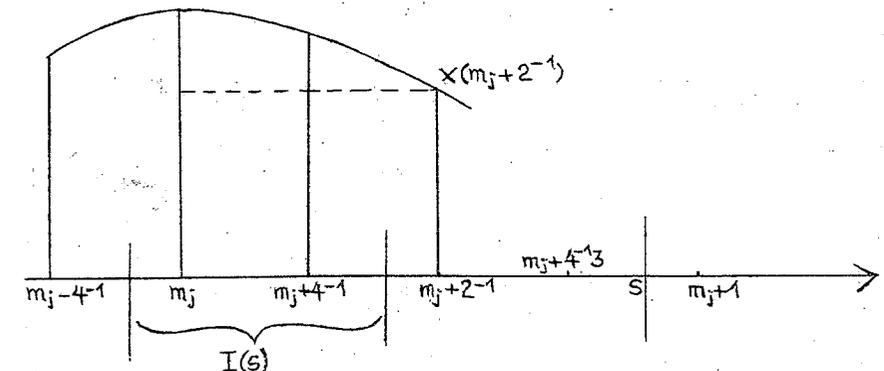
gilt  $I(s) = [m_j - 4^{-1}, m_j + 2^{-1}] \subset (z_j, z_{j+1})$ , da  $m_j + 2^{-1} < z_{j+1}$  vorausgesetzt ist, und  $[m_j, m_j + 4^{-1}] \subset I(s)$ ,

daher  $0 < x$  in  $I(s)$  und

$$-\dot{x}(s) = 2\alpha \int_{I(s)} f \circ x \geq 2\alpha c \int_{I(s)} x \geq 2\alpha c \int_{m_j}^{m_j + (1/4)} x \geq$$

$$2^{-1} \alpha c x(m_j + 2^{-1}) > 0$$

(mit  $0 < x$  in  $(z_j, z_{j+1})$  und  $m_j + 2^{-1} \in (m_j, z_{j+1})$ ).



Es folgt

$$|x(m_j+1) - x(m_j+4^{-1}3)| = -\int_{m_j+(3/4)}^{m_j+1} \dot{x} \geq 2^{-3}\alpha c x(m_j+2^{-1}),$$

also

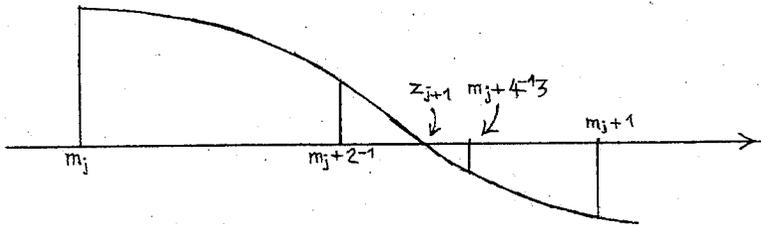
$$0 < x(m_j+2^{-1}) \leq 2^4\alpha^{-1}c^{-1}|x(m_j+1)| \text{ oder}$$

$$0 < x(m_j+2^{-1}) \leq 2^4\alpha^{-1}c^{-1}|x(m_j+4^{-1}3)|, \text{ damit}$$

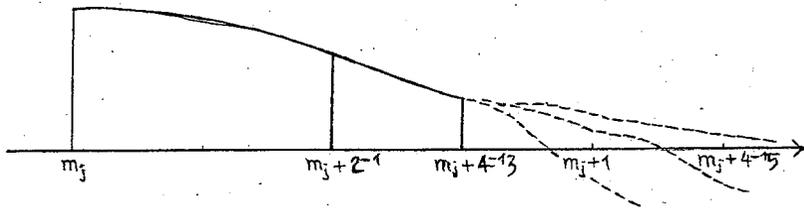
$$(25) \quad |x(m_j+2^{-1})| \leq 2^4\alpha^{-1}c^{-1}\max\{|x(m_j+4^{-1}3)|, |x(m_j+1)|\}.$$

a2) Abschätzung von  $|x(m_j+4^{-1}3)|$ .

Im Fall  $z_{j+1} \leq m_j + 4^{-1}3$  gilt wegen  $m_j + 4^{-1}3 < m_j + 1 = (m_j + 2^{-1}) + 2^{-1} < z_{j+1} + 2^{-1}$  nach Lemma 3  $|x(m_j+4^{-1}3)| < |x(m_j+1)|$ .



Im Fall  $m_j + 4^{-1}3 < z_{j+1}$  können wir wie bei der Herleitung von (25) vorgehen



und finden

$$|x(m_j+4^{-1}3)| \leq 2^4\alpha^{-1}c^{-1}\max\{|x(m_j+1)|, |x(m_j+4^{-1}5)|\}.$$

Zusammen:

$$(26) \quad |x(m_j+4^{-1}3)| \leq \max\{1, 2^4\alpha^{-1}c^{-1}\}\max\{|x(m_j+1)|, |x(m_j+4^{-1}5)|\}.$$

a3) Wir betrachten (24).

Im Fall  $t \leq m_j + 4^{-1}3$  gilt  $t \leq m_j + 4^{-1}3 < m_j + 1 < t + 2^{-1}$  (da  $t - 1 \leq m_j < t - 2^{-1}$  vorausgesetzt ist), folglich

$$|x(m_j+4^{-1}3)| \leq \sup_{[t, t+(1/2)]} |x| \text{ und } |x(m_j+1)| \leq \sup_{[t, t+(1/2)]} |x|,$$

und (24) und (25) ergeben

$$\varrho(t) \leq k_1 \max\{1, 2^4\alpha^{-1}c^{-1}\} \sup_{[t, t+(1/2)]} |x|.$$

Im Fall  $m_j + 4^{-1}3 < t$  gilt  $t \leq m_j + 1 < m_j + 4^{-1}5 < t + 2^{-1}$ , und (24), (25) und (26) liefern

$$\begin{aligned} \varrho(t) &\leq k_1 (\max\{1, 2^4\alpha^{-1}c^{-1}\})^2 \max\{|x(m_j+1)|, |x(m_j+4^{-1}5)|\} \leq \\ &k_1 (\max\{1, 2^4\alpha^{-1}c^{-1}\})^2 \sup_{[t, t+(1/2)]} |x|. \end{aligned}$$

b) Zu ii). Wie in a1) und in a2) zeigt man mit  $m_j < t - 1 < t - 2^{-1} < z_{j+1}$

$$\begin{aligned} \varrho(t) = |x(t-2^{-1})| &\leq 2^4\alpha^{-1}c^{-1} \max\{|x(t-4^{-1})|, |x(t)|\} \text{ und} \\ |x(t-4^{-1})| &\leq \max\{1, 2^4\alpha^{-1}c^{-1}\} \max\{|x(t)|, |x(t+4^{-1})|\}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\varrho(t) \leq (\max\{1, 2^4\alpha^{-1}c^{-1}\})^2 \sup_{[t, t+(1/2)]} |x|.$$

Folgerung 3. Sei  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < r$ . Es gibt eine nur von  $\alpha > 2$ ,  $r$

und  $f$  abhängende Zahl  $k = k(\alpha, f, r) > 1$  mit

$$\sup_{[t-(1/2), t]} |x| \leq k \sup_{[t, t+(1/2)]} |x| \text{ für alle } t \geq m_1$$

und mit

$$|\dot{x}(s)| \leq k \|x_t\| \text{ für alle } t \geq m_1 + 1 \text{ und alle } s \in [t-2^{-1}, t].$$

Beweis: Aus den Überlegungen vor Lemma 14 sowie aus Lemma 14

und Lemma 15 ergibt sich die Existenz einer nur von  $\alpha > 2$ ,  $r$  und

f abhängenden Zahl  $k' \geq 1$  mit

$$(27) \quad \sup_{[t-(1/2), t]} |x| \leq k' \sup_{[t, t+(1/2)]} |x| \quad \text{für alle } t \geq m_1.$$

Sei  $m_1 + 1 \leq t$ , sei  $s \in [t-2^{-1}, t]$ , und sei  $\dot{x}(s) < 0$  (Für  $0 < \dot{x}(s)$  analoger Beweis. Für  $\dot{x}(s) = 0$  ist nichts zu zeigen.).

