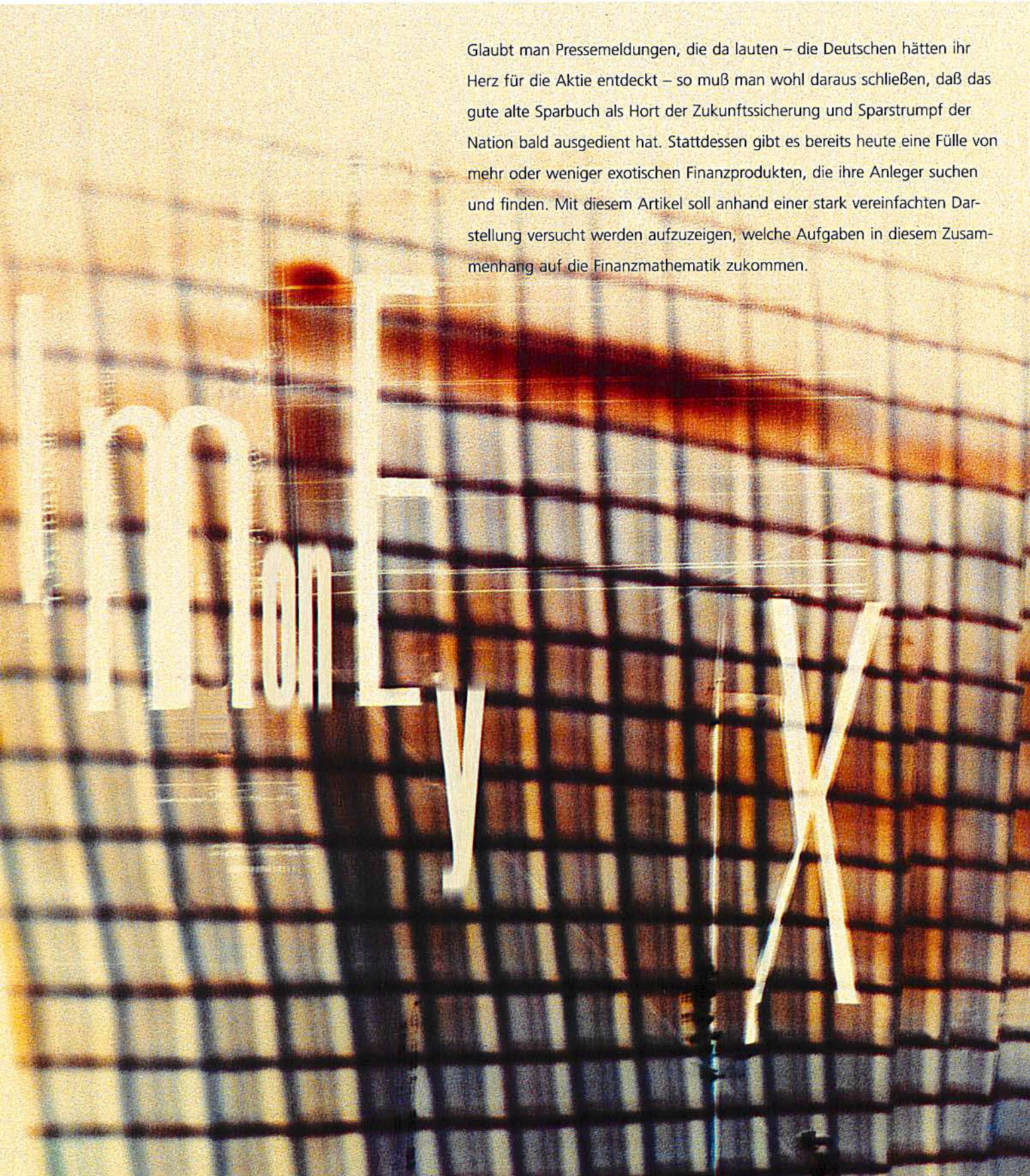
# Sicherheit im Chaos

## In der Mikrowelt der Finanzmathematik

*Von Winfried Stute*

Glaubt man Pressemeldungen, die da lauten – die Deutschen hätten ihr Herz für die Aktie entdeckt – so muß man wohl daraus schließen, daß das gute alte Sparbuch als Hort der Zukunftssicherung und Sparstrumpf der Nation bald ausgedient hat. Stattdessen gibt es bereits heute eine Fülle von mehr oder weniger exotischen Finanzprodukten, die ihre Anleger suchen und finden. Mit diesem Artikel soll anhand einer stark vereinfachten Darstellung versucht werden aufzuzeigen, welche Aufgaben in diesem Zusammenhang auf die Finanzmathematik zukommen.



