

**Inaugural Dissertation**  
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

**Hochleistungspulsrohrkühler vom  
Stirling-Typ für energietechnische  
Anwendungen der  
Hochtemperatursupraleitung**

im Fachbereich Mathematik und Informatik, Physik, Geographie  
Fachgebiet Physik

vorgelegt von  
Marc Dietrich  
aus Wetzlar

Institut für Angewandte Physik  
Justus-Liebig-Universität Gießen

Dezember 2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Anwendungen der Supraleitung und Kühltechniken</b>	<b>3</b>
2.1	Entwicklung und erste Anwendungen der Supraleitung . . . . .	3
2.2	Stand der Kryotechnik . . . . .	5
2.3	Supraleitung in der Energietechnik . . . . .	7
2.4	Pulsrohrkühler für supraleitende Schiffsantriebe . . . . .	9
2.5	Kenngößen eines Kryokühlers . . . . .	11
2.6	Stand der Pulsrohr-Kryokühlertechnik . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Grundlagen zum Pulsrohrkühler</b>	<b>16</b>
3.1	Funktionsprinzip . . . . .	16
3.2	Thermodynamische Grundlagen . . . . .	27
3.3	Energiefluss-Analyse . . . . .	31
3.4	Kühlerverluste . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Simulationsverfahren</b>	<b>42</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	42
4.2	Analytische Methoden am Beispiel einer Inertance-Leitung . . . . .	43
4.3	Näherungslösungen mittels diskreter Lösungsansätze . . . . .	52
4.3.1	Finite Differenzen Methode (FDM) . . . . .	52
4.3.2	Finite Elemente Methode (FEM) . . . . .	54
4.4	Glimps/Glop und Sage . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Sage-Modell des Hochleistungspulsrohrkühlers</b>	<b>57</b>
5.1	Gesamtmodell . . . . .	57
5.2	Modellierung der Kühlerkomponenten . . . . .	57
5.2.1	Kompressor . . . . .	57
5.2.2	Nachkühler, Wärmeaustauscher . . . . .	60
5.2.3	Regenerator . . . . .	62
5.2.4	Pulsrohr . . . . .	64
5.2.5	Inertance und Puffervolumen . . . . .	66

5.3	Auslegung des HLPRK-Kaltkopfes . . . . .	66
5.4	Energiebilanz des Kühlermodells . . . . .	75
5.5	Anpassung des Kaltkopfmodells zur Simulation zirkulare Regeneratorströmungen	78
5.6	Energiebilanz im modifizierten Kühlermodell . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Analytische Herleitung der parasitären Regeneratorströmung</b>	<b>88</b>
6.1	Linearer Reibungskoeffizient . . . . .	88
6.2	Nicht-lineare Ergänzung . . . . .	92
6.3	Diskussion der Einflussfaktoren auf den DC-Massenfluss im Regenerator . .	94
6.4	Kritischer Schwellenwert . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Messaufbau</b>	<b>100</b>
7.1	Gesamtaufbau . . . . .	100
7.2	Linearer Pulsrohrkaltkopf . . . . .	101
7.3	Datenerfassung . . . . .	103
7.3.1	Temperatur . . . . .	103
7.3.2	Druck . . . . .	103
7.3.3	akustische Leistung . . . . .	105
7.3.4	elektrische Leistung . . . . .	106
7.3.5	Messwerterfassung am PC . . . . .	106
<b>8</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse, Analyse und Diskussion</b>	<b>108</b>
8.1	Verluste durch Zirkularströmung im Regenerator . . . . .	108
8.2	Qualitative Beschreibung der Strömungsverluste mittels Sage . . . . .	112
8.3	Verbesserung des Regenerators zur Dämpfung zirkularer Strömungen . . .	114
8.4	Kühlleistungsmessungen . . . . .	118
8.5	Modifizierter Kaltkopfaufbau für den Betrieb bei 80 Kelvin . . . . .	120
8.5.1	Optimieren der Regeneratorlänge für 80 Kelvin mit Sage . . . . .	120
8.5.2	Experimentelle Testergebnisse mit verkürztem Regenerator . . . . .	123
8.5.3	Effiziente Regelung der Arbeitstemperatur mittels PID-Regeler . . .	127
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>129</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>133</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>143</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>149</b>

<b>Nomenklatur</b>	<b>151</b>
<b>10 Anhang</b>	<b>155</b>
10.1 Herleitung der Regeneratorströmung . . . . .	155
10.1.1 Druckhubabfall über dem Regenerator . . . . .	155
10.1.2 Approximation für Reynoldszahlen $\gg 1$ . . . . .	155
10.1.3 Dichteapproximation . . . . .	158
10.1.4 Inkompressibler Druckabfall . . . . .	160
10.1.5 DC-Flusskoeffizient . . . . .	163
10.2 Kritischer Massenfluss . . . . .	165
10.3 Umformung von Gleichung 10.14 mit Mathematica . . . . .	167
10.4 Beispielrechnung für Folienregenerator und Siebstapelregenerator . . . . .	176
10.5 Programmierung des Micromasters zum Betrieb eines Linearkompressors mit Spannungssteuerung . . . . .	181
10.6 Software PID-Regler . . . . .	183
10.7 Programm zur Auswertung des Sage-Rechengitters . . . . .	184



# 1 Einleitung

Die Möglichkeit Kälte überall verfügbar zu halten ist eine der Grundvoraussetzungen unserer modernen Gesellschaft. Kühl- und Gefrierschränke zur Lagerung von Lebensmitteln befinden sich heute in jedem Haushalt. Mobile Kälteaggregate ermöglichen den Transport von Lebensmitteln über weite Strecken.

Die mit der Entdeckung des Joule-Thomson-Effektes Mitte des 19. Jahrhunderts aufkommende Kryotechnik ermöglichte erstmals die Erzeugung von Temperaturen unterhalb von  $-180\text{ °C}$  und somit das Verflüssigen von natürlichen Gasen wie Sauerstoff und Stickstoff. Dies bereitet den Weg für zahlreiche industrielle Anwendungen wie die Gasseparation und ermöglichte Fortschritte u.a. in der Medizin und Weltraumtechnik. Kryotechnik wird heute außerdem zum Kühlen von Detektoren und elektronischen Bauteilen verwendet, die kleinste Mengen von Energie registrieren und verstärken. Dies ist nötig, um den thermisch bedingten Rauschhintergrund zu minimieren. Die Erzeugung tiefer Temperaturen erlaubt in der Physik ein tieferes Verständnis der Materie, da viele physikalische Effekte erst bei tiefen Temperaturen zu Tage treten.

Im Jahr 1908 gelang dem Niederländer Kamerlingh-Onnes in Leiden erstmals die Verflüssigung von Helium bei einer Temperatur von  $4,2\text{ Kelvin}$  ( $-269\text{ °C}$ ) [1]. Drei Jahre später entdeckte er die Supraleitung, eine physikalische Eigenschaft mancher Elemente und Verbindungen, bei der u.a. der elektrische Widerstand bei der sogenannten Sprungtemperatur plötzlich verschwindet und somit ein fast verlustloser Transport von elektrischer Energie möglich wird [2]. Eine erst später entdeckte weitere Folge der Supraleitung ist die Verdrängung eines äußeren Magnetfeldes, der sogenannte Meißner-Ochsenfeld-Effekt [3]. Dieser macht z.B. eine beinahe verlustlose Lagerung schwerer Maschinen möglich, was u.a. im Transportwesen eingesetzt werden kann.

Obwohl das Phänomen der Supraleitung lange bekannt war, gelang erst in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts mit der BCS-Theorie die physikalisch-theoretische Beschreibung [4]. Die darauf folgenden Forschungen führten zu Materialien, bei der die Supraleitung bei immer höheren Temperaturen auftrat, was den Aufwand für die Kryotechnik senkte. Mitte der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts fanden Müller und Bednorz eine neue Klasse von Supraleitern, die eine Sprungtemperatur von weit über  $77\text{ Kelvin}$  zeigten [5]. Diese Hochtemperatursupraleiter stehen im Fokus neuerer Entwicklungen, da sie sich bereits mit im

Vergleich zu flüssigen Helium relativ preisgünstig herzustellenden flüssigen Stickstoff kühlen lassen.

Trotz interessanter Eigenschaften konnten sich technische Anwendungen der Supraleitung bis heute nur in wenigen industriellen Bereichen verbreiten. Gründe hierfür sind die schwierige Herstellung und Handhabung supraleitender Materialien als auch der Aufwand für die zum Betrieb benötigte Kryotechnik. Dennoch kann sich ihr Einsatz lohnen, wenn z.B. die erwünschte Funktion mittels konventioneller Technik nicht erreichbar ist. Dies betrifft etwa die Erzeugung hoher Magnetfelder für Kernresonanzspektroskopie und Magnetresonanztomographie. Daneben gibt es heute schon Anwendung, bei der die Vorteile der Supraleitung die Nachteile konventioneller Technik übertreffen. So kann bei großen Maschinen wie Kraftwerksgeneratoren oder Antrieben mit Leistungen im Megawattbereich der Aufwand für die Kryotechnik geringer sein als die Einsparung durch den Einsatz von Supraleitern. Einsparungen ergeben sich dabei nicht nur durch die Reduzierung von elektrischen Verlusten. Oft können Maschinen mit Supraleitern viel kleiner und leichter gebaut werden, da die Energiedichte im Vergleich zu konventioneller Technik vergrößert werden kann. Dies eröffnet den Weg für Anwendung in der Luft- und Schifffahrt, bei denen der Platzbedarf und das Gewicht eine wichtige Rolle spielen.

Neuere Entwicklungen in der Supraleitungstechnik, als auch die im Zuge des Klimawandels aufkommende Diskussion über Energieeffizienz und Ressourcenknappheit stellen die Kryotechnik vor neue Herausforderungen. Zukünftige Anwendungen der Supraleitung erfordern neben einer effizienten Kühlung auch einen möglichst verschleiß- und wartungsarmen Betrieb der kryotechnischen Anlage. Die in der vorliegenden Arbeit behandelten Hochleistungspulsrohrkühler mit hoher Arbeitsfrequenz versprechen in genau diesen Bereichen Vorteile gegenüber konventionellen Kältemaschinen. Die erst in jüngster Zeit zur Verfügung stehenden neuen Kompressortechnologien, als auch ein über die Jahre gewachsenes Verständnis der physikalischen Vorgänge in Pulsrohrkühlern mit hoher Arbeitsfrequenz ermöglichen heute die Konstruktion von großen Kältemaschinen, die für den Einsatz in der Energietechnik notwendig sind.

Spezielles Ziel der vorliegenden Arbeit war es, einen neuartigen Hochleistungspulsrohrkühler vom Stirling-Typ (HLPRK) mit Linearkompressor für die Kühlung zukünftiger Schiffsmotoren und -generatoren auf der Basis von Hochtemperatursupraleitern zu modellieren, aufzubauen und zu optimieren. Die Arbeit erfolgte im Rahmen eines BMBF-Verbundprojektes "*Elektrische Fähranlage auf Basis einer HTS-Synchronmaschine*", Förderkennzeichen 03SX143B und eines anschließenden BMWi-Verbundprojektes "*Antriebsplattform mit HTS-Synchronmaschine für Voll-Elektrische Schiffe*", Förderkennzeichen 03SX221A.

## 2 Anwendungen der Supraleitung und Kühltechniken

### 2.1 Entwicklung und erste Anwendungen der Supraleitung

Zwischen ihrer Entdeckung im Jahr 1911 und ersten technischen Anwendungen der Supraleitung vergingen fast 50 Jahre. Neben dem kryotechnischen Aufwand große Mengen flüssigen Heliums herzustellen, verhinderte eine wichtige Eigenschaft von Supraleitern deren großtechnischen Einsatz. Der Punkt des Übergangs in den supraleitenden Zustand hängt nämlich nicht nur von der Temperatur (Sprungtemperatur  $T_c$ ), sondern auch vom äußeren Magnetfeld (kritisches Feld  $B_c$ ) ab. Abbildung 2.1 zeigt die Abhängigkeit des kritischen Feldes von der Temperatur für einige Tieftemperatursupraleiter. Durch Abkühlen unter die Sprungtemperatur kann das kritische Feld vergrößert werden. Da jeder Strom durch einen elektrischen Leiter auch ein äußeres Magnetfeld erzeugt, bricht die Supraleitung in vielen Stoffen zusammen, sobald ein nennenswerter Strom durch sie hindurchfließt. So erreichte der erste supraleitende Magnet aus reinem Niob im Jahr 1955 nur eine Feldstärke von 0,7 Telsa bei 4,2 K [6]. Dieses Problem lässt sich jedoch durch Hinzulegieren von weiteren Stoffen wie Zinn mindern. So konnte bereits im Jahr 1961 unter Verwendung von  $Nb_3Sn$  das kritische Feld auf 8,8 T bei 4,2 K gesteigert werden [7], eine Feldstärke, die mit konventionellen Magneten im Dauerbetrieb nicht zu realisieren ist.

Im Gegensatz zu supraleitenden Elementen wie Niob tritt bei Legierungen wie  $Nb_3Sn$  noch ein weiterer Effekt auf. Oberhalb eines kritischen Feldes  $B_1$  kann ein Teil des äußeren Feldes in den Supraleiter eindringen. Dabei entstehen sogenannte Flussschläuche, innerhalb derer das Material normalleitend ist. Bei weiter ansteigendem Feld erhöht sich die Anzahl der Flussschläuche, bis die Supraleitung bei einem zweiten kritischen Feld  $B_2$  zusammenbricht. Diese Supraleiter nennt man Typ II oder Typ III, während solche mit nur einem kritischen Feld vom Typ I sind.