Dann gilt  $m_j < s < m_{j+1}$  mit  $j \in \mathbb{N}$  ungerade. Mit den Abstandsbeziehungen von Lemma 3 und mit Bemerkung 6 folgt

$$|\dot{x}(s)| = -\dot{x}(s) = 2\alpha \int_{I(s)} f \circ x \leq 2\alpha \int_{I(s) \cap (z_j, z_{j+1})} f \circ x \leq$$

$$\alpha d \sup_{I(s)} |x|.$$

Wegen  $m_1 + 1 \leq t$  gilt  $m_1 \leq s - 2^{-1}$ , also läßt sich die rechte Seite nach (27) durch  $\alpha d k' \sup_{[s-(1/2), s]} |x|$  nach oben abschätzen.

Mit  $[s-2^{-1}, s] \subset [t-1, t]$  folgt  $|\dot{x}(s)| \leq \alpha d k' \|x_t\|$ .

Zu  $\alpha > 2$  und zu  $f$  definieren wir  $S_1(\alpha, f)$  als die Menge aller differenzierbaren Funktionen  $\psi \in X$  mit den Eigenschaften (S1), (S2), (S3) und (S4), für die zusätzlich die Abschätzungen (S5) und (S6) mit der Konstanten  $k(\alpha, f, 1)$  aus Folgerung 3 richtig sind.

Diese Menge genügt den Voraussetzungen von Folgerung 2.

Im Blick auf Voraussetzung iii) von Satz I.1 bemerken wir, daß für die Trajektorienstücke  $x_t$  von Lösungen  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $\alpha > 2$ ,  $x_0 \in S$  und  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < 1$  für  $t > m_1(x) + 1$  neben den Aussagen (S1), (S2) und (S3) auch die Abschätzungen (S5) und (S6) mit der Konstanten  $k(\alpha, f, 1)$  richtig sind (Folgerung 3).

Wir zeigen nun, daß im Fall hinreichend kleiner Lösungen  $x$  die Trajektorienstücke  $x_t$  für große  $t$  auch die Eigenschaft (S4) besitzen. Wie zu Beginn setzen wir  $\alpha > 2$  und  $x_0 \in S$  voraus.

Während die erste Abschätzung in Folgerung 3 insbesondere sagt, daß  $|x|$  nicht unkontrolliert klein wird, zeigt das folgende einfache Lemma, daß  $|x|$  nicht unkontrolliert anwächst.

Für  $j \in \mathbb{N}$  und  $j \geq 2$  setzen wir  $z_j^* := z_j^*(x) := \max\{z_{j-1}(x), z_j(x) - 1\}$ .

Lemma 16. Sei  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < r$ . Es gibt eine nur von  $\alpha > 2$ ,  $r$  und  $f$  abhängende Zahl  $k_4 = k_4(\alpha, f, r) > 1$  mit

$$|x(m_j)| \leq k_4 \sup_{[z_j^*, z_j]} |x| \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit } j \geq 2.$$

Beweis: Sei  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j \geq 2$ ,  $x(m_j) < 0$  (Für  $0 < x(m_j)$  geht man analog vor.). Für ein  $t \in (z_j, m_j)$  gilt

$$(28) \quad 0 < -x(m_j) \leq -x(m_j)(m_j - z_j)^{-1} = \\ = -(x(m_j) - x(z_j))(m_j - z_j)^{-1} = -\dot{x}(t) = 2\alpha \int_{I(t)} f \circ x \leq \\ 2\alpha \int_{I(t) \cap \{s \geq -1 \mid 0 < x(s)\}} f \circ x.$$

Mit  $z_{j-1} < z_j - 2^{-1} < t - 2^{-1}$  folgt  $z_{j-1} - 2^{-1} < t - 1$ , daher ergibt sich mit  $x \leq 0$  in  $[z_{j-1} - 2^{-1}, z_{j-1}] \cup [z_j, m_j]$ :

$$I(t) \cap \{s \geq -1 \mid 0 < x(s)\} = I(t) \cap (z_{j-1}, z_j) \subset [z_j^*, z_j].$$

Mit  $d = d(f, r)$  folgt nach Bemerkung 6 deshalb aus (28)

$$|x(m_j)| = -x(m_j) \leq \alpha d \sup_{[z_j^*, z_j]} x = \alpha d \sup_{[z_j^*, z_j]} |x|.$$

Zur Lösung  $x$  von  $(\alpha, f)$  und zu  $r > 0$  definieren wir für  $j \in \mathbb{N}$   $t_j := t_j(x, r) := m_j + (\alpha d(f, r))^{-1}$ .

Bemerkung 7. Sei  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < r$ . Dann gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$

$$t_j < z_{j+1}.$$

Beweis: Für die Gerade  $g: t \mapsto -\alpha d(f, r) x(m_j)(t - m_j) + x(m_j)$

gilt im Fall  $0 < x(m_j)$  nach Lemma 13  $0 = g(t_j) < x(t_j)$  und  $0 < g(t) < x(t)$  für alle  $t \in (m_j, t_j)$ .

Lemma 17. Sei  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < r$ . Es gibt eine nur von  $\alpha > 2$ ,  $r$  und

$f$  abhängende Zahl  $k_5 = k_5(\alpha, f, r)$  mit

$$t_j < z_j + 1 \Rightarrow |x(m_j)| \leq k_5 \left| \int_{I(t_j)} x - \int_{I(m_j)} x \right|$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$  mit  $j \geq 3$ .

Beweis: Wir betrachten wieder nur den Fall  $0 < x(m_j)$ . Sei  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j \geq 3$ . Wir setzen

$$L := \left| \int_{I(t_j)} x - \int_{I(m_j)} x \right| = \left| \int_{t_j-1}^{t_j-(1/2)} x - \int_{m_j-1}^{m_j-(1/2)} x \right|.$$

Mit  $m_j < t_j < m_j + 2^{-1}$  (siehe Definition von  $t_j$ ) folgt

$t_j - 1 < m_j - 2^{-1}$ , daher

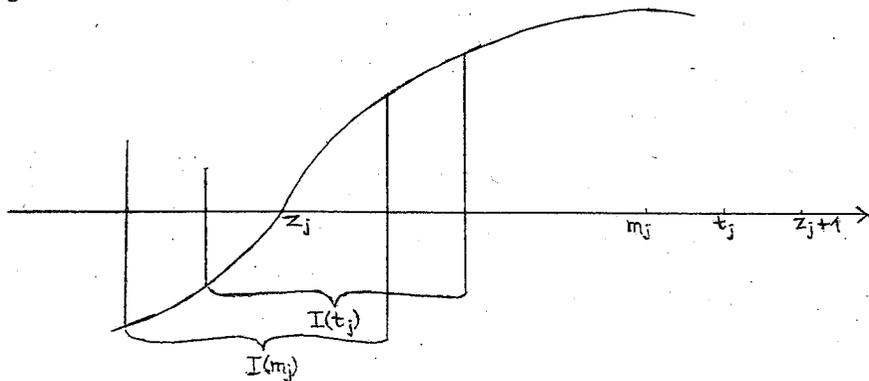
$$L = \left| \int_{m_j-(1/2)}^{t_j-(1/2)} x - \int_{m_j-1}^{t_j-1} x \right|.$$

Wegen  $z_j < m_j - 2^{-1} < t_j - 2^{-1} < z_{j+1}$  und  $z_{j-1} < m_j - 1 <$

$t_j - 1 < z_j$  (nach Voraussetzung) sowie  $0 < x(m_j)$  ergibt sich

$$L = \int_{m_j-(1/2)}^{t_j-(1/2)} x - \int_{m_j-1}^{t_j-1} x.$$

Der Integrand im ersten Integral ist positiv, der im zweiten negativ.



a) Im Fall  $m_j - 1 \leq m_{j-1}$  gilt  $x(m_j) < 2c^{-1}\alpha^2 d^3 k_4 L$ , mit  $c = c(f, r)$ ,  $d = d(f, r)$ ,  $k_4 = k_4(\alpha, f, r)$ .