Schließen wir einmal aus, daß sich die Zinsen in einem von uns betrachteten Zeitraum ändern, so ist die Kapitalentwicklung auf einem Sparbuch recht übersichtlich und einfach. Bei einem Grundbetrag von DM 1000 und einem Zinssatz von $r = 3\%$ lehrt uns die einfache Zinsrechnung der Schule, daß unser Kapitaleinsatz sich nach einem Jahr auf $1000 \times (1 + 0.03)$ erhöht hat, nach $n$ Jahren auf $1000 \times (1 + 0.03)^n$. Es ist müßig, diese Werte an Beispielen konkret auszurechnen, ringen sie einem „Investor der Neuzeit" bei einer Rendite von 3% doch nur ein müdes Lächeln ab.

Trotzdem ist es überaus nützlich, sich einmal – fern von mathematischen Formeln – über die Charakteristika unterschiedlicher Anlageformen Gedanken zu machen:

**1. Das (klassische) Sparbuch:**

a) Zinssatz und damit Rendite sind vertraglich vereinbart.
b) Weder Anleger noch Bank tragen unkalkulierbare Risiken.
c) Vertragsbank ist die „Bank um die Ecke".
d) Die Anlage ist in der Regel lang- oder zumindest mittelfristig.

Wenn wir dem die Charakteristika eines Investments in Aktien gegenüberstellen, werden die Unterschiede deutlich.

**2. Die Aktie:**

a)Die Renditen sind aufgrund von unvorhersehbaren Kursveränderungen variabel.
b)Höheren Erwartungen hinsichtlich der Rendite stehen unkalkulierbare Risiken gegenüber.
c)Der Handelsplatz (die Börse) steht anderen Marktteilnehmern offen. Deren Kauf- und Verkaufsorders beeinflussen ganz entscheidend den Kurs und damit auch die Rendite eines Produktes. Der einzelne Marktteilnehmer gewinnt den Eindruck, daß der Chart einer Aktie zufällig ist und keinen Regeln unterliegt.
d)Die Engagements in einem Wert sind nicht notwendig langfristig. Starke unerwartete Kursveränderungen können kurzfristig zu Neuorientierungen und Umschichtungen im Portfolio führen.

Nun wird man – und das mit vollem Recht – einwenden, daß die genannten Fakten so alt sind wie die Börse selbst. Mehr noch, daß die Kursfindung der Aktie das Ergebnis von Angebot und Nachfrage sei und man dazu nicht der Höheren Mathematik bedürfe. Auch richtig.

Die Frage sei aber dann erlaubt, warum 1997 der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften an zwei amerikanische Wissenschaftler vergeben wurde, die mit ihren Arbeiten auf dem Gebiet der Finanzmathematik in den frühen 70er Jahren die – wie es hieß – Finanzmärkte revolutioniert hatten.

Um zu verstehen, warum und auf welche Weise sich Mitte der 70er Jahre (beginnend in den USA) die Börsenlandschaft verändert hatte und neue Produkte auf den Markt drängten, betrachten wir den Chart einer Aktie über vier Monate hinweg.

Wir sehen, daß nach einem Anstieg in den ersten beiden Monaten ein Abfall erfolgt, dem sich dann eine Seitwärtsbewegung und ein weiterer Abfall anschließen. Für einen Investor, der sagen wir nach 1.9 Monaten das Papier gekauft hat und nach weiteren 2 Monaten wieder über liquide Mittel verfügen und sich nicht – wie es einmal ein bekannter Börsenguru empfohlen hat – in einen jahrelangen Winterschlaf begeben möchte, fürwahr eine fatale Entwicklung. Die entscheidende Frage, die sich nun stellt, ist die, ob es Möglichkeiten und Wege gibt, dieses Risiko zu begrenzen und sich gegen drohende Verluste abzusichern.