Abbildung 2.2 zeigt, dass die Suche nach neuen Supraleitern im Laufe der Zeit zu immer höheren Sprungtemperaturen führte. Lange Zeit schien es jedoch, als ob eine obere Grenze für die Sprungtemperatur nicht überschritten werden könnte, bis Mitte der 80er Jahre mit den Kupferoxid-Verbindungen (Kuprate) eine neue Klasse von Supraleitern gefunden wurde. Bis dahin mussten Anwendungen auf unter 20 K gekühlt werden, was einen großen technischen Aufwand bedeutete. Die Kuprat-Supraleiter können jedoch schon mit flüssigem Stickstoff gekühlt werden, der kostengünstig und in großen Mengen verfügbar ist. Allerdings

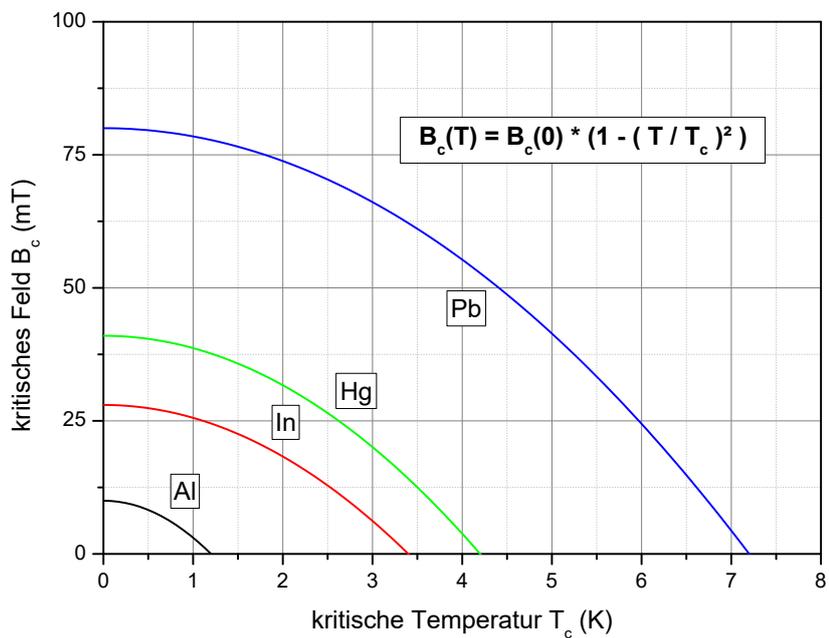


Abbildung 2.1: Temperaturabhängigkeit des kritischen Feldes von Aluminium, Indium, Quecksilber und Blei.

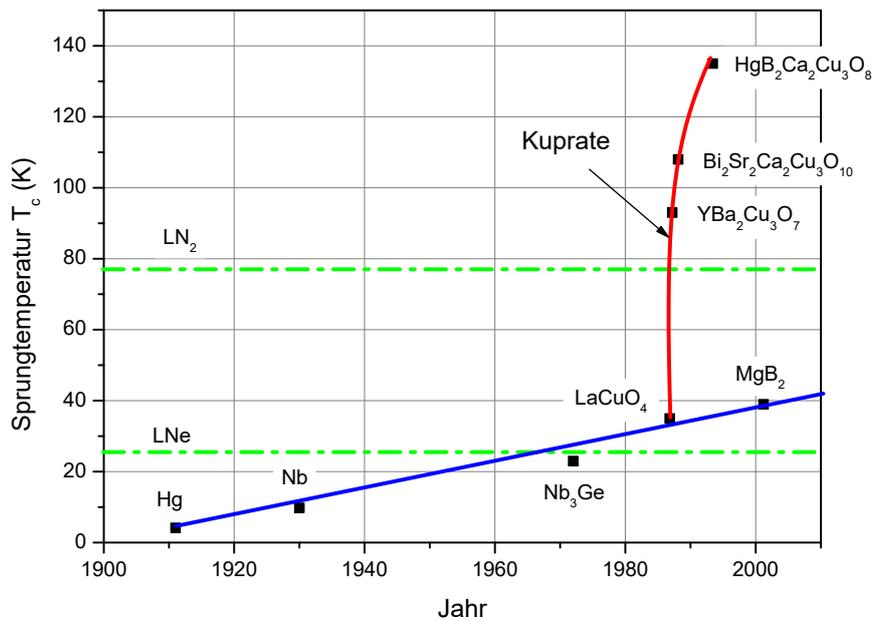


Abbildung 2.2: Feldfreie Sprungtemperaturen für verschiedene Elemente und Verbindungen.

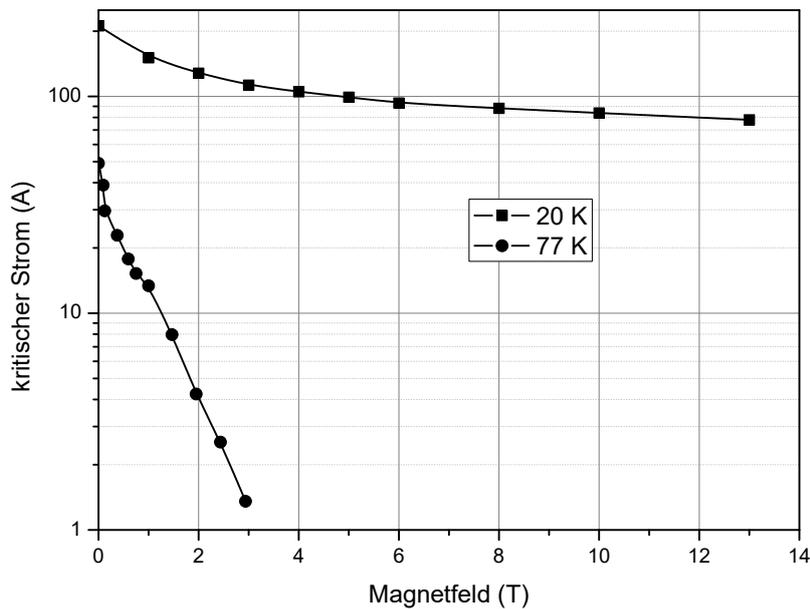


Abbildung 2.3: Abhängigkeit des kritischen Stroms eines kommerziellen BSCCO-2223 Bandes vom äußeren Magnetfeld bei 77 und 20 K (magnetische Feldlinien verlaufen parallel zur den Kristallschichten) [10].

sind diese Typ II Hochtemperatursupraleiter (HTSL) sehr spröde, sodass sich aus ihnen nur schlecht elektrischen Leitungen herstellen lassen. Daneben führen sich bewegenden Flussschläuche zu weiteren Verlusten, die das kritische Feld herabsetzen. Zu den wichtigsten Hochtemperatursupraleitern zählen  $YBa_2Cu_3O_7$  (kurz: YBCO) mit einer Sprungtemperatur von 93 K [8] und  $(Bi-Pb)_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$  (kurz: BSCCO-2223) mit einer Sprungtemperatur von 110 K [9]. Trotz der hohen Sprungtemperaturen von YBCO und BSCCO werden bei energietechnischen Anwendungen, bei denen sich der Supraleiter in einem Magnetfeld befindet, Betriebstemperaturen von unter 70 K benötigt. Ursache ist die in Abbildung 2.3 dargestellte T-Abhängigkeit der Stromtragfähigkeit der Supraleiter in einem Magnetfeld.

## 2.2 Stand der Kryotechnik

Der Erfolg von Supraleitungsanwendungen hängt stark von der Entwicklung der Kryotechnik ab. Benötigte Kamerlingh-Onnes noch ein großes Labor, um geringe Mengen flüssigen Heliums zu erzeugen, werden heute portable "Heliumfabriken" für die Steckdose angeboten [11]. Auf der anderen Seite benötigen die für den Betrieb des "Large Hadron Colliders" verwendeten Kryokühler eine Eingangsleistung von mehreren Megawatt, um mehrere Tonnen flüssigen

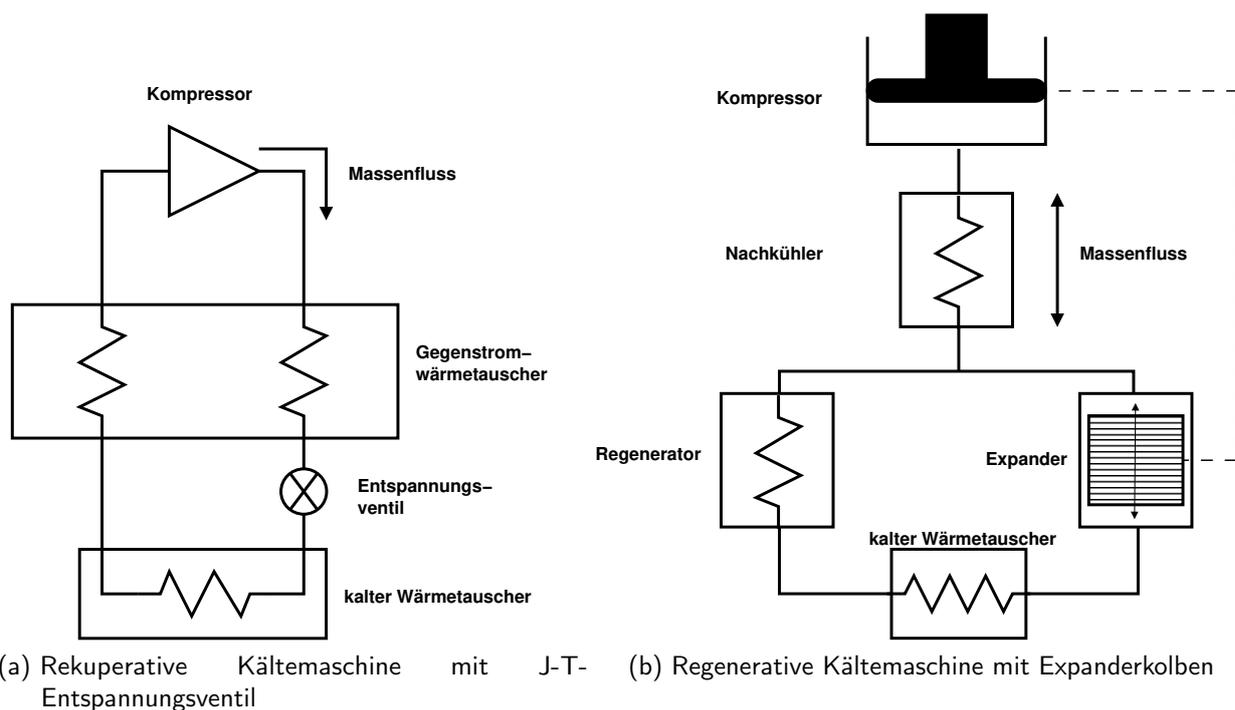


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung einer rekuperativen und einer regenerativen Kältemaschine.

Heliums am Tag zu erzeugen [12].

Je nach Anwendungen kommen heute unterschiedliche Methoden zur kryotechnischen Kälteerzeugung zum Einsatz, die sich nach zwei Arbeitsprinzipien aufteilen lassen. In *rekuperativen* Kältemaschinen wird das Arbeitsgas isenthalp mittels eines Drosselventils (Joule-Thomson-Prozess) oder isentrop mittels einer Turbine oder eines Kolbens (Brayton-Prozess) entspannt. Dabei kühlt sich das Gas ab. Ein Kompressor erzeugt dabei einen konstanten Massenfluss in einem geschlossenen Kreislauf, wobei das bereits entspannte Gas das komprimierte in einem Gegenstromwärmetauscher vorkühlt (Rekuperation). Abbildung 2.4a zeigt schematisch den Aufbau einer rekuperativen Kältemaschine mit Joule-Thomson-Entspannung. Üblicherweise geschieht die Abkühlung in mehreren Stufen und unter Kombination verschiedener Prozesse, um den jeweils optimalen Wirkungsgrad zu erzielen.

In *regenerativen* Kältemaschinen wird ein möglichst ideales Gas mittels eines Kolbens isotherm (Stirling-Prozess, Gifford-McMahon-Prozess) oder adiabatisch (Pulsrohr-Prozess) expandiert. Im Gegensatz zu den rekuperativen Prozessen, erzeugt der Kompressor dabei einen periodischen Massenfluss, wie in Abbildung 2.4b gezeigt. Aufgrund der periodischen Bewegung des Arbeitsgases, lässt sich die Arbeitsweise dieser Kältemaschinen durch einen zyklischen Prozess mit einer Einström- und einer Ausströmphase beschreiben. Eine wesentliche

Rolle bei diesem Prozess spielt der regenerative Wärmetauscher (kurz: Regenerator), der als thermischer Zwischenspeicher arbeitet. Der Regenerator kühlt in der Einströmphase das warme Gas vor, während in der Ausströmphase der Regenerator selbst gekühlt wird. Entscheidend für den Kühlprozess ist die richtige Phasenlage zwischen Kompressor- und Expanderkolbenbewegung, weshalb diese entweder aktiv, durch mechanische Kopplung, oder passiv z.B. durch Einstellung der Expanderresonanz gesteuert wird.

Je nach Anwendung besitzen die unterschiedlichen Kühlmethoden Vor- und Nachteile. Rekuperative Kühler werden oft in großtechnischen Anlagen eingesetzt, da sie große Kühlleistungen erreichen, wobei ihre Effizienz mit steigender Kühlleistung zunimmt [13]. Ein Nachteil ist ihr komplizierter Aufbau aus zahlreichen Wärmetauschern, Entspannungsventilen und Expanderturbinen. Dies macht die rekuperativen Kältemaschinen teuer in der Anschaffung und führt zu erhöhtem Wartungsaufwand, was sich negativ auf die Betriebskosten auswirkt [14].