Beweis: Mit  $0 < \dot{x}$  und  $0 < x$  in  $(z_j, m_j)$  erhalten wir

$$d x(m_j - 2^{-1}) \geq d x(m_j - 2^{-1})(m_j - 2^{-1} - z_j) \geq d \int_{z_j}^{m_j - (1/2)} x >$$

$$\int_{z_j}^{m_j - (1/2)} f \circ x = - \int_{m_j-1}^{z_j} f \circ x \quad (\text{mit } (\alpha, f) \text{ und } \dot{x}(m_j) = 0)$$

$$\geq - \int_{m_j-1}^{t_j-1} f \circ x \quad (\text{mit } z_{j-1} < m_j - 1 \leq m_{j-1} <$$

$t_{j-1} < z_j$  nach Bemerkung 7)

$$\geq -c \int_{m_j-1}^{t_j-1} x \quad (\text{mit Bemerkung 6})$$

$$\geq -c 2^{-1} (\alpha d)^{-1} x(m_{j-1}) \quad (\text{mit Lemma 13 und}$$

$t_{j-1} - m_{j-1} = (\alpha d)^{-1}$ ).

Folglich

$$L > \int_{m_j-(1/2)}^{t_j-(1/2)} x > (t_j - m_j) x(m_j - 2^{-1}) = (\alpha d)^{-1} x(m_j - 2^{-1}) > \\ -2^{-1} c \alpha^{-2} d^{-3} x(m_{j-1}).$$

Wegen  $z_{j-1} < m_j - 1$  (Lemma 3) und wegen  $z_j - 1 < m_j - 1$  gilt  $z_j^* < m_j - 1$ . Im betrachteten Fall folgt hieraus  $z_j^* < m_{j-1} < z_j$ , also mit Lemma 16

$$-x(m_{j-1}) = \sup_{(z_j^*, z_j)} |x| \geq k_4^{-1} |x(m_j)|,$$

daher die behauptete Abschätzung.

b) Im Fall  $m_{j-1} < m_j - 1$  gilt  $x(m_j) \leq k k_4 \sup_{[m_j-(3/2), z_j]} |x|$ ,

mit der Konstanten  $k$  aus Folgerung 3.

Beweis: Für  $m_j - 2^{-1} \leq m_{j-1} < m_j - 1$  folgt  $z_{j-1} < m_{j-1} - 2^{-1} <$   
 $m_j - 2^{-1} \leq m_{j-1}$ , daher mit  $z_j - 1 < m_j - 2^{-1} \leq m_{j-1}$  (Lemma 3):

$z_j^* < m_{j-1} < z_j$ . Also

$$\sup_{[m_j-(3/2), z_j]} |x| = -x(m_{j-1}) = \sup_{[z_j^*, z_j]} |x| \geq k_4^{-1} |x(m_j)| \geq (k k_4)^{-1} x(m_j).$$

Für  $m_{j-1} < m_j - 2^{-1}$  ergibt sich mit  $x < 0 < \dot{x}$  in  $(m_{j-1}, z_j)$  und mit  $m_j - 2^{-1} < z_j - 2^{-1}$  (Lemma 3)

$$\sup_{[m_{j-1}-(2/3), z_j]} |x| = -x(m_j - 2^{-1}) > -x(z_j - 2^{-1}) = \sup_{[z_j-(1/2), z_j]} |x|$$

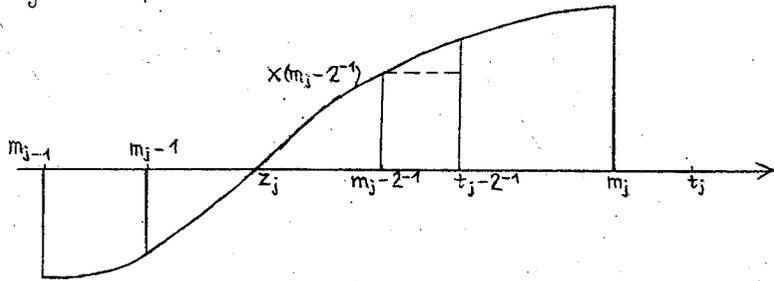
$$\geq k^{-1} \sup_{[z_{j-1}, z_j-(1/2)]} |x| \quad (\text{mit Folgerung 3})$$

$$= k^{-1} \sup_{[z_{j-1}, z_j]} |x|$$

$$= k^{-1} \sup_{[z_j^*, z_j]} |x| \quad (\text{mit } z_{j-1} < m_{j-1} - 2^{-1} < m_j - 2 < z_j - 1)$$

$$\geq (kk_4)^{-1} x(m_j) \quad (\text{mit Lemma 16}).$$

c) Im Fall  $m_{j-1} < m_j - 1$  und  $-x(m_j - 1) \leq x(m_j - 2^{-1})$  gilt  $x(m_j) < k^2 k_4 \alpha d L$ .



$$\text{Beweis: } L > \int_{m_{j-1}-(1/2)}^{t_j-(1/2)} x > (t_j - m_j) x(m_j - 2^{-1})$$

$$= (\alpha d)^{-1} \sup_{[m_{j-1}, m_j-(1/2)]} |x|$$

(wegen  $0 < \dot{x}$  in  $(m_{j-1}, m_j - 2^{-1})$  und  $-x(m_j - 1) \leq x(m_j - 2^{-1})$ )

$$\geq (k\alpha d)^{-1} \sup_{[m_{j-1}-(3/2), m_j-1]} |x|$$

(mit Folgerung 3)

$$= (k\alpha d)^{-1} \sup_{[m_{j-1}-(3/2), z_j]} |x|$$

(da  $x < 0 < \dot{x}$  in  $(m_{j-1}, z_j)$ )

$$\geq (k^2 k_4 \alpha d)^{-1} x(m_j)$$

(nach b)).

d) Im Fall  $m_{j-1} < m_j - 1$  und  $x(m_j - 2^{-1}) < -x(m_j - 1)$  gilt  $x(m_j) < 2\alpha dk^5 k_4 L$ .

Beweis: Wir setzen  $\varrho := \sup_{[m_{j-2}, m_{j-1}]} |x|$ .  $3 \leq j$  impliziert

$m_1 < m_{j-1} - 2^{-1} < m_j - 2^{-1}$ . Daher liefert Folgerung 3

$$(29) \quad \varrho = \max\left\{ \sup_{[m_{j-2}, m_{j-1}-(3/2)]} |x|, \sup_{[m_{j-1}-(3/2), m_{j-1}]} |x| \right\}$$

$$\leq k^2 \sup_{[m_{j-1}, m_{j-1}-(1/2)]} |x|$$

$$= -k^2 x(m_{j-1}) \quad (\text{mit } 0 < \dot{x} \text{ in } (m_{j-1}, m_j) \text{ und } x(m_j - 2^{-1}) < -x(m_{j-1})).$$

Wir betrachten die Gerade  $g$  mit  $g(m_{j-1}) = -k^{-2}\varrho$  und  $\dot{g} = \alpha d\varrho$ .