## Derivate

Die Antwort ist auf den ersten Blick verblüffend einfach: Um sich

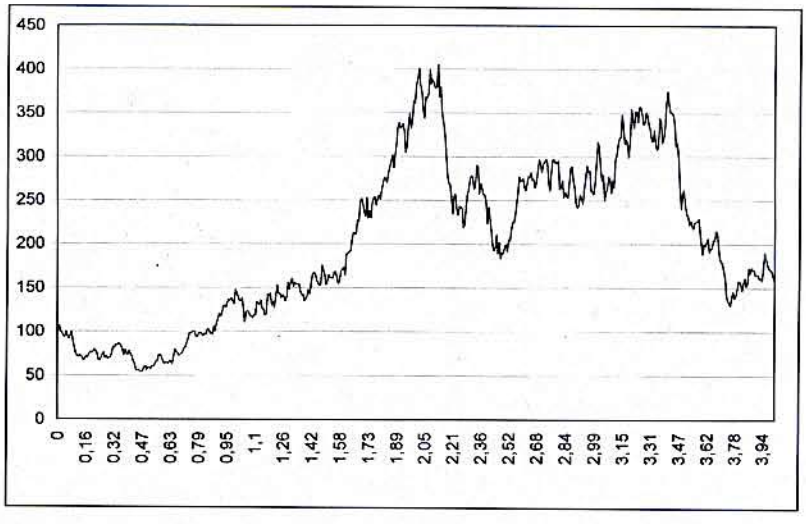



*Abb. 1: Der 4-Monatschart einer Aktie*

gegen negative Entwicklungen zu schützen, hat man ein Produkt in sein Portfolio aufzunehmen, das verglichen mit der Aktie, dem sogenannten Underlying, eine gegenläufige Bewegung macht. Dieses neu zu kreierende (Finanz-)Produkt muß sich wertemäßig also vom Underlying ableiten lassen. Die Idee des Derivats war geboren. Zu den wichtigsten heute gehandelten Derivaten gehören Optionen, davon allein in Deutschland 13 000, die börsennotiert sind. Nicht mitgezählt sind die sogenannten OTC (over the counter)-Produkte, die z. B. zwischen zwei Investmenthäusern zur gegenseitigen Absicherung ihrer Portfolios gehandelt werden. Obwohl ursprünglich als Hedging (Absicherungs-) Instrumente konzipiert, werden viele der einfacheren Finanzinstrumente heute von Kleinanlegern zu rein spekulativen Zwecken erworben. Komplexere Derivate dagegen sind nicht börsennotiert, so daß ihr Preis sich nicht über Angebot und Nachfrage bestimmt. Die Aufgabe der Finanzmathematik besteht nun darin, Einsatzmöglichkeiten und faire Preise dieser komplizierten Produkte zu bestimmen.

Wir wollen uns konkret einmal die Wirkungsweise der einfachsten Option, einer plain-vanilla Option, verdeutlichen. Das Underlying sei eine Aktie, sagen wir die von VW. Unter der Wertpapierkennummer