Regenerative Kältemaschinen erreichen ebenfalls hohe Effizienzen, können aber nicht beliebig skaliert werden. Dies liegt u.a. daran, dass das zunehmende Gewicht der bewegten Teile in Stirling- und GM-Kaltköpfen limitierend wirkt. Daneben besitzen rekuperative Kältemaschinen ab einer bestimmten Größe eine bessere Wirtschaftlichkeit. Kältemaschinen mit niedrigen Arbeitsfrequenzen besitzen hohe Effizienzen, benötigen aber wegen des in diesem Fall üblicherweise eingesetzten ölgeschmierten Kompressors regelmäßig Wartung. Mit steigender Arbeitsfrequenz nehmen zwar in der Regel die Kühlerverluste zu, jedoch kann dann ein ölfreier Kompressor mit reibungsfreier Gasspaltdichtung eingesetzt werden, der ohne Wartung auskommt. Im Fall von den in dieser Arbeit untersuchten Pulsrohrkühlern wird die Komplexität und der Wartungsaufwand nochmals reduziert, da sich im Kaltteil des Kühlers selbst keine bewegten Teile mehr befinden. Die sich daraus ergebende Zuverlässigkeit macht diesen Kühler typ besonders robust und wartungsarm, was ihn für Anwendungen interessant macht, bei denen eine Wartung vermieden werden muss oder gar unmöglich ist.

## **2.3 Supraleitung in der Energietechnik**

Das Hauptanwendungsgebiet heutiger Supraleiter ist ihre Verwendung als Magnetspule. Nach Angaben von bccResearch betrug der globale Markt für Supraleitungsanwendungen im Jahr 2007 insgesamt ca. 1,4 Mrd Dollar [15], wovon über 95% auf supraleitende Magnete entfielen. Im Vergleich zu konventionellen Spulen aus Kupfer treten in ihnen nur sehr geringe Widerstandsverluste (Joule-Verluste) auf. Diese limitieren aus wirtschaftlichen Gründen die erreichbaren magnetischen Feldstärken herkömmlicher Spulen [16]. Hohe Magnetfelder werden in unterschiedlichen Bereichen benötigt. Der größte Bereich entfällt dabei auf

Spinresonanzanwendungen. Die aus der Medizin bekannten Magnetresonanztomografen verwenden relativ geringe Felder bis etwa 2 T, während bei der zur Untersuchung von Molekülen verwendeten Kernresonanzspektroskopie Felder von teils über 20 T eingesetzt werden. Beide Verfahren verwenden bis heute vorwiegend Tieftemperatursupraleiter (engl. LTS: low temperature superconductors), die mit flüssigem Helium gekühlt werden. Dazu wird oft auch eine Strahlungsschildkühlung aus flüssigem Stickstoff genutzt, um die Verdampfung des Heliums zu reduzieren. Das verdampfende Kühlmittel wird dabei durch einen Kryokühler wieder rekondensiert, was Kühlleistungen bei 77 K (flüssiger Stickstoff) und 4,2 K (flüssiges Helium) erfordert. Daneben lassen sich Magnete auch direkt kühlen. Dies spart einerseits Kosten, auf der anderen Seite führt dies aber auch oft zu fluktuierenden Temperaturen und Magnetfeldern, sodass sich diese Technik nur für Anwendungen einsetzen lässt, bei denen dies keine Rolle spielt.

Neben dem Einsatz in Spinresonanzanwendungen sind supraleitende Magnete auch in Motoren, Generatoren und Transformatoren einsetzbar. Die hohe Felddichte erlaubt hier eine Größenreduktion, was sich auch positiv auf das Gewicht der Maschine auswirkt. Die in diesen Anwendungen auftretenden Wechselfelder erschweren jedoch den Einsatz von Supraleitern, da die Verluste durch dann wandernde Flussschläuche erheblich zunehmen. Neuere Entwicklungen im Bereich des "Flussschlauch-Pinnings" ermöglichen jedoch auch hier Fortschritte [17], sodass jetzt erste Systeme im militärischen Bereich Anwendung gefunden haben [18].

Supraleitung ermöglicht auch neuartige Anwendungen, für die es kein direktes konventionelles Vorbild gibt. So lassen sich große Energiemengen in supraleitenden Magnetenergiespeichern (engl. SMES: superconducting magnetic energy storage) fast verlustfrei speichern, was besonders in einem sich verändernden Stromnetz, mit vielen kleinen Kraftwerken von Bedeutung ist.

Der Einsatz in der Energietechnik spielt auch für weitere, nicht auf Magneten beruhende Anwendungen eine Rolle. Konventionelle Energiespeicher verwenden oft schnell rotierende Massen (engl. FES: flywheel energy storage), in denen die elektrische Energie in Rotationsenergie und wieder zurück umgewandelt wird. Damit in den Lagern dieser schweren Massen nicht zu viel Energie verloren geht, werden diese in der Regel magnetisch gelagert. Die bei der Beschleunigung bzw. Abbremsung entstehenden Kräfte erfordern jedoch eine komplizierte Regelung. Diese kann unter Ausnutzung des Meißner-Ochsenfeld-Effektes von Supraleitern jedoch entfallen, was außerdem die radiale Steifigkeit des Lagers erhöht und den Aufwand senkt. Als weitere Einsatzgebiete für Supraleiter in der Energietechnik seien noch Strombegrenzer und Hochstromleitungen genannt.

Aufgrund der Kombination von relativ trägen Energieerzeugern, wie sie große Kraftwerke

darstellen, und schnell wechselnde Energieerzeugern aus dem Bereich der regenerativen Energiequellen, verändert sich derzeit unser Energienetz. Methoden zur Energiespeicherung, Lastregelung und Energieübertragung über weite Strecken werden deshalb große Zukunftschancen zugeschrieben. Supraleiter und deren nötige Kühlung können dazu beitragen, den Übergang in ein flexibleres Stromnetz zu ermöglichen.

## **2.4 Pulsrohrkühler für supraleitende Schiffsantriebe**

### **Vorteile von HTS-Maschinen**

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erläutert, erlauben supraleitende Motoren und Generatoren neben Energieeinsparung eine deutliche Verkleinerung der Komponenten. Die damit einhergehende Reduzierung des Gewichtes macht sie für den Einsatz in Schiffen besonders interessant. Konventionelle Schiffsdieselmotoren, wie sie in Frachtern oder Kreuzfahrtschiffen eingesetzt werden, treiben bei relativ niedriger Drehzahl den Schiffspropeller direkt oder über ein zusätzliches Getriebe an. Der dafür erforderliche Drehmoment muss dabei durch sehr große Kolben und Zylinder erzeugt werden. Dies kostet potentiellen Stauraum und reduziert so die Nutzlast. Bei einem supraleitenden Schiffsantrieb erzeugt eine schnell drehende Gasturbine mittels eines Generators elektrische Energie. Diese wird dann einem Elektromotor zugeführt. Elektromotoren erreichen schon bei niedrigen Drehzahlen das erforderliche Drehmoment. Sie besitzen außerdem den Vorteil, dass sie schnelle Drehzahlwechsel durchführen können. Die Verkleinerung durch den Einsatz von Supraleitern erlaubt darüber hinaus eine Entkopplung der Energieerzeugung und des Antriebs, sodass der Motor mit Propeller in ein externes, schwenkbares Gehäuse außerhalb des Schiffes verlagert werden kann ("Pod-Drive"). Die damit mögliche Drehbarkeit des Antriebes sowie die Möglichkeit schneller Drehzahlwechsel erhöht die Manövrierfähigkeit eines Schiffes, was in Häfen von Vorteil ist.

### **Aufbau einer HTS-Maschine**

Für die Konstruktion eines supraleitenden Motors oder Generators kommen mehrere Möglichkeiten in Frage [19]. Beim Einsatz von Supraleitern können magnetische Felder auftreten, die größer als das Sättigungsfeld von Eisen (ca. 1,3 T) sind, welches normalerweise als Halterung der Spulen und zur Feldlinienlenkung dient. Damit das Eisen nicht die maximale Feldstärke begrenzt, sollten die Halterungen der Spulen im Rotor und Stator möglichst nicht magnetisch sein (z.B. aus GFK). Oft stehen jedoch wirtschaftliche und praktische Gründe gegen den Einsatz solcher "Luft-Spulen". Zum Beispiel ermöglichen metallische Spulenträger eine einfachere Kühlung. Daneben gestaltet sich der Einsatz von Supraleitern im Stator

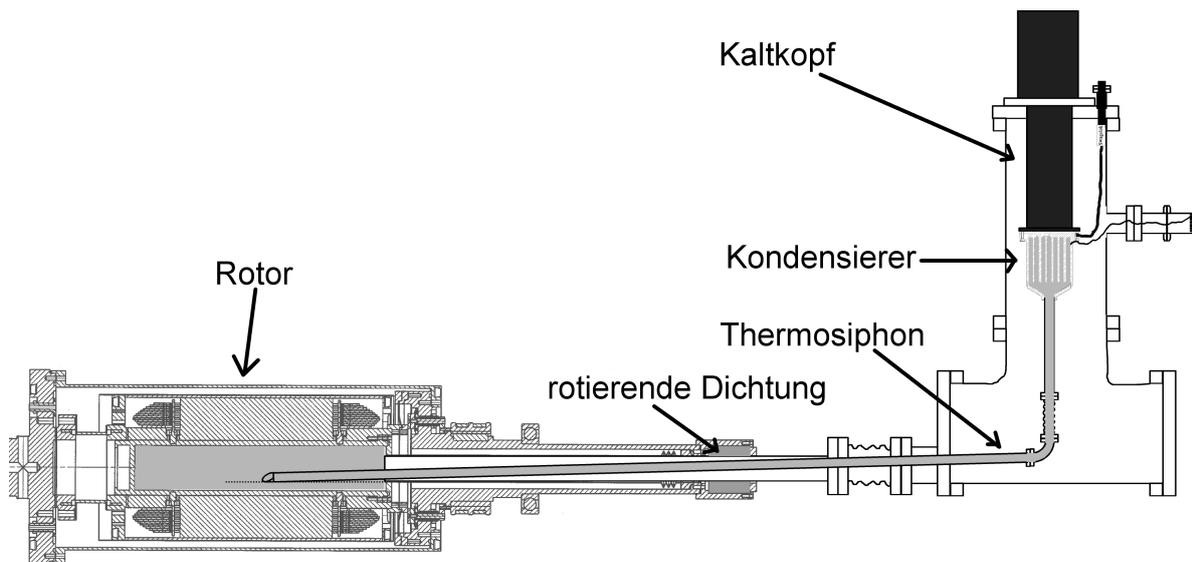


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung des Thermosiphons zur Anbindung des HLPRK-Kaltkopfes an die HTS-Maschine (nach [22]).

schwierig, da die hohen Wechselfelder dort große Verluste induzieren können.

Der in der vorliegenden Arbeit entwickelte Pulsrohrkühler soll zur Kühlung von 0,4-4 MW Synchronmaschinen der Fa. Siemens [20, 21] eingesetzt werden. Der Rotor besteht aus supraleitenden BSCCO Rennbahnschulen, die auf einem magnetischen Eisenkern montiert sind. Der durch die Rennbahnschulen fließende Gleichstrom erzeugt ein statisches magnetisches Feld, welches eine Stärke von 1,1 Tesla erreicht. Der Stator besteht aus konventioneller Kupferlitze, die auf einem glasfaserverstärktem Kunststoff aufgewickelt ist. Das Joch besteht wiederum aus magnetischem Eisen.

## Kryotechnik

Damit der kryotechnische Aufwand in Grenzen bleibt, werden die rotierenden Spulen in Motoren und Generatoren aus Hochtemperatursupraleitern hergestellt. Um die Stromtragfähigkeit zu erhöhen, müssen die Supraleiter aus BSCCO jedoch weit unter ihre Sprungtemperatur abgekühlt werden. Zur Kühlung wird die Rotorwelle von zum Teil flüssigem Neon mit einer Temperatur von 25-27 K durchflossen. Das dabei verdampfende Gas strömt über ein Thermosiphon zurück zum Kryokühler, wo es rekondensiert wird. Abbildung 2.5 zeigt schematisch den Aufbau einer HTS-Maschine mit Thermosiphon und Kryokühler. Je nach Größe der Maschine wird eine Kühlleistung von etwa 50-100 W benötigt. In Abbildung 2.6 ist ein bei Siemens im Test befindlicher 4 MVA HTS-Generator mit zwei einstufigen GM-Kühlern zu



Abbildung 2.6: 4 MVA Generator im Testbetrieb bei Siemens mit zwei 1-stufigen GM-Kühlern [23].

sehen.

Die Anforderungen an einen Kryokühler im maritimen Einsatz schließen konventionelle Kälteerzeugungstechniken aus. Da Schiffe oft über Jahre auf See sind und nur kurz zum Be- und Entladen Häfen anlaufen, müssen Wartungsintervalle möglichst lang sein. Bewegte Teile, wie die Verdränger in Gifford-McMahon- oder Stirling-Kryokühlern, erhöhen die Abnutzung und das Ausfallrisiko. Dazu kommt, dass der ölgeschmierte Kompressor von niederfrequent arbeitenden GM- oder Pulsrohr-Kaltköpfen nicht gekippt werden darf, da sonst das Arbeitsgas mit Öl kontaminiert wird. Bei starkem Seegang kann dies Probleme bereiten.