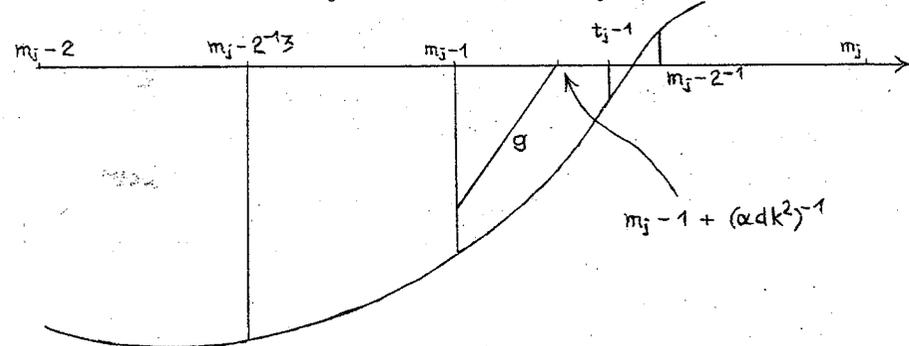
In  $[m_j - 1, m_j - 1 + (\alpha dk^2)^{-1}]$  gilt  $x \leq g \leq 0$ . (Beweis: Die Definition von  $g$  gibt wegen (29)  $x(m_{j-1}) \leq g(m_{j-1}) < 0$  und  $g(m_j - 1 + (\alpha dk^2)^{-1}) = 0$ . Für  $m_j - 1 \leq t \leq m_j - 1 + (\alpha dk^2)^{-1}$  und  $s \in I(t)$  folgt  $s \in [m_{j-2}, m_{j-1}]$ , also  $0 < x(s)$  oder  $-\varrho \leq x(s) \leq 0$ .

Wie im Beweis von Lemma 13 ergibt sich daraus

$$0 < \dot{x}(t) = -2\alpha \int_{I(t)} f \circ x \leq \alpha d\varrho = \dot{g}(t)$$

für alle  $t \in [m_j - 1, m_j - 1 + (\alpha dk^2)^{-1}]$ .

Mit  $1 \leq k$  erhält man  $m_j - 1 + (\alpha dk^2)^{-1} \leq t_j - 1$ ,



folglich

$$\begin{aligned} L &> -\int_{m_{j-1}}^{t_j-1} x \geq -\int_{m_{j-1}}^{t_j-1} + (\alpha dk^2)^{-1} g = 2^{-1}(\alpha dk^2)^{-1} \rho k^{-2} \\ &\geq (2\alpha dk^4)^{-1} \sup_{[m_j-(3/2), z_j]} |x| \quad (\text{mit } x < 0 < \dot{x} \text{ in } [m_{j-1}, z_j]) \\ &\geq (2\alpha dk^5 k_4)^{-1} x(m_j) \quad (\text{mit b)).} \end{aligned}$$

e) Aus a), c) und d) folgt die behauptete Abschätzung im Fall  $0 < x(m_j)$ . Für  $x(m_j) < 0$  wird sie analog hergeleitet.

Lemma 18. Es gibt eine nur von  $\alpha > 2$  und von  $f$  abhängige

Zahl  $\delta = \delta(\alpha, f) \in (0, 1]$ , sodaß für jede Lösung  $x$  (von  $(\alpha, f)$ )

mit  $\alpha > 2$ ,  $x_0 \in S$  mit  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < \delta$  gilt:

$$j \in \mathbb{N} \wedge j \geq 4 \wedge z_j \leq t < z_j + 2^{-1} \Rightarrow \operatorname{sgn} \int_{I(t)} x = \operatorname{sgn} x(z_j - 2^{-1}).$$

Beweis: Mit den Konstanten  $k_5(\alpha, f, 1)$  und  $k(\alpha, f, 1)$  aus Lemma 17

und aus Folgerung 3 definieren wir  $\varepsilon := k(\alpha, f, 1)^{-1} k_5(\alpha, f, 1)^{-1}$ .

Wegen  $f'(0) = 1$ ,  $f(0) = 0$  gibt es zu  $\varepsilon$  ein  $\delta = \delta(\alpha, f) \in (0, 1]$

mit  $(|\xi| \leq \delta \Rightarrow |f(\xi) - \xi| \leq \varepsilon |\xi|)$ .

Sei  $x$  eine Lösung von  $(\alpha, f)$  mit  $x_0 \in S$  und mit  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < \delta \leq 1$ .

a) Wir zeigen:

$$j \in \mathbb{N} \wedge j \geq 3 \wedge t_j < z_j + 1 \Rightarrow \operatorname{sgn} \int_{I(t_j)} x = \operatorname{sgn} x(z_{j+1} - 2^{-1}).$$

Beweis: Wir betrachten wieder nur den Fall  $0 < x(m_j)$ . Nach

Lemma 17 gilt

$$k_5(\alpha, f, 1)^{-1} x(m_j) \leq \left| \int_{I(t_j)} x - \int_{I(m_j)} x \right|.$$

Auf der rechten Seite dieser Abschätzung darf man wegen

$$\int_{I(t_j)} x - \int_{I(m_j)} x = \int_{m_j-(1/2)}^{t_j-(1/2)} x - \int_{m_{j-1}}^{t_j-1} x > 0$$

(siehe Anfang des Beweises von Lemma 17)

die Betragstriche weglassen. Es folgt

$$\int_{I(t_j)} x \geq k_5(\alpha, f, 1)^{-1} x(m_j) + \int_{I(m_j)} x.$$

Wegen  $0 = -(2\alpha)^{-1} \dot{x}(m_j) = \int_{I(m_j)} f \circ x$  erhalten wir

$$\left| \int_{I(m_j)} x \right| = \left| \int_{I(m_j)} (f \circ x - x) \right| \leq \varepsilon \int_{I(m_j)} |x| \quad (\text{da } |x| < \delta)$$

$$\leq \varepsilon 2^{-1} \sup_{I(m_j)} |x|$$

$$\leq \varepsilon 2^{-1} k(\alpha, f, 1) \sup_{[m_j-(1/2), m_j]} |x| \quad (\text{mit Folgerung 3})$$

$$\leq \varepsilon 2^{-1} k(\alpha, f, 1) x(m_j).$$

Also

$$\int_{I(t_j)} x \geq (k_5(\alpha, f, 1)^{-1} - \varepsilon 2^{-1} k(\alpha, f, 1)) x(m_j) > 0.$$

Mit  $\operatorname{sgn} x(m_j) = \operatorname{sgn} x(z_{j+1} - 2^{-1})$  folgt Behauptung a) im Fall

$0 < x(m_j)$ . Der Beweis für  $x(m_j) < 0$  verläuft analog.

b) Sei  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j \geq 4$ , und sei  $t \in [z_j, z_j + 2^{-1})$ . Sei  $x(m_j) < 0$  (Im

anderen Fall geht man analog vor.). Wegen  $0 < x(z_j - 2^{-1})$  ist

dann  $0 < \int_{I(t)} x$  zu zeigen.