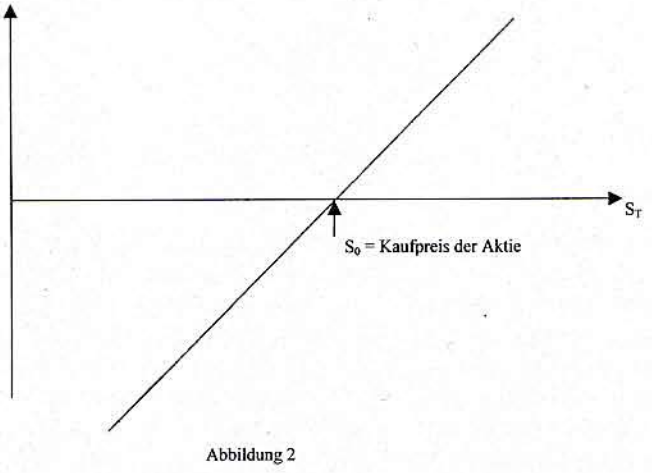



Abbildung 2

*Abb. 2: Auszahlungsprofil einer Aktie*

(WKN) 752 867 hat die Citybank einen sogenannten Call emittiert, dessen Ausübungszeitpunkt der 27.12.2001 ist. Der Ausübungspreis (Strike) $X$ beträgt 50 Euro. Am 7. April 2000 betrug der Kurs der VW Aktie 42.3 Euro. Ein Investor, der diesen Call erwarb, hatte die Hoffnung auf steigende Kurse. Sollte der Kurs am 27.12.2001 den Strike 50 überschritten haben, so erhielte er die Differenz zwischen Kurs und Strike. Läge der Kurs unter 50, erhielte der Käufer nichts. Der Call wird täglich gehandelt. Da der VW-Kurs Schwankungen unterworfen ist, gilt dasselbe für den Preis des Calls. Am 7.4.2000 betrug der Preis des Calls 0.71 Euro, eine Woche zuvor noch 0.86 Euro. Man sieht, daß der Kapitaleinsatz für eine Option verglichen mit dem Kurs der Aktie wesentlich geringer ist. Weiter zeigt unser kleines Zahlenbeispiel (aus der Praxis), daß der Preis der Option offensichtlich (in Prozenten) stärker auf Kursveränderungen reagiert. Natürlich kann man auch auf fallende Kurse setzen. Dazu erwirbt man einen sogenannten Put. Z. B. gibt es einen Put auf VW mit Strike 38 und Fälligkeit 20.9.2001 (WKN 744 517), der am selben Tag (7.4.2000) 5.74 Euro kostete, eine Woche zuvor noch 4.96 Euro. Die Verbilligung des Calls als auch die Verteuerung des Puts haben natürlich die gleiche Ursache: den Kursverfall der VW Aktie.

Mitte April dieses Jahres habe ich allein 90 Calls auf VW gezählt. Sie unterschieden sich neben dem Emittenten in Strike-Preis und Laufzeit. Die Optionsspeisekarte bietet also für jeden etwas, für Mutige (z. B. Strike 100) aber auch für Vorsichtige (Strike 45). Der Mutige wird für seinen Mut dadurch belohnt, daß der Preis „seiner" Option deutlich niedriger ist.

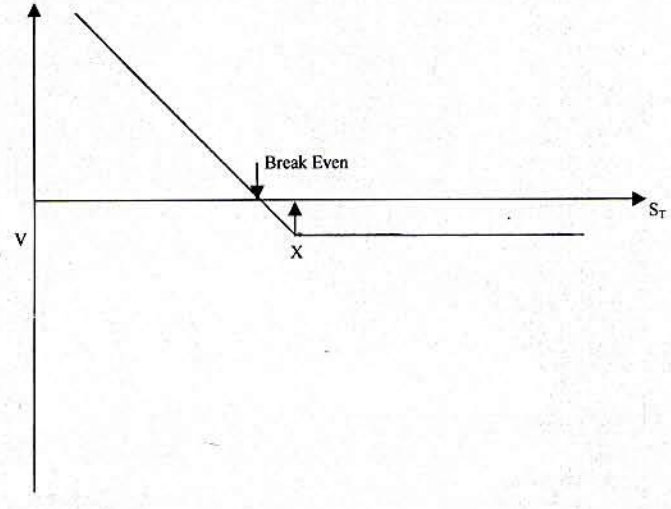



*Abb. 3: Auszahlungsprofil eines Puts*

## Hockey-Sticks

Bevor wir der Frage nach der Preisbestimmung einer Option nachgehen, müssen wir uns ihre Wir-

kungsweise als Hedge-Instrument anhand eines kleinen Schaubilds verdeutlichen. Mit $T$ werde der Ausübungszeitpunkt bezeichnet, mit der an diesem Tag gültige Schlußkurs der Aktie. Da er heute nicht bekannt ist, betrachten wir alle möglichen Szenarien.

Mit $S_0$ werde der Kurs der Aktie bei Kauf bezeichnet. Ist $S_T = S_0$, machen wir weder Gewinn noch Verlust. Der Gewinn ist positiv, wenn $S_T > S_0$ und negativ, wenn $S_T < S_0$. Betrachten wir als nächstes das Gewinn-Profil eines Puts (Abb. 3):

Mit $X$ bezeichnen wir den Strike des Puts, mit $V$ seinen Preis. Liegt $S_T$ über $X$, verfällt der Put, und der Optionskäufer verbucht als Verlust (negativer Gewinn) den Optionspreis $V$. Liegt $S_T$ unter $X$, erfolgt