## 2.5 Kenngrößen eines Kryokühlers

In der vorliegenden Arbeit werden einige Kenngrößen von Kryokühlern verwendet, die im folgenden erläutert werden. Die *Basistemperatur* ist die Temperatur am kalten Ende eines unbelasteten Kaltkopfes. Mit der *Eingangsleistung*  $\dot{W}_{ein}$  eines Kryokühlers wird im Allgemeinen die elektrische Leistung des Gesamtsystems beschrieben. In der Regel schließt dies die Verlustleistung der Kompressorsteuerung sowie gegebenenfalls der Kühlwasseraufbereitung mit ein. Da im vorliegendem Fall nur die elektrische Eingangsleistung des Kompressors messtechnisch zugänglich war, bezieht sich die Eingangsleistung auf die elektrische Eingangs-

leistung des Kompressors. Die *Kühlleistung*  $\dot{Q}_k$  ist die vom Kryokühler aufgenommene Wärme pro Zeiteinheit. Sie entspricht der Verlustleistung eines Heizwiderstandes am kalten Ende des Kaltkopfes. Die *pV-Leistung*  $\dot{W}_{pV}$  ist die vom Kompressor erzeugte akustische Leistung:

$$\dot{W}_{pV} := \frac{1}{\tau} \oint p dV. \quad (2.1)$$

Eine wichtige Kenngröße für die Leistung eines Kältemaschine ist die *Leistungszahl*  $Z$  (engl. COP: coefficient of performance). Im Falle einer Kältemaschine beschreibt sie die Kühlleistung bei einer bestimmten Eingangsleistung und hängt in der Regel stark von der Temperatur ab. Sie wird wie folgt definiert:

$$Z := \frac{\dot{Q}_k}{\dot{W}_{ein}}.$$

Verwendet man in obiger Definition statt der Eingangsleistung  $\dot{W}_{ein}$  die pV-Leistung  $\dot{W}_{pV}$ , so erhält man die Leistungszahl des Kaltkopfes. Um die Effizienzen von unterschiedlichen Kältemaschinen besser miteinander vergleichen zu können, wird der Leistungszahl oft in Bezug zu der theoretisch maximal erreichbaren Leistungszahl eines thermodynamischen Prozesses gesetzt. Diese entspricht dem Carnot-Wirkungsgrad einer Kältemaschine:

$$Z_{Carnot} := \frac{T_k}{T_w - T_k},$$

sodass sich für die *Effizienz*  $\eta$  des Kaltkopfes bezüglich Carnot-Wirkungsgrad und pV-Leistung

$$\eta := \frac{Z}{Z_{Carnot}} = \frac{\dot{Q}_k}{\dot{W}_{pV}} \frac{T_w - T_k}{T_k}$$

ergibt.

## 2.6 Stand der Pulsrohr-Kryokühlertechnik

Die Entwicklung der Pulsrohrkühler begann mit einer eher zufälligen Entdeckung von Gifford und Longworth [24] im Jahr 1964. Sie beobachteten, dass eine Druckwelle in einem an einem Ende geschlossenen Rohr einen Temperaturunterschied zwischen den beiden Rohrenden verursachte. Nähere Untersuchungen führten auf den sogenannten Oberflächenpumpeffekt [25], der im Basis-Modus (siehe Abschnitt 3.1) bei nicht zu großen Temperaturgradienten zur Abkühlung führt. Die in dieser Betriebsart erreichte Temperatur mit Helium als Arbeitsgas betrug allerdings nur 124 K.

Erst im Jahr 1984 berichteten Mikulin et. al. [26] mit der Einführung des "Orifice" von

einer signifikanten Verbesserung. Das zuvor geschlossene Ende wurde über eine Verengung ("Orifice") mit einem Puffervolumen verbunden. Dies machte einen weiteren Kühlmechanismus (Orifice-Modus) möglich, mittels dessen später Temperaturen weit unterhalb von 80 K erreicht wurden.

Ein tieferes Verständnis der Vorgänge im Pulsrohrkühler führten in der darauf folgenden Zeit zu weiteren Verbesserungen. Ein signifikanter Schritt erfolgte im Jahr 1990 durch Zhu et. al. [27] mit der Einführung des "Double-Inlets", welches u.a. die Effizienz von Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern (Arbeitsfrequenz  $> 20$  Hz) verbesserte [28]. Die Kopplung mehrerer Pulsrohrkühler im mehrstufigen Aufbau [29] erlaubte eine weitere Absenkung der Temperatur auf unter 4 K [30]. Eine detaillierte Beschreibung der Funktionsweise der einzelnen Pulsrohrkühlertypen findet sich in Abschnitt 3.1.

### **Klassifizierung der Pulsrohrkühler**

Grundsätzlich unterscheidet man zwei Arten von Pulsrohrkühlern, die jeweils unterschiedliche Methoden zur Druckwellenerzeugung nutzen. Niederfrequente Pulsrohrkühler mit einer Arbeitsfrequenz unter 20 Hz verwenden einen herkömmlichen Scrollkompressor mit anschließendem Rotationsventil. Da dieser auch in GM-Kaltköpfen Verwendung findet, spricht man deshalb auch vom GM-Typ-Pulsrohrkühler. Obwohl der Kaltkopf dieses Typs hohe Wirkungsgrade bei niedrigen Temperaturen erreicht, gehen bis zu 80% der Eingangsleistung im Kompressor und dem nachgeschalteten Drehventil verloren. Zudem benötigten der Kompressor und das Drehventil regelmäßige Wartung [31].

Bei Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern wird die Druckwelle in der Regel durch einen hocheffizienten Linearkompressor (Wirkungsgrad  $> 70\%$ ) erzeugt. Dieser läuft ölfrei und kommt ohne Drehventil aus. Da das Arbeitsprinzip des Kompressors dem des Stirlingkühlers gleicht, spricht man hier vom Stirling-Typ-Pulsrohrkühler. Zusammen mit dem verschleißarmen Pulsrohrkaltkopf bietet sich dieser Typ vor allem für Anwendungen an, bei denen eine Wartung zu aufwendig oder unmöglich ist (Schiffbau, Satellitentechnik). In Abbildung 2.7 sind die beiden Pulsrohrtypen mit ihren unterschiedlichen Druckwellenerzeugern schematisch dargestellt.

Aufgrund einer Arbeitsfrequenz über 20 Hz treten beim Stirling-Typ-Pulsrohrkühler im Vergleich zum GM-Typ erhöhte Verluste im Kaltkopf auf, die hauptsächlich mit steigendem Druckhubabfall bei höherer Strömungsgeschwindigkeit und einer geringeren thermischen Eindringtiefe zusammenhängen. Bisherige Entwicklungen von Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern erreichen nur hohe Wirkungsgrade, wenn entweder die Arbeitstemperatur hoch (mehrere hundert Watt im Bereich von 80 K [32]) oder die Kühlleistung klein ist (wenige Watt im Bereich von 20 K [33]). Insofern stellt die Anforderung einer Kühlleistung im Bereich von 100 W bei 30 K eine neue Entwicklung dar. Tabelle 2.1 zeigt eine Auswahl von kommerziell

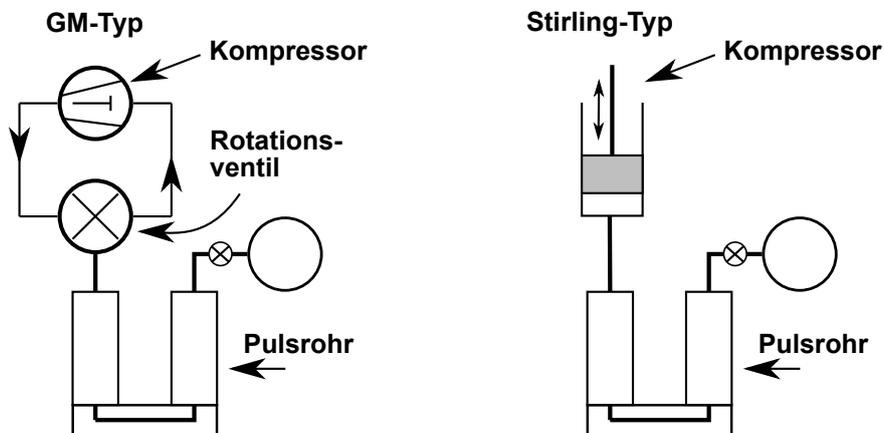


Abbildung 2.7: Druckwellenerzeugung bei GM- und Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern.

Tabelle 2.1: Leistungsdaten einiger Kryokühler mit unterschiedlichen Kühltechniken und Kühlleistungen. %Carnot bzgl.  $T_{warm} = 300$  K.

Name	Typ / Stufen	Kühlleistung	Temperatur	Effizienz (%Carnot)
SCR SPC-1[34]	Stirling / 1	1000 W	80 K	0.098 (27%)
Cryomech AL600[35]	GM / 1	620 W	80 K	0.047 (13%)
RTRI (Japan)[36]	GM-Pulsrohr / 1	1000 W	65 K	0.037 (13%)
Praxair[37, 38]	Stirling-Pulsrohr / 1	300 W	80 K	0.070 (19%)
Cryomech PT810[39]	GM-Pulsrohr / 2	55 W*	30 K	0.0072 (6.3%)
Cryomech AL330[40]	GM / 1	94 W	30 K	0.014 (12.1%)
TransMIT[41]	GM-Pulsrohr / 1	41 W	30 K	0.0056 (4.9%)
SCR LPC-1T[42]	Stirling / 2	120 W	30 K	0.011 (11.1%)

\*) extrapoliert

erhältlichen oder in Entwicklung befindlichen Kühlern unterschiedlicher Bauart. Man erkennt, dass Stirling-Kühler die höchsten Effizienzen besitzen. Im Arbeitsbereich von flüssigem Stickstoff ( $\sim 80$  K) erzielen niederfrequent arbeitende Kühler vom GM- oder Pulsrohr-Typ ähnliche Effizienzen. Hochfrequent arbeitende Pulsrohrkühler hingegen erreichen zwar eine höhere Effizienz, können jedoch noch nicht vergleichbare Kühlleistungen liefern. Im Arbeitsbereich von flüssigem Neon ( $\sim 30$  K) kommen sowohl ein- als auch zweistufige Kühler zum Einsatz. Zweistufige Systeme haben gegenüber einstufigen Systemen den Nachteil, dass ein Teil der Kompressorleistung in der wärmeren Stufe aufgebraucht wird und somit der zweiten Stufe nicht mehr zur Verfügung steht. Oft lässt sich aber der gewünschte Temperaturbereich nur mittels einer weiteren Stufe erreichen. Betrachtet man nur die Kühlleistung der zweiten Stufe, erreichen solche Systeme eine im Vergleich zu einstufigen Systemen geringere Effizienz.

Der in dieser Arbeit zu entwickelnde Pulsrohrkühler soll eine Kühlleistung von 100 W nahe 30 K liefern. Der Vergleich mit den in Tabelle 2.1 aufgeführten Kühlern lässt ein einstufiges Design mit einer Effizienz von ca. 10 % aussichtsreich erscheinen, was einer Kompressoraufnahmeleistung von 10 kW entspricht.

## 3 Grundlagen zum Pulsrohrkühler

### 3.1 Funktionsprinzip

Der Pulsrohrkühler gehört zu den periodisch arbeitenden Kraft-Wärme-Maschinen. Das Arbeitsgas durchläuft dabei einen Kreisprozess, indem es abwechselnd isotherm oder adiabatisch komprimiert und expandiert wird. Abbildung 3.1d zeigt eine schematische Darstellung eines Inertance-Typ Pulsrohrkühlers. Der links zu sehende Kompressor erzeugt über einen Kolben einen periodischen Fluss des Arbeitsgases in und aus dem Kaltkopf. Letzterer stellt den eigentlichen Kühler dar und beginnt in der Abbildung rechts vom Kompressor mit dem Nachkühler. Durch das abwechselnd ein- und ausströmende Gas entsteht im ganzen Kühler eine Druckwelle, die letztlich für die Kompression und Expansion des Arbeitsgases verantwortlich ist.

Im Nachkühler wird dem Arbeitsgas die Kompressionswärme, die es im Kompressor aufgenommen hat, entzogen, bevor es in den Regenerator strömt. Der Regenerator dient als Wärmespeicher und ist mit einem Material hoher Wärmekapazität und großer Oberfläche gefüllt. Der kalte Wärmetauscher nimmt die Wärme des zu kühlenden Objekts auf und überträgt diese an das Arbeitsgas, welches im Pulsrohr adiabatisch komprimiert und expandiert wird. Während die bei der Kompression entstehende Kompressionswärme im warmen Wärmetauscher an die Umgebung abgeführt wird, kühlt das expandierte Gas den kalten Wärmetauscher und den Regenerator ab. Damit dieser Vorgang möglich ist, müssen Massenfluss und Druckwelle in einem bestimmten Phasenwinkel zueinander stehen. Dieser wird durch den nach dem warmen Wärmetauscher folgenden Phasenschieber realisiert, der abhängig vom Pulsrohr-Typ unterschiedlich aufgebaut ist.

#### **Basis-Typ**

Der nur noch historisch interessante Basis-Typ Pulsrohrkühler ohne Phasenschieber nutzt den bereits in Abschnitt 2.6 erwähnten Oberflächenwärmepumpeffekt zur Kälteerzeugung. Dieser tritt auch in anderen Kühlervarianten auf, trägt dort aber nicht mehr entscheidend zur Kühlleistung bei. Das Verständnis dieses Effektes ist trotzdem von Bedeutung, da einige Verlustmechanismen ein ähnliches Funktionsprinzip aufweisen.