Nach Lemma 3 gilt  $0 < x$  in  $(z_{j-1}, z_j)$ ; ferner:

$$z_{j-1} + 2^{-1} < m_{j-1} < t_{j-1} < z_j \quad (\leq t < z_j + 2^{-1}).$$

Im Fall  $z_{j-1} + 1 \leq t$  gilt  $z_{j-1} \leq t - 1 < t - 2^{-1} < z_j$ , daher

$$0 < \int_{I(t)} x.$$

Im Fall  $t < z_{j-1} + 1$  gilt  $t_{j-1} < t < z_{j-1} + 1$ , also

$$t_{j-1} - 1 < t - 1 < z_{j-1}. \text{ Mit } z_{j-1} + 2^{-1} < t_{j-1} \text{ und mit}$$

$z_{j-2} + 2^{-1} < z_{j-1}$  erhalten wir

$$(30) \quad z_{j-2} < t_{j-1} - 1 < t - 1 < z_{j-1} < t_j - 2^{-1} < t - 2^{-1} < z_j.$$

Wegen  $x < 0$  in  $(z_{j-2}, z_{j-1})$  und  $0 < x$  in  $(z_{j-1}, z_j)$  ergibt sich

aus (30):

$$\int_{I(t)} x > \int_{I(t_{j-1})} x > 0 \quad (\text{mit } j - 1 \geq 3 \text{ und}$$

mit  $t_{j-1} < z_{j-1} + 1$  nach a)).

Satz 2. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit der Eigenschaft (H1), und sei  $\alpha > 2\pi^2/9$ . Dann ist die Funktion  $\varphi = 0 \in X$  eektiv bezüglich der Funktionaldifferentialgleichung

$$(\alpha, f) \quad \dot{x}(t) = -2\alpha \int_{-1}^{-1/2} f(x(t+a)) da$$

und bezüglich der Menge  $S(\alpha, f)$  der Anfangswerte langsam schwingender Lösungen von  $(\alpha, f)$ .

Insbesondere gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| > \varepsilon$  für alle langsam schwingenden Lösungen  $x$  von  $(\alpha, f)$ .

Beweis: Sei  $\alpha > 2\pi^2/9$ , und sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit (H1). Wir wenden Satz I.1 an für die Abbildung

$$F: \psi \mapsto -2\alpha \int_{-1} f \circ \psi, \psi \in X \text{ (mit } N = 1 \text{ und } \tau = 1).$$

a) Der Eigenwert  $\lambda_0(\alpha)$  von  $A_\alpha = A_F$  hat wegen  $\alpha > 2\pi^2/9$  positiven Realteil (Satz 1). Die Menge  $S_1(\alpha, f)$  liegt in  $X \setminus \{0\}$ ; sie ist offenbar ein Kegel und erfüllt damit Voraussetzung i) von Satz I.1. Wegen Folgerung 2 ist auch Voraussetzung ii) erfüllt.

b) Nachweis von Voraussetzung iii): Sei  $x$  eine Lösung von  $(\alpha, f)$

mit  $x_0 \in S(\alpha, f)$  und mit  $\sup_{[-1, \infty)} |x| < \delta(\alpha, f) \leq 1$ . Wegen  $\alpha > 2$

gibt es ein  $s_1 \geq -1$  mit  $x_{s_1} \in S$  (Bemerkung 5). Die Lösung

$y: s \mapsto x(s_1+s)$ ,  $s \geq -1$ , von  $(\alpha, f)$  besitzt den Anfangswert

$y_0 = x_{s_1}$  und hat folglich für  $s \geq z_1(y) + 1$  die Eigenschaften

(S1), (S2) und (S3). Wegen  $\sup_{[-1, \infty)} |y| \leq \sup_{[-1, \infty)} |x| < 1$  gelten

nach Folgerung 3 die Abschätzungen (S5) und (S6) mit der Konstanten  $k(\alpha, f, 1)$  für alle  $s \geq m_1(y) + 1$ .

Für  $s \geq z_4(y)$  gilt (S4):  $y_s(z) = 0$  und  $-2^{-1} < z \leq 0$  implizieren für  $s \geq z_4(y)$  nach Lemma 3 zunächst  $s + z = z_j(y)$  mit  $j \geq 4$ ; mit  $\sup_{[-1, \infty)} |y| < \delta(\alpha, f)$  liefert Lemma 18 nun

$$\operatorname{sgn} \int_{-1} y_s = \operatorname{sgn} y_s(z-2^{-1}).$$

Zusammen folgt  $y_s \in S_1(\alpha, f)$  für alle  $s \geq z_4(y)$ , und daher  $x_t \in S_1(\alpha, f)$  für alle  $t \geq s_1 + z_4(y)$ .

c) Die Eektivität von  $\varphi = 0 \in X$  bezüglich  $(\alpha, f)$  und  $S(\alpha, f)$

folgt nun aus Satz I.1. Die zweite Aussage von Satz 2 ergibt sich aus der ersten mit Bemerkung I.1 und mit Bemerkung 5.

### III. Periodische Lösungen

Wir verwenden weiter die Bezeichnungen aus Kapitel II.

Die Bedingung (H1) schließt nicht aus, daß alle langsam schwingenden Lösungen von  $(\alpha, f)$  für  $\alpha > 2\pi^2/9$  unbeschränkt sind. In diesem Fall, der etwa für  $f = \text{id}$  eintritt, gibt es offenbar keine periodischen langsam schwingenden Lösungen.

Wir betrachten im folgenden die Gleichung  $(\alpha, f)$  für stetige Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die neben der Eigenschaft (H1) auch die Eigenschaft

$$(H2) \quad \inf f > -\infty$$

besitzen (Beispiel:  $f = \exp - 1$ ). Die zusätzliche Bedingung macht alle Lösungen beschränkt. Wir zeigen nur

Lemma 1. Sei  $\alpha > 2$ , und sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit (H1) und (H2). Dann gilt für jede Lösung  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $x_0 \in S$

$$z_1(x) \leq t \Rightarrow |x(t)| \leq \alpha \max\{-\inf f, \sup_{[0, -\alpha \inf f]} f\}.$$

Beweis: Es genügt, die  $x(m_j)$  abzuschätzen. Für ungerade  $j$  folgt aus  $m_j - z_j < 1$  nach Lemma II.3

$$0 < x(m_j) = x(m_j) - x(z_j) = \int_{z_j}^{m_j} \dot{x} = \int_{z_j}^{m_j} (-2\alpha \int_{\mathbb{I}} f(x(t+a)) da) dt$$

$\leq -\alpha \inf f$ . Für gerade  $j$  und  $z_j < t < m_j$  gilt im Fall  $2 < j$

$z_{j-2} < t - 1$ , und im Fall  $j = 2$ :  $-2^{-1} < t - 1$ , wegen Lemma II.3.

Daher für alle  $a \in [-1, -2^{-1}]$  mit  $0 < x(t+a)$ :  $t + a \in (z_{j-1}, z_j)$ ,

und folglich  $x(t+a) \leq x(m_{j-1}) \leq -\alpha \inf f$ . Wir erhalten somit

$$0 < -x(m_j) = \int_{z_j}^{m_j} (2\alpha \int_{\mathbb{I}} f(x(t+a)) da) dt \leq \alpha \sup_{[0, -\alpha \inf f]} f.$$

Zu  $\alpha > 2$  und zu einer stetigen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit (H1) und (H2) definieren wir

$$K := \{\varphi \in S \mid \|\varphi\| \leq \alpha \max\{-\inf f, \sup_{[0, -\alpha \inf f]} f\}\} \cup \{0\}.$$

Die Menge  $K$  ist abgeschlossen, konvex, unendlichdimensional und beschränkt.

Den Verschiebungsoperator  $T$  definieren wir auf  $K$  wie folgt.