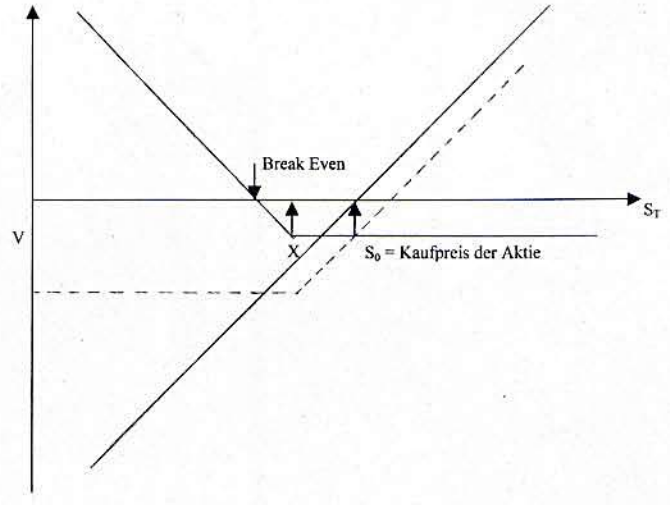



*Abb. 4: Zusätzlich zu den beiden Auszahlungsprofilen der Aktie und des Puts wird das Auszahlungsprofil des Portfolios bestehend aus Aktie und Put angegeben (gestrichelt)*

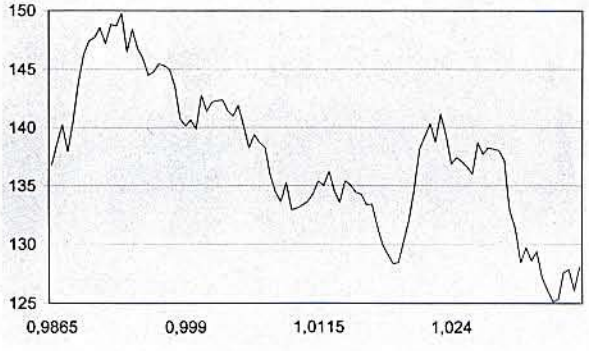



*Abb. 5: Ein stark vergrößerter Ausschnitt des Charts aus Abbildung 1*

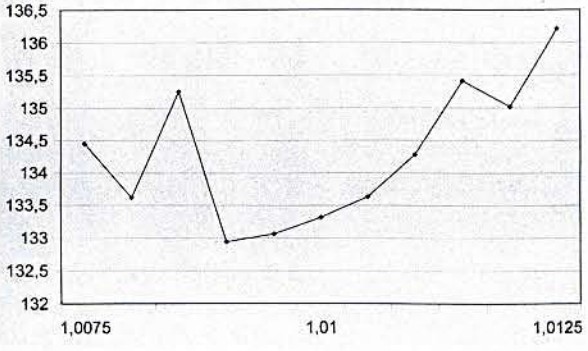



*Abb. 6: Eine Keimzelle des Charts aus Abbildung 1*

zwar eine Auszahlung, die aber erst als Gewinn ausgewiesen wird, wenn $X$ unter dem Break-Event Point liegt. Betrachten wir abschließend einen Investor, der sich für jede gekaufte Aktie mit einem Put absichert, d. h. sein Mini-Portfolio besteht aus einer Aktie und einem Put. Wem dies zu wenig Aufregung verspricht, der kann entsprechende Überlegungen natürlich auch mit 10 000 Aktien durchführen. Der Grundgedanke ist derselbe.

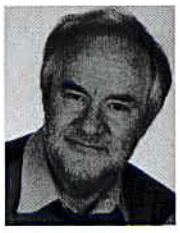
Diese Strategie heißt Protective Put. Der Name erklärt sich aus dem Auszahlungsprofil des Portfolios (gestrichelt), für das gegenüber der Aktie bei Kursrückgang ein geringerer Verlust ausgewiesen wird. Wie groß diese Abfederung ist, hängt natürlich von der Wahl des Puts ab. Überhaupt kann man sagen, daß die Fülle der am Markt erhältlichen Finanzprodukte heute einem Investor ermöglicht, das Portfolio nach seinen persönlichen Sicherheitsvorstellungen zu gestalten. Zusammenfassend lassen sich die Aufgaben der Finanzmathematik wie folgt umreißen:

a) Preisbildung von Derivaten
b) Bestimmung von Strategien zur Absicherung von Portfolios
c) Quantifizierung von Risiken (Risk-Management)

Es wird deutlich, daß diese Mathematik nur noch wenig mit dem zu tun hat, was man als Laie in der Schule einmal an Mathematik erfahren (oder erlitten) hat. Was natürlich nicht bedeutet, daß sie überflüssig geworden ist. Ganz im Gegenteil.