Wie bereits beschrieben, erzeugt ein Kompressor im Pulsrohr eine Druckwelle, die dort

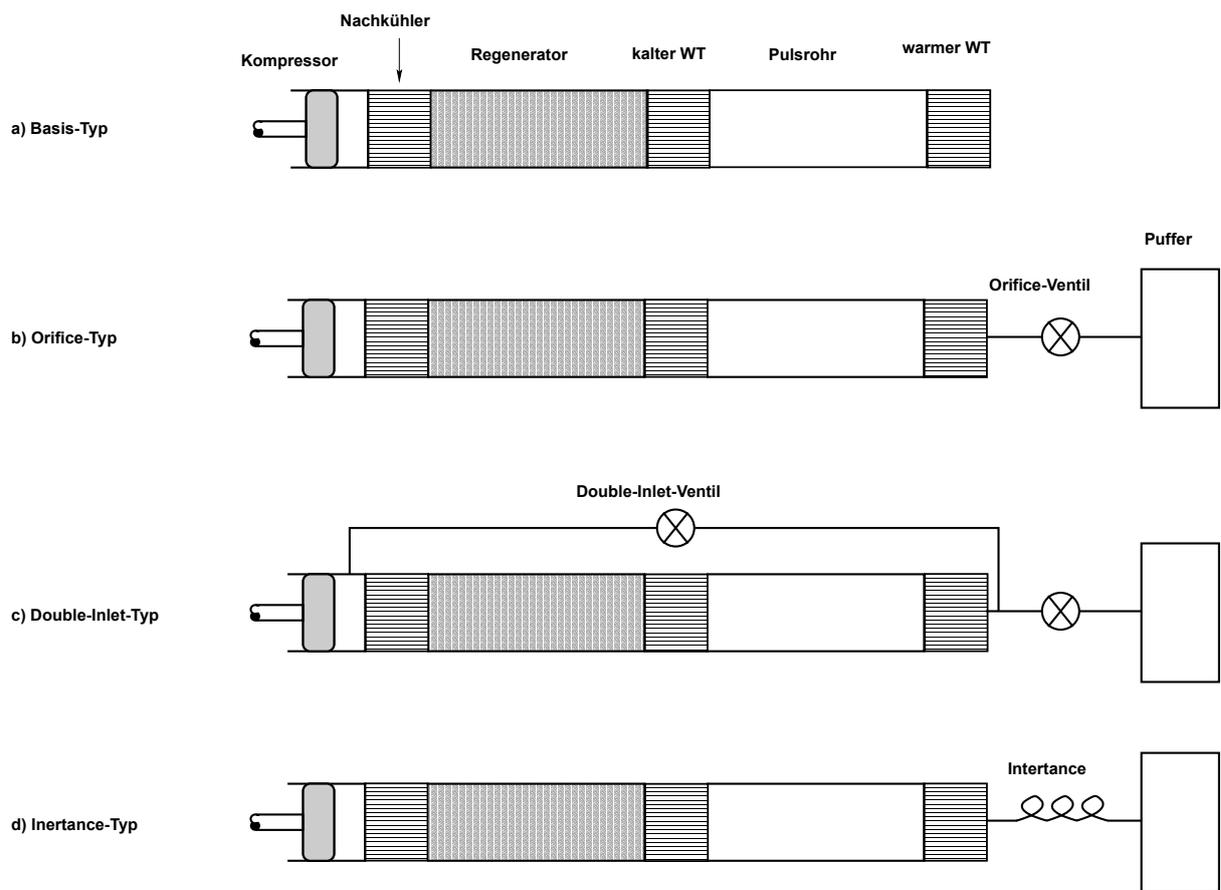


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung verschiedener Pulsrohrkühlertypen.

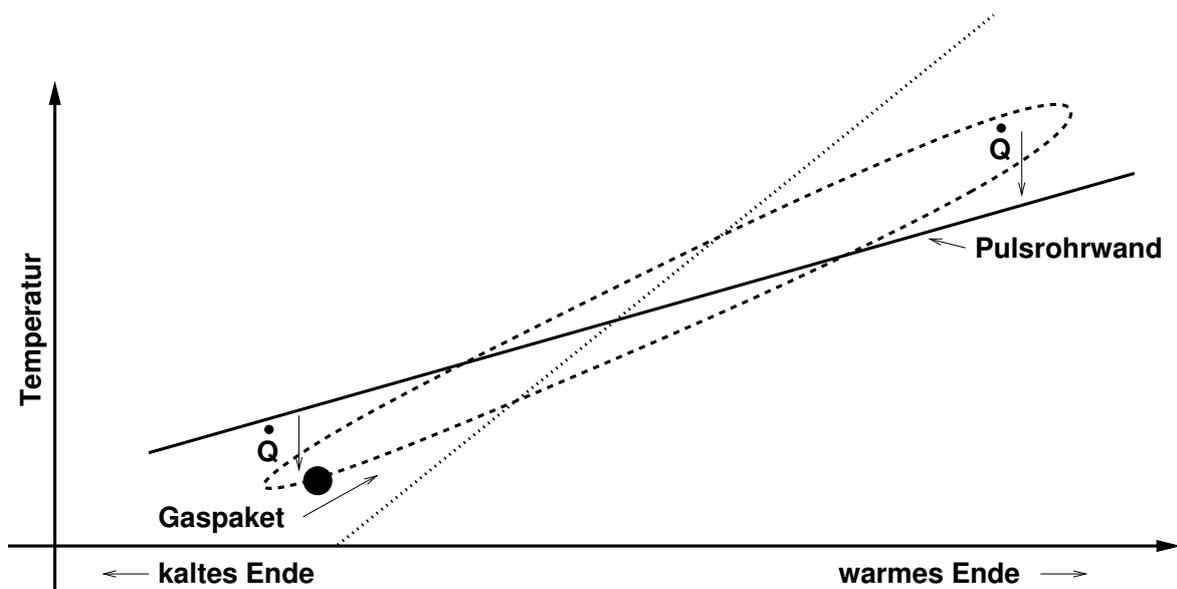


Abbildung 3.2: Entstehung des Oberflächenwärmepumpeffektes im Pulsrohr.

wiederum eine Temperaturoszillation zur Folge hat. Durch den Wärmeaustausch ist letztere in der Nähe der Wand jedoch stark gedämpft, da die Wand bei nicht zu tiefen Temperaturen eine erheblich größere Wärmekapazität als das Gas aufweist, sodass ein konstantes Temperaturprofil entlang der Wand angenommen werden kann. Abbildung 3.2 zeigt schematisch die Temperatur eines Gaspaketes, das entlang der gestrichelten Linie im Pulsrohr oszilliert. Die durchgezogene Linie stellt das Temperaturprofil der Pulsrohrwand dar. Während der Kompression erwärmt sich das Gaspaket und wandert gleichzeitig in Richtung warmes Ende. In der Expansionsphase kühlt das Paket hingegen ab, während es sich Richtung kaltes Ende bewegt. Ist die Temperaturänderung des Pakets entlang des Weges nun größer als der Temperaturgradient der Wand, so kann das Paket in der Nähe des unteren Umkehrpunktes Wärme von der Wand aufnehmen, die es dann in der Nähe des oberen Umkehrpunktes wieder an diese abgibt. Dieser Prozess führt solange zu einer Abkühlung, bis sich die Temperaturgradienten der Wand und des Gaspaketes ausgeglichen haben. Ist der Temperaturgradient der Wand jedoch größer als der des Gaspaketes (gepunktete Linie), so tritt der umgekehrte Effekt auf und Wärme wird vom warmen zum kalten Ende hin transportiert.

### Verlustmechanismen im Pulsrohr

Der oben beschriebene Oberflächenwärmepumpeffekt stellt nur den vereinfachten Grenzfall für niedrige Arbeitsfrequenzen bei einer Phasenverschiebung  $\varphi = \varphi_{\dot{m}} - \varphi_p$  von  $90^\circ$  zwischen Massenfluss und Druckwelle dar (die Druckwelle eilt dem Massenfluss nach). In

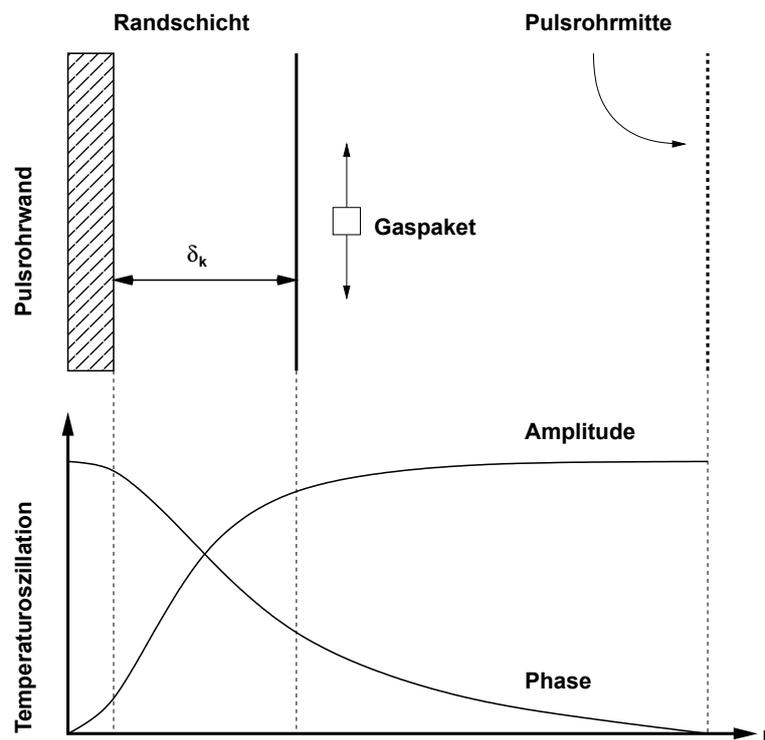


Abbildung 3.3: Temperaturoszillation und Phasenverschiebung im Pulsrohr und der Randschicht.

Pulsrohrkühlern spielt jedoch die thermische Eindringtiefe

$$\delta_k = \sqrt{2k/\omega\rho c_p} \quad (3.1)$$

eine wichtige Rolle. Dabei ist  $k$  die Wärmeleitfähigkeit,  $\omega$  die Kreisfrequenz,  $\rho$  die Dichte und  $c_p$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck. Die thermische Eindringtiefe führt dazu, dass dieser Effekt nur in einer im Vergleich zum Pulsrohrradius dünnen Randschicht entlang der Pulsrohrwand stattfindet. Dazu kommt, dass die Phasenverschiebung in realen Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern nicht mehr starr bei  $90^\circ$ , sondern in Abhängigkeit von der relativen Position im Pulsrohr zwischen  $-30$  und  $-60^\circ$  liegt.

Eine ähnliche Überlegung wie beim Oberflächenwärmepumpen lässt sich auch für die Grenze zwischen der Randschicht und dem Pulsrohrinneren anstellen. Abbildung 3.3 zeigt die Amplitude der Temperaturoszillation und ihre Phasenverschiebung bezüglich der Pulsrohrmitte. Der exponentielle Abfall der Oszillation im Bereich der Randschicht ermöglicht auch hier einen Wärmetransport ähnlich dem des Oberflächenwärmepumpens, nun jedoch zwischen der Pulsrohrmitte und der Randschicht. Da hier die sich auf und ab bewegendes Gaspakete für den Wärmetransport verantwortlich sind, spricht man von einem Pendelwärmeübertrag

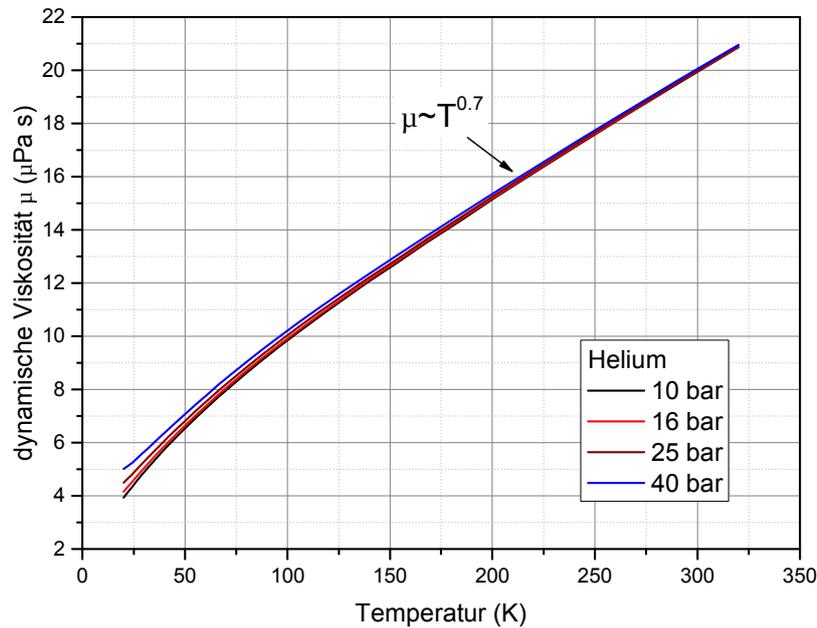


Abbildung 3.4: Abhängigkeit der Viskosität von Temperatur und Druck für Helium.

(engl. *shuttle heat transfer*).

Ein weiterer Verlustmechanismus kommt hinzu, wenn die Viskosität  $\mu$  des Arbeitsgases berücksichtigt wird. Genau wie im Fall der thermischen Randschicht bildet sich an Wänden eine viskose Randschicht

$$\delta_{\mu} = \sqrt{2\mu/\omega\rho}, \quad (3.2)$$

deren Breite in der Regel von der selben Größenordnung wie die der thermischen Randschicht ist. Sie umfasst den Raumbereich, in dem das Arbeitsgas noch die Reibung der Wand "spürt". Abbildung 3.4 zeigt die Temperatur- und Druckabhängigkeit der Viskosität von Helium. Während die Druckabhängigkeit im betrachteten Bereich nur sehr schwach ist, erkennt man in Fall der Temperatur einen  $T^{0.7}$  Zusammenhang. Eine geringe Viskosität bedeutet, dass sich ein Gaspaket bei gegebenem Druckunterschied weiter bewegen kann als bei hoher Viskosität. Vergleicht man nun die Bewegung eines Gaspaketes in der Nähe der viskosen Randschicht (siehe Abbildung 3.3), mit der eines innerhalb der Randschicht, so führt u.a. die Nichtlinearität der Temperaturabhängigkeit der Viskosität zu einer Nettoverschiebung der Gaspakete in der Randschicht relativ zu denen außerhalb. Aufgrund der Massenflusserhaltung muss das Gas in der Pulsrohrmitte diese durch eine Bewegung in der Gegenrichtung ausgleichen. So entsteht eine der mit Rayleigh-Strömung verwandte Kreisströmung, die in der Regel Wärme vom warmen zum kalten Ende des Pulsrohrs überträgt und somit einen Verlust darstellt (engl.