Ist  $\varphi \in K \setminus \{0\}$  und bezeichnet  $x$  die eindeutig bestimmte Lösung von  $(\alpha, f)$  mit  $x_0 = \varphi$  ( $\in S$ ), so setzen wir

$$T(\varphi) := x_{z_2 + (1/2)}$$

mit der nach Lemma II.3 gegebenen Nullstelle  $z_2 = z_2(x)$ . Mit

$$T(0) := 0$$

erhalten wir, daß  $T$  die Menge  $K$  in sich abbildet (Lemma 1 und Lemma II.3).

Folgerung 1. Es gibt eine Zahl  $r = r(\alpha, f) > 0$  mit

$$\sup_{\mathbb{R}^+} |x| + |\dot{x}| < r$$

für alle Lösungen  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $x_0 \in K$ .

Beweis: Sei  $x$  eine Lösung von  $(\alpha, f)$  mit  $0 \neq x_0 \in K$ . Auf

$[-1, 0] \cup [z_1, \infty)$  ist  $x$  nach Lemma 1 durch eine nur von  $\alpha$  und  $f$  abhängende Zahl  $r_1$  beschränkt. Für  $t \in (0, 2^{-1})$  gilt

$$-\dot{x}(t) = 2\alpha \int_{\mathbb{I}(t)} f \circ x \leq \alpha \sup_{[0, r_1]} f, \text{ daher } -r_1 - 2^{-1} \alpha \sup_{[0, r_1]} f \leq x$$

in  $[0, 2^{-1}]$ . - Im Fall  $2^{-1} < z_1$  wächst  $x$  in  $[2^{-1}, z_1]$ . Zusammen:

$$|x(t)| \leq r_1 + 2^{-1} \alpha \sup_{[0, r_1]} f \text{ für alle } t \in [-1, \infty).$$

Mit der Gleichung  $(\alpha, f)$  ergibt sich hieraus auch eine Schranke für  $\dot{x}$ .

Folgerung 2.  $T(K)$  ist relativkompakt.

Beweis:  $T(K) \subset K$  ist beschränkt. Nach Folgerung 1 sind die Ableitungen der  $T(\varphi)$  mit  $\varphi \in K$  gleichmäßig beschränkt, also ist  $T(K)$  gleichgradig stetig, und der Satz von Ascoli und Arzela ergibt die Behauptung.

Folgerung 3. Die Menge  $\{z_2(x) \mid x \text{ Lösung von } (\alpha, f) \text{ mit } 0 \neq x_0 \in K\}$  ist beschränkt.

Beweis: Wir wählen zu  $\alpha > 2$  und zu  $f$  ein  $\eta$  gemäß Bemerkung II.4, und zur Zahl  $r = r(\alpha, f)$  aus Folgerung 1 eine Zahl  $c = c(f, r)$  gemäß Bemerkung II.6. Sei  $x$  eine Lösung von  $(\alpha, f)$  mit  $0 \neq x_0 \in K$ . Wir zeigen zuerst die Beschränktheit von  $z_1 = z_1(x)$ . Dabei dürfen wir  $3 < z_1$  annehmen. Es gilt

a)  $2^{-1} < t < z_1 \Rightarrow x(t) < 0$ , und:  $1 < t < z_1 \Rightarrow 0 < \dot{x}(t)$ .

Beweis:  $3 < z_1$  liefert  $x \leq 0 \leq \dot{x}$  in  $[2^{-1}, z_1]$ .  $x(1) = 0$  würde somit  $x_2 = 0$  und folglich  $x|_{[1, \infty)} = 0$  implizieren, Widerspruch zu  $x_0 \in S$ . - Daher  $\dot{x}(1) < 0$  und  $x \leq x(1) < 0$  in  $[2^{-1}, 1]$ .

Sei  $z' := \sup\{t > 2^{-1} \mid x|_{[2^{-1}, t)} < 0\}$ . Es folgt  $1 < z' \leq z_1$  und  $x = 0$  in  $[z', z_1]$ . Wäre  $z' < z_1$ , so würde sich  $\dot{x}(z') = 0$  ergeben; andererseits mit  $x < 0$  in  $[2^{-1}, z')$  und  $1 < z'$ :  $0 < \dot{x}(z')$ , Widerspruch. Also  $z' = z_1$ . Daraus folgt Aussage a).

b) Für  $-\eta \leq x(3) < 0$  erhält man wie im Beweis von Lemma II.2  $z_1 < 3 + 2^{-1}3$ .

c) Im Fall  $x(3) < -\eta$  setzen wir  $t' := \sup\{t > 3 \mid x|_{(3, t)} < -\eta\}$ .

Es ist offenbar  $t' < z_1$ . Für  $3 < t < t' + 2^{-1}$  folgt mit  $-r < x < 0$  in  $(2^{-1}, t')$  und mit Bemerkung II.6

$$\dot{x}(t) = -2\alpha \int_I f(x(t+a))da \geq -2\alpha c \int_I x(t+a)da$$

$$\geq -\alpha c x(t-2^{-1}) \quad (\text{mit } 0 < \dot{x} \text{ in } (2, t'))$$

$$\geq \alpha c \eta \quad (\text{mit } t - 2^{-1} \leq t').$$

Für die durch  $g(3) = -r$ ,  $\dot{g} = \alpha c \eta$  definierte Gerade gilt also  $g \leq x$  in  $(3, t' + 2^{-1})$ . Mit  $g(3 + (\alpha c \eta)^{-1}(r - \eta)) = -\eta$  folgt  $3 < t' \leq 3 + (\alpha c \eta)^{-1}(r - \eta)$ , daher (siehe b))

$$z_1 < t' + 2^{-1}3 \leq 3 + 2^{-1}3 + (\alpha c \eta)^{-1}(r - \eta).$$

d) Aus a), b) und c) folgt  $z_1 < 3 + 2^{-1}3 + (\alpha c \eta)^{-1}(r - \eta)$ . Analog zeigt man  $z_2 - z_1 < 3 + 2^{-1}3 + (\alpha c \eta)^{-1}(r - \eta)$ .

Folgerung 4.  $T$  ist stetig an der Stelle  $\varphi = 0$ .

Beweis: Lemma II.1 und Folgerung 3.

Lemma 2. Die Abbildung  $\varphi \mapsto z_2$ , die jedem  $\varphi \in K \setminus \{0\}$  die Nullstelle  $z_2 = z_2(x)$  der Lösung  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $x_0 = \varphi$  zuordnet, ist stetig.

Beweis: Sei  $\varphi \in K \setminus \{0\}$ , sei  $x$  die zugehörige Lösung, und sei  $z_1 = z_1(x)$ ,  $z_2 = z_2(x)$ . Wir setzen  $z' := \inf\{t > 0 \mid x|_{[t, z_1]} = 0\}$  und sehen:  $0 \leq z' \leq z_1$ ,  $x \leq 0$  in  $[0, z']$ ,  $z_1 - z' < 1$  (Andernfalls würde  $x|_{[z', \infty)} = 0$  folgen, Widerspruch zu  $x_0 \in S$ ).

a)  $2^{-1} \leq t \leq z_1 \wedge x(t) = 0 \Rightarrow z' \leq t$ .

Beweis: Für  $0 < z_1$  wächst  $x$  in  $[2^{-1}, z_1]$ , siehe Beweis von Lemma II.3. Damit folgt aus  $2^{-1} \leq t \leq z_1$  und  $x(t) = 0$ :

$$0 = x|_{[t, z_1]}, \text{ also } z' \leq t.$$

b)  $0 < t < \min\{2^{-1}, z'\} \Rightarrow x(t) < 0$ .