### Preisbestimmung einer Option

Unsere Diskussion wird zeigen, daß die Preisbestimmung einer Option und das Hedgen eines Portfolios untrennbar verbunden sind. Wir ahnen bereits, daß die Preise eines Derivats auf eine wohl sehr mysteriöse Art und Weise den Kursen des Underlying folgen. Das bedeutet für den Broker, daß er sich dynamisch zu verhalten hat und seine Preise ständig anzupassen hat. Zu seiner Unterstützung verfügt er über eine entsprechende



Winfried Stute, Jahrgang 1946, 1968-1973 Studium der Mathematik und Wirtschaftswissenschaften an der Univ. Bochum, 1975 Promotion, 1980 Habilitation an der LMU München, von 1981-1983 Professor an der Univ. Siegen, seit 1983 Professor für Math. Stochastik am Math. Inst. der JLUG, 1990 Fellow des Inst. Math. Statistics, Rufe an die Univ. California und Univ. München. Schwerpunkte in der Forschung: Survival Analysis (Medizinische Statistik), Modelldiagnosen, Analyse von Strukturbrüchen, Finanzmathematik.

Software, die (vielleicht) von einem Informatiker geschrieben worden ist. Am Anfang aber steht die Mathematik, die dem Informatiker sagt, was überhaupt zu implementieren ist. Fazit:

Mathematik → Informatik → Handel

bilden eine Dreierkette, in der jedes Glied seine Aufgabe hat und man nur gemeinsam in der Lage ist, hochkomplexe Finanzprodukte an den Markt zu bringen.

Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit der ersten Stufe. Um zu verstehen, nach welchen Prinzipien Preise bestimmt werden, reicht es nicht, den 4-Monatschart aus Abb. 1 zu betrachten. Es ist vielmehr notwendig, in die Mikrowelt der Finance einzutauchen, d. h. wie mit einer Lupe einen Ein-Tages-Ausschnitt näher zu untersuchen (s. Abb. 5) Wenn Sie sich erinnern, daß die Dynamik des Preisbildungsprozesses eine hohe Flexibilität des Brokers erfordert, um u. U. im Minutentakt (!) auf Veränderungen zu reagieren, wird deutlich, daß in Wirklichkeit eine viel stärkere Auflösung vonnöten ist (Abb. 6).

Dieser Ausschnitt läßt erahnen, daß der 4-Monatschart sich aus sehr vielen kleinen Auf- und Abwärtsschritten zusammensetzt, die letzten Endes für den chaotischen Gesamteindruck des Charts verantwortlich zu machen sind. Es ist daher sinnvoll, sich zunächst mit der „Keimzelle" des Charts zu beschäftigen. Hier gehen wir davon aus, daß eine Aktie, welche jetzt (Zeitpunkt Null) den Wert (Kurs, Preis) $S_0$ hat, nach dem nächsten kleinen Schritt nur die Auswahl unter zwei möglichen neuen Werten hat: $S_1^+ \cdot S_1^-$. Im Schaubild

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & S_1^+ \\ S_0 & & \\ & \searrow & S_1^- \end{array}$$

Parallel dazu macht der Call die Bewegung

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & C_1^+ \\ C_0 & & \\ & \searrow & C_1^- \end{array}$$

Nehmen wir einmal an, daß $C_1^+$ und $C_1^-$ bekannt sind, stellt sich die Frage, wie $C_0$, also der Preis der Option „jetzt" zu bestimmen ist. Wenn wir uns an die VW-Option erinnern, dann kennen wir – in Abhängigkeit vom Kurs der VW Aktie – den Wert der Option am 27.12.2001 genau. Die Frage ist, was ist ein fairer Preis am 7.4.2000, wenn der Kurs von VW 42.3 beträgt? Handelstag (Zeit) und Kurs (Raum) sind Komponenten, die ständigen Veränderungen unterworfen sind. Das Abtauchen in die Mikrowelt geschieht in der Hoffnung, daß Lösungen dort einfach zu erzielen sind und es möglich ist, daraus Preise für längere Laufzeiten zu berechnen.