*streaming convection*) [43].

## Orifice-Typ

Eine entscheidende Verbesserung gegenüber dem Basis-Typ stellt der Orifice-Typ-Pulsrohrkühler (Abbildung 3.1b) dar. Mikulin et al. zeigten im Jahr 1984 [26], dass durch eine kleine Öffnung (engl. Orifice) am warmen Ende des Basis-Typ-Pulsrohrkühlers und einem dahinter liegenden Puffervolumen die Kälteleistung eines Pulsrohrkühlers erheblich gesteigert werden kann. Das in der Regel durch ein Feinventil realisierte Orifice wirkt zusammen mit dem Puffervolumen wie ein Phasenschieber, welcher die Phase der Druckwelle bezüglich der des Massenflusses verschiebt. In Abhängigkeit von der Ventileinstellung lassen sich so Phasenwinkel  $\varphi$  zwischen  $90^\circ$  (Basis-Typ) und  $30^\circ$  einstellen. Abbildung 3.1b zeigt den Orifice-Typ-Pulsrohrkühler mit Phasenschieber aus Ventil und Puffervolumen. Die nun vom Basis-Typ unterschiedliche Phasenverschiebung ermöglicht einen zusätzlichen Enthalpiefluss

$$\dot{H}^* = \frac{1}{\tau} \oint c_p \dot{m} \cdot T dt, \quad (3.3)$$

der im Falle des adiabatischen thermodynamischen Prozesses im Pulsrohr mit der dortigen akustischen Leistung

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{1}{\tau} \oint p \cdot \dot{V} dt \\ &= \frac{1}{2} |p| |\dot{V}| \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

identisch ist (siehe Abschnitt 3.2). Die physikalischen Größen Massenfluss  $\dot{m}$ , Temperatur  $T$ , Druck  $p$  und Volumenfluss  $\dot{V}$  sind hier komplexe Zeiger mit Betrag und Phasenwinkel (siehe [44] und Kapitel 4). Aufgrund des Skalarproduktes “ $\cdot$ ” ergibt sich ein maximaler Energietransport bei gleichzeitig minimaler Druckamplitude  $p$  und Volumenfluss  $\dot{V}$ , wenn der Phasenwinkel zwischen Druckwelle und Volumenfluss etwa  $0^\circ$  beträgt. In typischen Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern liegt der Volumenfluss im Pulsrohr etwa in Phase mit dem Massenfluss, sodass sich mit Hilfe des Phasenschiebers der Betrag des Energieflusses einstellen lässt.

Es hat sich jedoch gezeigt, dass eine Phasenverschiebung von  $0^\circ$  nicht das Optimum darstellt. Da der dem Pulsrohr vorgeschaltete Regenerator die Hauptverlustquelle repräsentiert, ist es günstiger den Punkt der  $0^\circ$  Phasenverschiebung in dessen Mitte zu legen [31]. So können bei gegebenem Energiefluss die Amplituden der Druckwelle und des Massenflusses klein gehalten werden. Der Regeneratorflusswiderstand und dessen Totvolumen führen ebenfalls zu einer Phasenverschiebung, sodass sich eine optimale Phasenverschiebung  $\varphi_{\dot{m}} - \varphi_p$  von

etwa  $-30^\circ$  am kalten Ende des Pulsrohrs ergibt. Diese Phasenverschiebung lässt sich jedoch in Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern nur mit dem Inertance-Typ erreichen (s.u.).

### **Double-Inlet-Typ**

Da der Orifice-Typ offensichtlich noch nicht die benötigte Phasenverschiebung ermöglichte, wurden in der Folgezeit nach besseren Phasenschiebern gesucht. Mit dem im Jahr 1990 durch Zhu et. al. [27] eingeführten zweiten Einlasses (engl. double inlet) sind Phasenverschiebungen bis ca.  $0^\circ$  möglich. Abbildung 3.1c zeigt die Double-Inlet-Anordnung, welche aus einem zusätzlichen Ventil zwischen Kompressor und Pulsrohr besteht. Die zusätzliche Phasenverschiebung kommt dadurch zustande, dass sich der Massenfluss vom Orifice mit dem aus dem Kompressor überlagert. Abbildung 3.5b zeigt den im Vergleich zu Abbildung 3.5a deutlich verkleinerten Phasenwinkel  $\varphi$ .

Neben der Phasenverschiebung erlaubt das Double-Inlet außerdem einen Teil der akustischen Leistung am Regenerator vorbei am warmen Ende des Pulsrohrs einzuspeisen. Dies ist möglich, da während eines Zyklus immer nur ein Bruchteil des Gases im Pulsrohr auch den Regenerator durchqueren muss. Durch den zusätzlichen Einlass kann nun der Massenfluss durch den Regenerator verkleinert werden, ohne den Energiefluss im Pulsrohr zu mindern. Dies ist auch in Abbildung 3.5b zu erkennen, da der Betrag des Massenflusses am kalten Ende  $\dot{m}_k$  im Vergleich zu Abbildung 3.5a reduziert ist. Gleichzeitig steigt jedoch der Betrag der Druckhubamplitude. In beiden Fällen ist der Energiefluss im Pulsrohr der Selbe. Durch diese Maßnahme können Verluste im Regenerator reduziert werden.

Eine Schwierigkeit beim Einsatz des Double-Inlet ist durch die Möglichkeit eines Ringstroms (DC-Flusses) gegeben. Je nach Richtung führt er entweder Wärme vom warmen zum kalten Ende des Pulsrohrs, wobei er den Regenerator entlastet oder er führt Wärme vom warmen zum kalten Ende des Regenerators, wodurch dieser zusätzlich belastet wird. Im letzteren Fall wird jedoch auch Wärme vom kalten zum warmen Ende des Pulsrohrs transportiert. Je nach Auslegung des Kaltkopfes kann ein DC-Fluss deshalb positive als auch negative Auswirkungen auf die Kühlleistung haben.

### **Inertance-Typ**

Ein im Vergleich zum Double-Inlet-Typ nochmals verbesserter Phasenschieber wurde 1996 von Zhu et. al. [45] vorgestellt. Das Orifice-Ventil wird hierbei durch eine lange und dünne Leitung ersetzt. Die Massenträgheit (engl. inertance) des Arbeitsgases führt innerhalb der Leitung zu einer Phasenverschiebung des Massenflusses. Diese ist umso größer, je länger die Leitung und je kleiner der Leitungsquerschnitt ist. Auf eine Möglichkeit zur Berechnung der

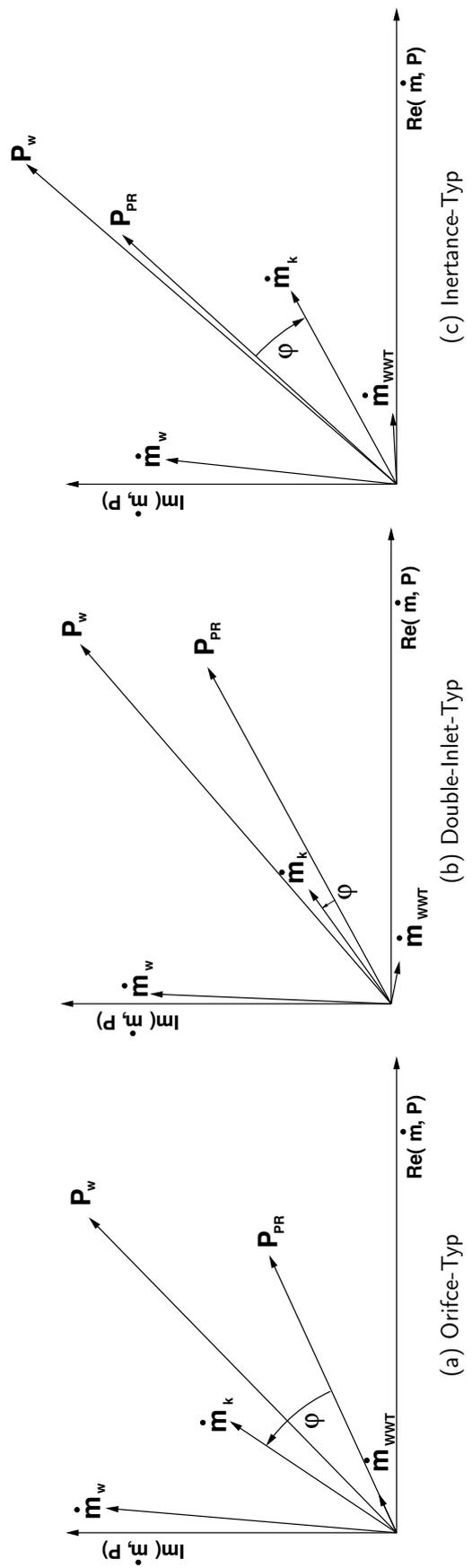


Abbildung 3.5: Zeigerdiagramme wichtiger Druckwellen und Massenflüsse für verschiedene Pulsrohrkühlertypen.  $\dot{m}_w$ ,  $\dot{m}_k$  und  $\dot{m}_{WWT}$  bezeichnen die Massenflüsse am warmen bzw. kalten Ende des Regenerators sowie am warmen Wärmetauscher.  $P_w$  und  $P_{PR}$  bezeichnen die Druckhubamplituden am warmen Ende des Regenerators und im Pulsrohr.

Inertance wird in Abschnitt 4.2 eingegangen.

Mit dieser Methode ist es nun möglich die gewünschte Phasenverschiebung von ca.  $-30^\circ$  am kalten Ende zu erreichen, wie Abbildung 3.5c zeigt. Man erkennt außerdem, dass sich die Phase der Druckwelle genau zwischen den Phasen der Massenflüsse am warmen und kalten Ende des Regenerators befindet, sodass die Phasenverschiebung von  $0^\circ$  etwa in der Mitte des Regenerators liegt.

Der Inertance-Typ Pulsrohrkühler hat jedoch auch Einschränkungen. So tritt eine ausreichende Phasenverschiebung nur bei Leitungslängen von der Größenordnung  $\lambda/4$  auf. Dieser Umstand beschränkt den praktischen Einsatz der Inertance auf Stirling-Typ-Pulsrohrkühler mit hoher Arbeitsfrequenz. Hinzu kommt, dass bei kleinen Leitungsdurchmessern in der Größenordnung der viskosen Eindringtiefe der resistive Anteil der Flussimpedanz schnell ansteigt, sodass eine ausreichende Phasenverschiebung nicht mehr gewährleistet ist. Dies ist bei sehr kleinen Pulsrohrkühlern der Fall. Als Ausweg bieten sich hier gestufte oder konische Inertance-Leitungen [46] an beziehungsweise der zusätzliche Einsatz eines Double-Inlet Ventils. Näheres dazu findet sich ebenfalls in Abschnitt 4.2.

### **Weitere Typen von Pulsrohrkühlern**

Die oben beschriebenen Beschränkungen des Inertance-Typ-Pulsrohrkühlers führten zu weiteren Entwicklungen. In niederfrequenten Kühlern wurde versucht mittels eines zusätzlichen Drehventils [47] oder einzeln steuerbaren Ventilen [48] eine bestimmte Phasenlage am warmen Ende des Pulsrohrs zu erzwingen. Im Fall der Stirling-Typ-Pulsrohrkühler kamen statt eines Drehventils frei laufende [49] oder gesteuerte Kolben [50] zum Einsatz. Neben der eigentlichen Phasenverschiebung erlauben solche Systeme auch die sonst in einem passiven Phasenschieber dissipierte Energie selbst wieder für den Kühlprozess zu nutzen. Diese Maßnahmen heben zwar die Effizienz besonders bei hohen Arbeitstemperaturen ( $> 100\text{ K}$ ) an, bringen aber auch zusätzliche bewegte Teile mit in das System, was die Vorteile der Pulsrohrkühler wie u.a. geringe Vibrationen und geringer Verschleiß zunichte macht. Neuere Entwicklungen zielen daher darauf, die sonst am warmen Ende dissipierte Energie wieder dem Druckwellenerzeuger zuzuführen und gleichzeitig eine optimale Phasenverschiebung zu erhalten [51].

### **Bauformen**

Je nach räumlicher Anordnung des Regenerators und des Pulsrohrs unterscheidet man unterschiedliche Bauformen eines Pulsrohrkühlers. Abbildung 3.6a zeigt die lineare Anordnung, bei der das Pulsrohr und der Regenerator auf einer Linie liegen. Diese Bauform ermöglicht ein geringes Totvolumen am kalten Ende und minimiert gleichzeitig Verluste durch Gasumlenkung.

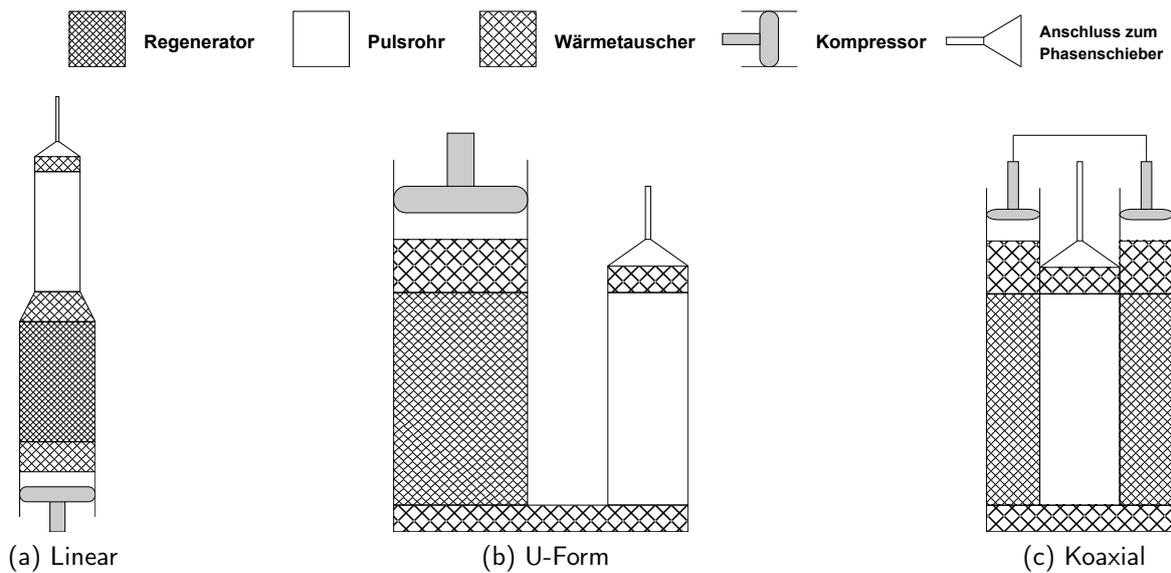


Abbildung 3.6: Unterschiedliche Bauformen von Pulsrohrkühlern.