Beweis: Für  $t \in (0, \min\{2^{-1}, z'\})$  mit  $x(t) = 0$  ergibt sich wegen  $x \leq 0$  in  $[0, t]$ :  $0 \leq \dot{x}(t)$ . Da  $\dot{x}$  in  $(0, 2^{-1}]$  wächst (siehe Beweis von Lemma II.3), folgt  $0 \leq \dot{x}(t) \leq \dot{x}(s)$  für  $t \leq s \leq 2^{-1}$ , und

daher  $0 \leq x$  in  $[t, 2^{-1}]$ . - Im Fall  $z' \leq 2^{-1}$  liefert dies  $z' \leq t$ , Widerspruch. Im Fall  $2^{-1} < z' \leq z_1$  geben  $x(2^{-1}) = 0$  und  $0 \leq \dot{x}$  in  $[2^{-1}, z_1]$  ebenfalls  $z' \leq t$ .

c) Aus a) und b) folgt  $x < 0$  in  $(0, z')$ , falls  $0 < z'$ .

d) Der Fall  $0 < z'$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben mit

$\varepsilon < 4^{-1} \min\{1 - 2^{-1}(z_1 - z'), z'\}$ . Aus Stetigkeitsgründen existiert ein  $\eta > 0$  mit

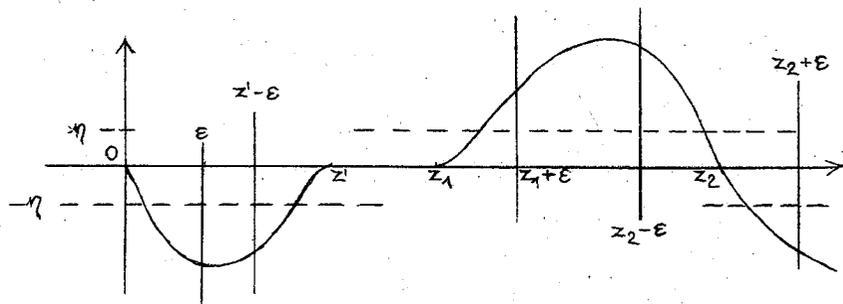
(1)  $\eta < |x|$  in  $[\varepsilon, z' - \varepsilon] \cup [z_1 + \varepsilon, z_2 - \varepsilon] \cup [z_2 + \varepsilon, z_2 + 2^{-1}]$ .

Zu  $\eta$  gibt es ein  $\delta \in (0, \|\varphi\|)$  mit

(2)  $-1 \leq t \leq z_2 + 2^{-1} \Rightarrow |x^\sharp(t) - x(t)| < \eta$

für alle Lösungen  $x^\sharp$  von  $(\alpha, f)$  mit  $\psi \in K \setminus \{0\}$  und mit

$\|\psi - \varphi\| < \delta$ .



Aus c), (1), (2) und aus Lemma II.3, angewandt auf  $x$ , folgt für diese Lösungen:  $x^\sharp < 0$  in  $[\varepsilon, z' - \varepsilon] \cup [z_2 + \varepsilon, z_2 + 2^{-1}]$  und  $0 < x^\sharp$  in  $[z_1 + \varepsilon, z_2 - \varepsilon]$ . Nach Lemma II.3 besitzt  $x^\sharp$  in  $(z_2 - \varepsilon, z_2 + \varepsilon)$  eine Nullstelle  $z_{2j}(x^\sharp)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen  $j = 1$ :

Aus  $\varepsilon < 4^{-1}$  und  $x^\sharp|_{[\varepsilon, z' - \varepsilon]} < 0$  folgt  $z' - \varepsilon < z_1(x^\sharp)$ , wegen Lemma II.3. In  $(z_2 - \varepsilon, z_2 + \varepsilon)$  liegt wegen  $\varepsilon < 4^{-1}$  außer  $z_{2j}(x^\sharp)$  keine Nullstelle von  $x^\sharp$ . In  $[z_1 + \varepsilon, z_2 - \varepsilon]$  hat  $x^\sharp$  keine Nullstelle.

Im Fall  $1 < j$  müßten folglich in  $(z' - \varepsilon, z_1 + \varepsilon)$  außer  $z_1(x^\sharp)$  auch die Nullstellen  $z_{2j-1}(x^\sharp)$  und  $z_{2j-2}(x^\sharp)$  liegen, im Widerspruch zu  $2\varepsilon + z_1 - z' < 1$  und den Abstandsbeziehungen der Nullstellen von  $x^\sharp$  nach Lemma II.3.

e) Im einfacheren Fall  $z' = 0$  geht man wie in d) vor.

Folgerung 5.  $T$  ist stetig in  $K \setminus \{0\}$ .

Beweis: Sind  $x$  und  $y$  Lösungen von  $(\alpha, f)$  mit Anfangswerten  $x_0 = \varphi$  und  $y_0 = \psi$  in  $K \setminus \{0\}$ , so gilt

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| = \|x_{z_2(x)+(1/2)} - y_{z_2(y)+(1/2)}\| \leq$$

$$\|x_{z_2(x)+(1/2)} - x_{z_2(y)+(1/2)}\| + \|x_{z_2(y)+(1/2)} - y_{z_2(y)+(1/2)}\|.$$

Für  $\psi$  nahe bei  $\varphi$  wird der erste Term der letzten Zeile klein wegen Lemma 2 und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $x$  in  $[-1, z_2(x) + 1]$ . Aus Lemma 2 und Lemma II.1 (mit  $z_2(x) + 1$  an Stelle von  $t$ ) folgt, daß auch der zweite Term für  $\psi$  nahe  $\varphi$  klein wird.

Satz 1. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit den Eigenschaften (H1) und (H2), sei  $\alpha > 2\pi^2/9$ . Dann besitzt die Gleichung

$$\dot{x}(t) = -2\alpha \int_1^{-1/2} f(x(t+a)) da$$

eine periodische Lösung  $\tilde{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Periode  $\omega > 1$  mit folgenden Eigenschaften:

- i)  $\tilde{x}(-2^{-1}) = 0 = \tilde{x}(-2^{-1} + \omega)$ ;
- ii) es gibt genau eine Nullstelle  $z$  von  $\tilde{x}$  in  $(0, \omega - 2^{-1})$  mit  $\tilde{x} < 0$  in  $(-2^{-1}, z)$  und  $0 < \tilde{x}$  in  $(z, \omega - 2^{-1})$ ;
- iii) es gibt genau zwei Extremstellen von  $\tilde{x}$  in  $[-2^{-1}, -2^{-1} + \omega]$ , eine in  $(0, z)$  und eine in  $(z + 2^{-1}, -2^{-1} + \omega)$ .

Beweis: Wir zeigen, daß  $\chi = 0 \in X$  eektiv bezüglich  $T$  ist. Dann folgt, da  $K$  und  $T$  die Voraussetzungen von Satz E.1 erfüllen, daß  $T$  einen von  $0$  verschiedenen Fixpunkt  $\psi$  hat. Wegen der Autonomie von  $(\alpha, f)$  und wegen der Eindeutigkeitsaussage von Lemma II.1 läßt sich die Lösung  $x^{\psi}$  von  $(\alpha, f)$  zu einer differenzierbaren periodischen Funktion  $\tilde{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen, welche der Gleichung

$$\dot{x}(t) = -2\alpha \int_I f(x(t+a)) da$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  genügt. Die Aussagen i), ii) und iii) ergeben sich mit  $\psi \in S$  aus Lemma II.3.