Im folgenden drücken wir $S_1^+$ und $S_1^-$ durch $S_0$ und die beiden zugehörigen Renditen $r^+$ und $r^-$ aus:

$$S_1^+ = S_0\left(1+r^+\right) \qquad S_1^- = S_0\left(1+r^-\right)$$

Im Sparbuchbeispiel gab es nur ein $r$ (=0.03). Da nun zwei Sprungmöglichkeiten bestehen, gibt es zwei $r$'s: ein positives $r^+$ für eine Aufwärtsbewegung und ein negatives $r^-$ für eine Abwärtsbewegung. Versetzen wir uns nun in die Lage des Emittenten. Er erhält für jeden verkauften Call einen noch zu bestimmenden Preis $C_0$. Natürlich weiß er genau um die Gefahr, daß bei steigendem Kurs der Optionsinhaber (Käufer) einen Anspruch geltend machen wird. Um sich gegen diese Gefahr abzusichern, beteiligt er sich am Handel mit dem Underlying (Aktie), kauft pro verkauftem Call $\delta$(=?)Aktien. Diesen Kauf kann er nicht mit $C_0$ finanzieren, so daß eine Kreditaufnahme vonnöten wird. Der notwendige Kredit beträgt $\delta S_0 - C_0$. Zum Zeitpunkt 1 hat das Portfolio des Emittenten entweder den Wert

$$\delta S_1^+ - (1+r)(\delta S_0 - C_0) \text{ oder } \delta S_1^- - (1+r)(\delta S_0 - C_0).$$

Der erste Ausdruck erklärt sich wie folgt: Da der Emittent $\delta$ Aktien besitzt, profitiert er vom Aufwärtssprung, so daß dieser Anteil nun den Wert $\delta S_1^+$ besitzt. Auf der anderen Seite ist der Kredit mit dem Marktzins $r$ zurückzuzahlen, was den Wert seines Portfolios entsprechend vermindert. Wenn wir die Ausdrücke gleich $C_1^+$ bzw. $C_1^-$ setzen, bedeutet dies, daß er in jedem Fall die Ansprüche des Optionshalters befriedigen kann. Wir erhalten zwei lineare Gleichungen in $\delta$ und $C_0$ (und nicht $x$ und $y$ wie in der Schule), die die folgenden Lösungen haben:

$$\delta = \frac{C_1^+ - C_1^-}{S_1^+ - S_1^-} = \frac{C_1^+ - C_1^-}{S_0\left(r^+ - r^-\right)}$$

$$C_0 = \delta S_0 + \eta \text{ mit } \eta = \frac{C_1^+ - \delta S_1^+}{1+r} \quad .$$

Die Größe $\eta$ gibt gerade die notwendige Kreditaufnahme an. Wir machen uns diese Rechnung an einem Zahlenbeispiel klar:

$$S_0 = 100 \quad S_1^+ = 150 \quad S_1^- = 50 \quad X = 120 \quad r = 10\%$$

Dann folgt: $C_1^+ = 30 \quad C_1^- = 0$ und damit

$$\delta = 0.3 \qquad \eta = -\frac{150}{11} \qquad C_0 = \frac{180}{11}$$

d. h. bei Verkauf eines Calls hat der Emittent 0.3 Aktien zu kaufen zum Preis von 100x0.3 = 30. Die Kreditaufnahme beträgt 150/11. Die Einkünfte durch den Verkauf des Calls betragen 180/11, was zusammen gerade den benötigten Betrag 30 ausmacht. Der Kredit muß

mit 150x(1 + 0.1)/11 = 15 zurückgezahlt werden. Bei Anstieg der Aktie beträgt die Forderung des Optionsinhabers 30. Der Emittent verkauft die Aktie zum Preis von 150x0.3 = 45. Dies reicht exakt aus, um die Ansprüche sowohl des Optionsinhabers als auch des Kreditgebers zu befriedigen. Der Emittent ist risikolos „gehedged". Der Fall sinkender Kurse ist ähnlich.