In Abbildung 3.6b ist die U-Form-Bauweise gezeigt, die im Vergleich zur linearen Anordnung eine leichtere Verbindung zur Kühllast ermöglicht. Nachteilig wirken sich hier allerdings das größere Totvolumen und die schwieriger zu realisierende Gasumlenkung aus. Einen Kompromiss aus linearer und U-Form-Anordnung stellt die koaxiale Anordnung in Abbildung 3.6c dar. Wie die lineare Anordnung bietet sie ein geringes Totvolumen am kalten Ende, ermöglicht jedoch gleichzeitig einen leichten Anschluss von Kühllasten. Die Gasumlenkung übernimmt bei diesem Typ der kalte Wärmetauscher, sodass kein zusätzliches Volumen dafür benötigt wird. Die Wärmebrücke zwischen Pulsrohr und Regenerator kann abhängig vom Temperaturprofil in diesen Bauteilen einen positiven oder negativen Einfluss auf die Effizienz haben. Koettig [52] schreibt, dass ein zusätzlicher Wärmefluss vom Regenerator zum Pulsrohr sich positiv auf die Kühlereffizienz auswirken kann.

Die Fotos in den Abbildung 3.7 zeigen einige am Institut für Angewandte Physik für kryoelektrische Anwendungen entwickelte Stirling-Typ-Pulsrohrkühler unterschiedlicher Bauformen [53]. Bei allen Kaltköpfen beträgt die Regeneratorlänge ca. 80 mm und sie besitzen in etwa die gleichen Pulsrohr- und Regeneratorvolumina. Abbildung 3.8 zeigt die Kühlleistungen der verschiedenen Kaltköpfe bei einer elektrischen Eingangsleistung von 100 W und 200 W im Orifice-Betrieb. Das warme Ende der Kaltköpfe wurde dabei mit Wasser (ca. 18°C) gekühlt. Die lineare Bauform erreicht die höchste Kühlleistung von über 8.7 W bei 80 K ( $P_{ein} = 200$  W), gefolgt von der koaxialen Bauform (8 W bei 80 K). Aus den schon oben beschriebenen Gründen besitzt die U-Form-Bauweise die höchsten Verluste und erreicht nur eine Kälteleistung von 7.3 W bei 80 K.

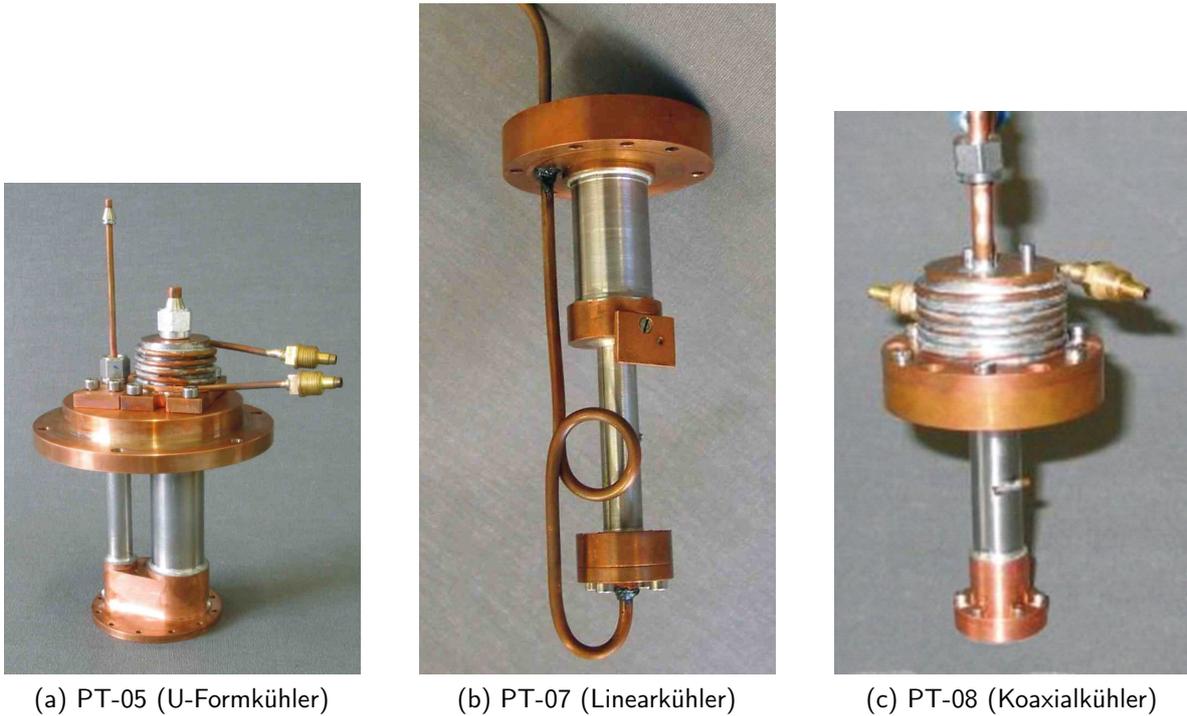


Abbildung 3.7: Bilder einiger am Institut für Angewandte Physik entwickelter Pulsrohrkälteköpfe.

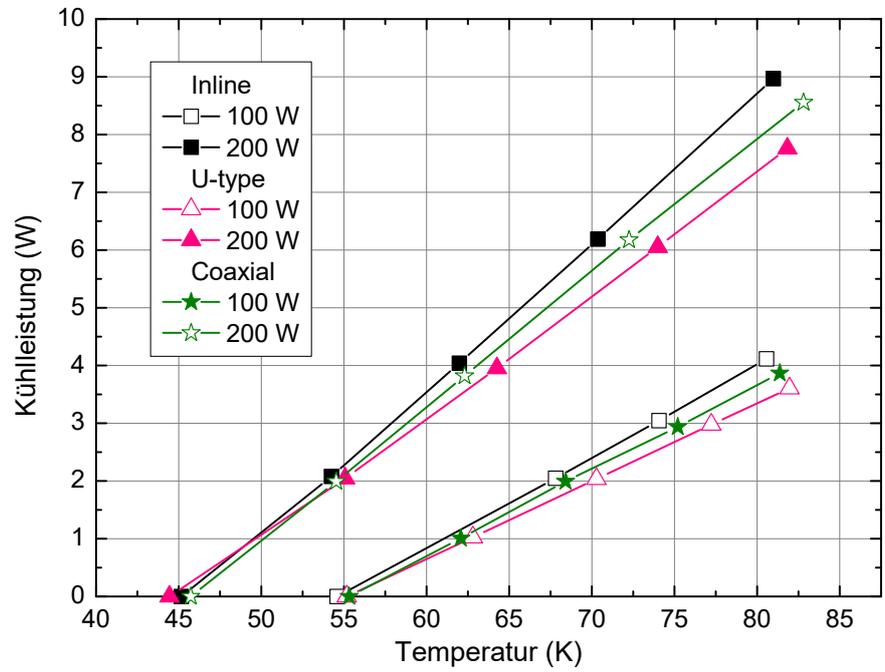


Abbildung 3.8: Kälteleistungen der Pulsrohrkühler aus Abbildung 3.7 im Orifice-Modus bei unterschiedlichen Eingangsleistungen (nach [53]).

## 3.2 Thermodynamische Grundlagen

In den folgenden Abschnitten werden die für Aufbau eines Pulsrohrkühlers wichtigen thermodynamischen Relationen und Verlustmechanismen erläutert. Ausgehend von grundlegender Thermodynamik werden mittels Exergieanalyse kritische Komponenten des Kühlers und deren Effizienz bestimmt. Dabei dient das Computersimulationsprogramm SAGE [54] dazu, anhand einiger Beispielkühler die physikalischen Abläufe innerhalb des Kaltkopfes zu analysieren.

In der Thermodynamik werden eine Reihe von Potentialen eingeführt, aus denen sich Observablen wie Temperatur  $T$ , Druck  $p$  oder Volumen  $V$  ableiten lassen. Diese sind u.a. die *innere Energie*  $U$ , die *Enthalpie*  $H$  und die *Entropie*  $S$ , deren Definition auf der Einsicht basiert, dass sich das Verhalten von Materie nur dann erklären lässt, wenn man eine innere Ordnung berücksichtigt. Zwar entzieht sich dieser mikroskopische Bereich unserer makroskopischen Wahrnehmung, jedoch lassen sich diese Potentiale mittels der Thermodynamik als Differenziale makroskopisch messbarer Größen darstellen. Gebräuchliche Definitionen dieser Potentiale für eine reversible Zustandsänderung eines Gases finden sich in der Literatur (z.B. [55]):

$$dU = T dS - p dV \quad (3.5)$$

$$dH = T dS + V dp \quad (3.6)$$

und daraus folgend:

$$T dS = dU + p dV. \quad (3.7)$$

Die *Hauptsätze der Thermodynamik* beschreiben die Möglichkeiten der Energieumwandlung zwischen Wärme, Arbeit, innerer Energie, Enthalpie und Entropie. Da bei der in Kapitel 4 erläuterten numerischen Simulation von Pulsrohrkühlern der Kaltkopf in der Regel in kleine Volumina eingeteilt wird, ist es notwendig, diese als "offene Systeme" zu behandeln, was bedeutet, dass Massenflüsse über die Volumengrenzen mit berücksichtigt werden müssen. Im folgenden werden deshalb die mit Massenfluss verbundenen Energieflüsse analog zu [56] mit einem "\*" gekennzeichnet. Außerdem wird die Summe aus ein- und ausströmenden Energien mit einem Summenzeichen abgekürzt:  $\sum \dot{X}^* := \dot{m}_{\text{ein}}x - \dot{m}_{\text{aus}}x$ , mit  $x$  als Energiedichte der Energie  $X$  ( $X \in U, H, S, \dots$ ). Einströmende Energie wird dabei positiv und ausströmende Energie negativ gezählt.

Der *erste Hauptsatz* der Thermodynamik entspricht, wie in Abbildung 3.9 veranschaulicht, der Energieerhaltung und definiert die Änderung der inneren Energie  $\dot{U}$  eines offenen Systems

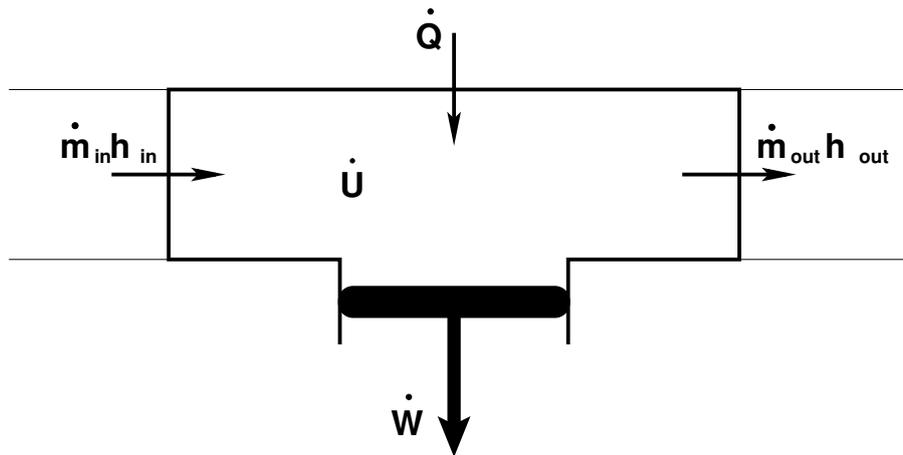


Abbildung 3.9: Ein- und ausgehende Energieflüsse eines Volumenelementes.

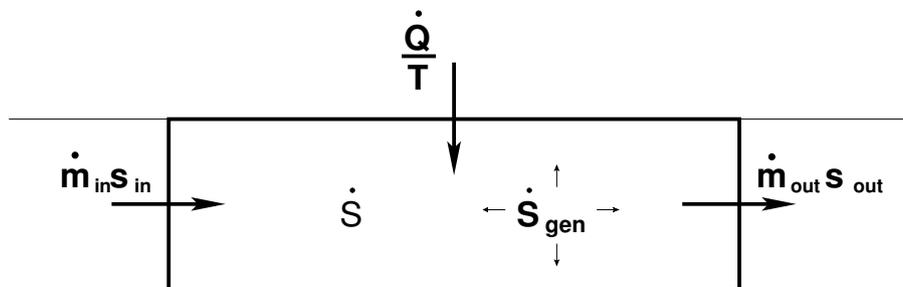


Abbildung 3.10: Entropiebilanz innerhalb eines Kontrollvolumens.

als Summe aus pro Zeiteinheit zugeführter Arbeit  $\dot{W}$ , Wärme-  $\dot{Q}$  und Enthalpieflüssen  $\dot{H}^*$ :

$$\dot{U} = \sum \dot{Q} + \sum \dot{H}^* - \dot{W}. \quad (3.8)$$

Die Arbeit  $W$  wird hier negativ gezählt, wenn sie zugeführt wird und positiv, falls das Gas Arbeit leistet.