Beweis der Eektivität von  $\chi = 0$ :

a) Aus Satz II.2 folgt, daß zu  $\alpha$  und  $f$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit

$$(\forall t \geq 0 \exists s > t: \|x_s\| \geq \varepsilon)$$

für alle Lösungen  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $0 \neq x_0 \in K$ .

b) Zu  $\alpha, f$  und zur Schranke  $r = r(\alpha, f)$  aus Folgerung 1 liefern

Folgerung II.3 und Lemma II.16 Konstanten  $k = k(\alpha, f, r) \geq 1$

und  $k_4 = k_4(\alpha, f, r) \geq 1$  mit

$$m_1 + 2^{-1} \leq t \Rightarrow \sup_{I(t)} |x| \leq k \sup_{[t-(1/2), t]} |x|$$

und

$$j \in \mathbb{N} \wedge j \geq 2 \Rightarrow |x(m_j)| \leq k_4 \sup_{[z_j-1, z_j]} |x|$$

für alle Lösungen  $x$  von  $(\alpha, f)$  mit  $0 \neq x_0 \in K$ . Für diese Lösungen folgt

$$j \in \mathbb{N} \wedge j \geq 3 \Rightarrow |x(m_j)| \leq k k_4 \sup_{[z_j-(1/2), z_j]} |x|.$$

c) Wir setzen  $\delta := k^{-1} k_4^{-2} \varepsilon$ . Sei  $\varphi \in K, \varphi \neq 0$ , mit  $\|\varphi\| < \delta$  gegeben. Mit der Lösung  $x = x^\varphi$  von  $(\alpha, f)$  gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$

$$T^j(\varphi) = x_{z_{2j}+(1/2)}.$$

Zu  $x$  existiert nach a) ein  $t \geq z_5$  mit  $\|x_t\| \geq \varepsilon$ , also gibt es ein  $j \geq 5$  mit  $\varepsilon \leq |x(m_j)|$ . Ist  $j$  gerade, so folgt nach b)

$$\varepsilon \leq |x(m_j)| \leq k k_4 \sup_{[z_j-(1/2), z_j]} |x| \leq k k_4 \|T^{j/2}(\varphi)\|,$$

daher  $\delta \leq (k k_4)^{-1} \varepsilon \leq \|T^{j/2}(\varphi)\|$ . Für ungerades  $j$  folgt mit Lemma II.16 und mit b)

$$\varepsilon \leq |x(m_j)| \leq k_4 |x(m_{j-1})| \leq k k_4^2 \|T^{(j-1)/2}(\varphi)\|,$$

also  $\delta \leq \|T^{(j-1)/2}(\varphi)\|$ .

Literatur

1. F.E. Browder: A further generalization of the Schauder fixed-point theorem. *Duke Math. J.* 32, 575 - 578 (1965)
2. H.J. Burkhardt, U. Halbach: Sind einfache Zeitverzögerungen die Ursachen für periodische Populationsschwankungen? *Oecologia* 9, 215 - 222 (1972)
3. S.N. Chow: Existence of periodic solutions of autonomous functional differential equations. *J. Differential Equations* 15, 350 - 378 (1974)
4. S.N. Chow, J. Hale: Periodic solutions of autonomous equations. Erscheint in *J. Math. Anal. Appl.*
5. W.J. Cunningham: A nonlinear differential difference equation of growth. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 40, 709 - 713 (1954)
6. W.J. Cunningham, P.J. Wangersky: On time lags in equations of growth. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 42, 699 - 702 (1956)
7. W.J. Cunningham, P.J. Wangersky: Time lag in population models. *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology* 22, 329 - 338 (1957)
8. J.M. Cushing: Periodic solutions of Volterra's population equation with hereditary effects. *SIAM J. Appl. Math.* 31, 251 - 261 (1976)
9. J.M. Cushing: Time delays in single species growth models. *J. Math. Biology* 4, 257 - 264 (1977)
10. J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York - London 1960
11. G.M. Dunkel: Some mathematical models for population growth with lags. *Univ. of Maryland, Technical note BN-548* (1968)
12. G.M. Dunkel: Single-species model for population growth depending on past history. In: *Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems*, 92 - 99. *Lecture Notes in Math.* 60, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg

New York 1968

13. R.B. Grafton: A periodicity theorem for autonomous functional differential equations. *J. Differential Equations* 6, 87 - 109 (1969)
14. R.B. Grafton: Periodic solutions of certain Lienard equations with delay. *J. Differential Equations* 11, 519 - 527 (1972)
15. K.P. Hadeler: On the stability of the stationary state of a population growth equation with time lag. *J. Math. Biology* 3, 197 - 201 (1976)
16. K.P. Hadeler, J. Tomiuk: Periodic solutions of difference-differential equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* 65, 87 - 95 (1977)
17. J. Hale: Linear functional differential equations with constant coefficients. *Contributions to Differential Equations* 2, 291 - 319 (1963)
18. J. Hale: *Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1971
19. J. Hale: *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1977
20. J. Hale, K.R. Meyer: A class of functional equations of neutral type. *Mem. Amer. Math. Soc.* 76 (1967)
21. J. Hale, C. Perello: The neighborhood of a singular point for functional differential equations. *Contributions to Differential Equations* 3, 351 - 375 (1964)
22. W.A. Horn: Some fixed-point theorems for compact mappings and flows on a Banach space. *Trans. Amer. Math. Soc.* 149, 391 - 404 (1970)
23. G.E. Hutchinson: Circular causal systems in ecology. *Annals of the New York Academy of Sciences* 50, 221 - 246 (1948)
24. G.S. Jones: On the nonlinear differential difference equation  $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1 + f(x)\}$ . *J. Math. Anal. Appl.* 4, 440 - 469 (1962)

25. G.S. Jones: The existence of periodic solutions of  $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1 + f(x)\}$ . J. Math. Anal. Appl. 5, 435 - 450 (1962)
26. S. Kakutani, L. Markus: On the non-linear difference-differential equation  $y'(t) = [A - By(t-\tau)]y(t)$ . In: Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations IV, 1 - 18. Princeton University Press, Princeton (N.J.) 1958
27. J.L. Kaplan, J.A. Yorke: Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations. J. Math. Anal. Appl. 48, 317 - 324 (1974)
28. J.L. Kaplan, J.A. Yorke: On the stability of a periodic solution of a differential delay equation. SIAM J. Math. Anal. 6, 268 - 282 (1965)
29. J.L. Kaplan, J.A. Yorke: On the nonlinear differential delay equation  $x'(t) = -f(x(t), x(t-1))$ . J. Differential Equations 23, 293 - 314 (1977)
30. T. Kato: Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1966
31. J.P. LaSalle, S. Lefschetz: Die Stabilitätstheorie von Ljapunow. Bibliographisches Institut, Mannheim 1967
32. B.W. Levinger: A folk theorem in functional differential equations. J. Differential Equations 4, 612 - 619 (1968)
33. R.M. May: Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton University Press, Princeton (N.J.) 1973
34. R.D. Nussbaum: Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. 101, 263 - 306 (1974)
35. R.D. Nussbaum: Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations II. J. Differential Equations 14, 368 - 394 (1973)
36. R.D. Nussbaum: A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations. J. Functional Analysis 19, 319 - 339 (1975)

37. R.D. Nussbaum: Global bifurcation of periodic solutions of some autonomous functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 55, 699 - 725 (1976)
38. W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1972
39. H.O. Walther: Existence of a nonconstant periodic solution of a nonlinear autonomous functional differential equation representing the growth of a single species population. J. Math. Biology 1, 227 - 240 (1975)
40. H.O. Walther: Stability of attractivity regions for autonomous functional differential equations. Manuscripta Math. 15, 349 - 363 (1975)
41. H.O. Walther: On a transcendental equation in the stability analysis of a population growth model. J. Math. Biology 3, 187 - 195 (1976)
42. E.M. Wright: A non-linear differential-difference equation. J. Reine Angew. Math 194, 66 - 87 (1955)