Fazit: Die Berechnung eines fairen Preises erfolgt so, daß der Emittent (die Bank) sich risikolos hedgen kann. Sein Verdienst liegt in der Provision und „kleinen" Risikoaufschlägen. Das Risiko aber trägt ansonsten allein der Optionshalter.

Wenn wir nun zusätzlich den Kursverlauf in der zweiten Minute betrachten, haben wir insgesamt vier Möglichkeiten: Auf Auf, Auf Ab, Ab Auf, Ab Ab. Dies kann man sich anhand eines (noch sehr jungen) Baumes verdeutlichen:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & (1+r^+)^2 S_0 \\
 & & \nearrow & & \\
 & (1+r^+)S_0 & & & \\
 \nearrow & & \searrow & & \\
S_0 & & & & (1+r^+)(1+r^-)S_0 \\
 \searrow & & \nearrow & & \\
 & (1+r^-)S_0 & & & \\
 & & \searrow & & \\
 & & & & (1+r^-)^2 S_0
\end{array}
$$

In Wirklichkeit müssen wir bis zum Ausübungszeitpunkt Tausende von Minuten und damit Verästelungen in einem sehr alten Baum durchlaufen. Jeder Weg ist ein möglicher Chart. Wenn wir mit $n$ die Anzahl der Schritte bezeichnen, lautet der Preis der Option

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=a}^{n} \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k} \left\{ S_0 (1+r^+)^k (1+r^-)^{n-k} - X \right\}$$

mit einem gewissen $a$ und

$$w = (r - r^-)/(r^+ - r^-).$$

Ich möchte diese Formel nicht weiter kommentieren. Jeder wird den Eindruck haben, daß man sich nun endgültig von der Schulmathematik entfernt hat. Zum Schluß kann man $n$ über alle Grenzen wachsen lassen, d. h. man betrachtet einen Handel in kontinuierlicher Zeit. Wir erhalten die berühmteste Formel der modernen Finanzmathematik, die Formel von Black-Scholes:

$$C_0 = S_0 \Phi(d_1) - \frac{X}{(1+r)^T} \Phi(d_2) \qquad (*)$$

mit $d_1 = \dfrac{\ln \frac{S_0}{X} + T\left[\ln(1+r) + \frac{\sigma^2}{2}\right]}{\sigma\sqrt{T}}$ und $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Hierbei ist $\Phi(d) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2} dx$ die Stammfunktion der Gaußdichte, und σ bezeichnet die sogenannte Volatilität der Aktie.

Es ist verzeihbar, wenn ein mathematisch nicht geschulter Leser Schwierigkeiten hat, diese Formeln zu „lesen". Es gehört nur zur Pflicht eines jeden Chronisten, eine Diskussion von Preisformeln mit (*) abzuschließen.

**Ausblick**

Ich möchte mich abschließend darauf beschränken, lediglich ein aktuelles Forschungsthema unserer Arbeitsgruppe kurz zu beschreiben. Man mag sich fragen, welcher Kurs durch Abbildung 1 dargestellt wird. Die Antwort wird verblüffen: kein spezieller, sondern ein auf dem Computer simulierter. Diese Antwort beinhaltet letzten Endes, daß der Mathematiker, der die Simulation durchführt, die Bildungsgesetze eines realen Kurses kennt. In der Tat beruhen alle Berechnungen in der Praxis auf gewissen Modellannahmen, deren Diskussion den Rahmen dieses Artikels sprengen würde. Eins fällt jedoch auf: die Stetigkeit des Charts, d. h. trotz eines irregulären Verhaltens gibt es keine Sprünge. Das Einbeziehen solcher Crash-Szenarien oder von am Markt beobachtbaren „Gewinnmitnahme Effekten" ist bisher nicht erfolgt, erfordert eine weitaus komplexere Modellierung und führt – wie man sich leicht ausdenken kann – zu komplizierteren aber dafür realistischeren Preisen und Hedge-Strategien. •

JUSTUS-LIEBIG-
UNIVERSITÄT
GIESSEN

Prof. Dr. Winfried Stute

Mathematisches Institut
Arndtstr. 2
35392 Gießen
Tel.: 0641/99-32100
Fax: 0641/99-32029
email: winfried.stute@math.uni-giessen.de