Betrachtet man einen Kühler im thermodynamischen Gleichgewichtszustand, d.h. sein Temperaturprofil verändert sich im zeitlichen Mittel nicht mehr, so ändert sich auch seine innere Energie nicht, d.h.  $\langle \dot{U} \rangle = 0$  und Gleichung 3.8 wird zu  $\langle \sum \dot{Q} \rangle + \langle \sum \dot{H}^* \rangle = \langle \dot{W} \rangle$ . Hier und im Folgenden bezeichnet " $\langle \dots \rangle$ " den zeitlichen Mittelwert. Da Arbeit dem System nur im Kompressor zugefügt wird, gilt für alle anderen Komponenten  $\dot{W} = 0$  und somit:

$$\langle \sum \dot{Q} \rangle + \langle \sum \dot{H}^* \rangle = 0. \quad (3.9)$$

Der *zweite Hauptsatz*, wie in Abbildung 3.10 dargestellt, definiert die Änderung der Entropie  $\dot{S}$  als Summe aus Wärmeflüssen  $\dot{Q}$  bei einer festen Temperatur  $T$ , Entropieflüssen

$\dot{S}^* = \dot{m}s$  und irreversibler Entropieerzeugung  $\dot{S}_{gen}$ :

$$\dot{S} = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \sum \dot{S}^* + \dot{S}_{gen}. \quad (3.10)$$

Ist  $\dot{S}_{gen} = 0$  so spricht man von einem reversiblen Prozess und die Effizienz des Prozesses entspricht dem Carnot-Wirkungsgrad. Bei realen Prozessen sind Irreversibilitäten jedoch unvermeidlich ( $\dot{S}_{gen} > 0$ ), sodass deren Wirkungsgrad stets geringer ist als der Carnot-Wirkungsgrad. Auch hier gilt, dass sich im stationären Fall die Entropie im zeitlichen Mittel nicht ändert, d.h.  $\langle \dot{S} \rangle = 0$ .

Im Folgenden werden die Verluste im Pulsrohrkühler anhand der Entropieerzeugung nach Gleichung 3.10 untersucht. Dabei hat es sich als praktisch erwiesen mit der *Exergie* ein neues thermodynamisches Potential einzuführen [57]. Subtrahiert man die mit  $T_w$  multiplizierte Gleichung 3.10 von Gleichung 3.8, so erhält man den Ausdruck für die Exergie mit  $\Xi = H - T_w S$ , welche die Fähigkeit eines Gases beschreibt, Arbeit bei einer Temperatur  $T$  zu leisten:

$$\dot{U} - T_w \dot{S} = -\dot{W} + \sum \left(1 - \frac{T_w}{T}\right) \dot{Q} + \sum \left(H - T_w S\right)^* - T_w \dot{S}_{gen}. \quad (3.11)$$

$T_w$  ist dabei frei wählbar, jedoch verwendet man aus praktischen Gründen die Umgebungs- oder Kühlwassertemperatur. Im zeitlichen Mittel und im stationären Fall ist die linke Seite von Gleichung 3.11 wieder null, sodass man umgestellt nach dem Exergiefluss

$$\sum \Xi^* = T_w \dot{S}_{gen} + \dot{W} - \sum \left(1 - \frac{T_w}{T}\right) \dot{Q} \quad (3.12)$$

erhält. Diese Gleichung zeigt, dass der Exergiefluss durch irreversible Entropieerzeugung und reversiblen Wärmetransport abnimmt bzw. durch Zufuhr von Arbeit  $\dot{W}$  zunimmt.

Der Exergiefluss  $\Xi^* = \dot{m}(h - T_w s)$  lässt sich bei Kenntnis der massenspezifischen Enthalpie  $h$  und Entropie  $s$  berechnen. Aus den Gleichungen 3.5 und 3.6 folgt mit  $V = m/\rho$  die massenspezifische Enthalpie:

$$h = \varepsilon + p/\rho. \quad (3.13)$$

Die massenspezifische innere Energie  $\varepsilon$  als auch der Druck  $p$  und die Dichte  $\rho$  sind aus dem SAGE Lösungsgitter direkt zugänglich, sodass sich der Enthalpiefluss leicht berechnen lässt. Für die Entropie gilt nach Gleichung 3.7

$$T dS_{tot} = dU + pdV. \quad (3.14)$$

$dS_{tot} = dS + dS_{gen}$  beinhaltet hier sowohl reversible als auch irreversible Entropieerzeugung. Im idealen Gas ist  $du = c_v dT$  und  $p = \rho R_{gas}T$ , sodass sich nach der Integration die massenspezifische Entropie zu

$$s = c_v \ln T + R_{gas} \ln \frac{1}{\rho}$$

ergibt. Bei Temperaturen unterhalb von 80 Kelvin bietet SAGE die Verwendung der Redlich-Kwong Gasgleichung [58] anstatt der idealen Gasgleichung an, da erstere bis herab zu Temperaturen von ca. 20 Kelvin exaktere Werte liefert. Die Entropie berechnet sich nach [59] dann zu

$$s = c_v \ln T + R_{He} \ln(\nu - b) - \frac{a}{2b} \frac{\ln\left(1 + \frac{b}{\nu}\right)}{T^{3/2}},$$

mit  $a = 6.18 * 10^2$  und  $b = 2.77 * 10^{-3}$  für Helium und  $\nu$  für das Molvolumen ( $\nu_{He} \approx 4g mol^{-1}/\rho$ ).

Multipliziert man Gleichung 3.10 mit  $T$  statt mit  $T_w$  und setzt sie in Gleichung 3.8 ein, so erhält man einen Ausdruck für den Entropiefluss  $T\dot{S}^*$ :

$$-T \left( \sum \dot{S}^* + \dot{S}_{gen} \right) = \dot{W} - \sum \dot{H}^*. \quad (3.15)$$

Der Term auf der linken Seite entspricht der im letzten Absatz berechneten Gesamtentropie multipliziert mit  $T \dot{m}$ . Umgestellt nach der Exergie ergibt sich dann

$$\dot{\Xi}^* = \dot{H}^* - T_w \dot{S}^* \quad (3.16)$$

$$= \left( 1 - \frac{T_w}{T} \right) \dot{H}^* + \frac{T_w}{T} \dot{W}. \quad (3.17)$$

Die nur im Kompressor geleistete Kompressionsarbeit  $W$  wird in der akustischen Näherung (siehe Abschnitt 4.2) durch den akustischen Leistungsfluss  $\dot{W} = \frac{1}{\tau} \oint (p(t) - p_m) \dot{V}(t) dt$  ersetzt [60], wodurch der Exergiefluss nach Gleichung 3.17 im gesamten Kühler berechnet werden kann. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn kein DC-Fluss bzw. Massenflüsse höherer Ordnung existieren. Eine Überprüfung in SAGE zeigt, dass beide Methoden zur Berechnung der Exergie nach Gleichung 3.16 und Gleichung 3.17 zum gleichen Ergebnis führen.

Eine der Hauptverlustquellen im Pulsrohrkühler stellt der Regenerator dar (vgl. Abbildung 3.6). Die Ursache hierfür liegt einerseits im Wärmeübergang zwischen Gas und Matrix, und andererseits im Druckhubabfall über dem Regenerator. Beide Prozesse erzeugen Entropie, was im Folgenden erläutert wird.

Die Entropieerzeugung durch Wärmeleitung lässt sich wie folgt herleiten: Eine angenommene Wärmemenge  $Q$  wird einem Volumen an einem Ende bei einer Temperatur  $T_w$  reversibel hinzugeführt und an einem anderen Ende bei einer Temperatur  $T_k$  wieder reversibel entnommen. Existiert kein Entropiefluss ( $\dot{m} = 0$ ), so lautet dann der zweite Hauptsatz nach Gleichung 3.10:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\dot{Q}}{T_w} - \frac{\dot{Q}}{T_k} + \dot{S}_{gen} \\ &= \frac{\dot{Q}(T_k - T_w)}{T_k T_w} + \dot{S}_{gen}. \end{aligned}$$

Die Entropieerzeugung pro Länge ergibt sich dann zu:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{S}_{gen}}{\Delta x} = -\frac{\dot{Q}}{T^2} \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

und die Entropieerzeugung im Kontrollvolumen:

$$\dot{S}_{gen} = - \oint \int \frac{\dot{Q} \nabla T}{T^2} dx dt. \quad (3.18)$$

Die Entropieerzeugung durch Druckabfall hängt mit der viskosen Reibung zusammen. Durch Umstellen von Gleichung 3.6 erhält man einen Ausdruck für die Entropieerzeugung durch Wärmeübertragung ( $dH$ ) und Druckabfall  $dp$ :

$$TdS = dH - Vdp.$$

Betrachtet man nun ausschließlich den Druckhubabfall  $dp$  ( $dH = 0$ ), beträgt die damit verbundene Entropieerzeugung im Kontrollvolumen

$$\dot{S}_{gen} = - \oint \int \frac{\dot{V} \nabla p}{T} dx dt. \quad (3.19)$$

### 3.3 Energiefluss-Analyse

Anhand der im letzten Abschnitt erläuterten Gleichungen lassen sich mit Hilfe von SAGE die einzelnen Energieflüsse wie in [57] beschrieben auftragen. Abbildung 3.11 vergleicht schematisch die Unterschiede zwischen einem idealen und einem realen Inertance-Pulsrohrkühler mit adiabatischem Kompressor- und polytropem Inertance- und Puffervolumen. Auf Grund des einfachen Aufbaus wurde hier als Basis das Kaltkopfmodell PT-08 (siehe Abbildung 3.7c) mit ca. 45 W pV-Leistung und  $T_k = 80$  K Arbeitstemperatur gewählt ( $T_w = 300$  K) [61].

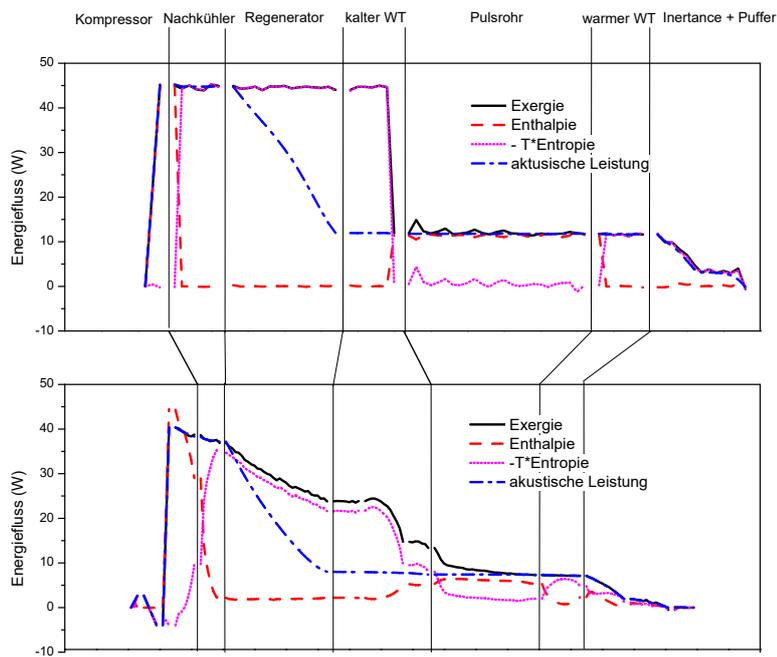


Abbildung 3.11: Mit SAGE berechnete Energieflüsse im idealen (oben) und realen (unten) Pulsrohrkühler. Für  $T_w$  wurden 300 K (Reject-Temperatur) gewählt. Die akustische Leistung des Kompressors beträgt 45 W und die Kaltkopftemperatur 80 K.

Tabelle 3.1: Pulsrohrkühler Baugruppen und ihre thermodynamischen Eigenschaften.

Baugruppe	idealer Pulsrohrkühler			
Energieänderung	$\Delta W =$	$\Delta H =$	$\Delta \Xi =$	$-T\Delta S =$
Kompressor (adiabatisch, pV)	$W_{ein}$	$W_{ein}$	$W_{ein}$	0
Wärmetauscher (isotherm)	0	$-Q$	$-Q(1 - T_w/T)$	$Q$
Regenerator (isotherm)	$-W_{ein}(1 - T_k/T_w)$	0	0	$-W_{ein}(1 - T_k/T_w)$
Pulsrohr (adiabatisch)	0	0	0	0
Inertance+Puffer (polytrop, Verluste)	$-W_{ein}T_k/T_w$	0	$-W_{ein}T_k/T_w$	$-W_{ein}T_k/T_w$

Der ideale Pulsrohrkühler (Abbildung 3.11 oben) lässt sich in einzelne Baugruppen mit unterschiedlichen thermodynamischen Eigenschaften einteilen, die in Tabelle 3.1 wiedergegeben sind. Im idealisiertem Modell wurde mittels der SAGE-Korrekturfaktoren  $FMult$  (Druckabfall) und  $HMult$  (Wärmeübertragung) ideales Verhalten angenähert, sowie die Oberflächen als isotherm bzw. adiabatisch modelliert. Tabelle 3.2 zeigt die von SAGE berechneten Energieflüsse an den Baugruppengrenzen für beide Modelle. Trotz idealisierter Komponenten erreicht das Modell nur einen Wirkungsgrad von ca. 93% ( $\dot{H}_{pt}^* - \dot{H}_{reg}^* = 11,2 \text{ W}$  Kühlleistung), was vermutlich an numerischen Ungenauigkeiten einerseits und andererseits an nicht ganz idealisierbaren Komponenten liegt.

Im idealen Pulsrohrkühler fließt die vom Kompressor erbrachte pV-Leistung ( $\dot{W}_{ein}$ ) als akustische Leistung in den Nachkühler. Da der Kompressor reversibel adiabatisch angenommen wurde, ist der Entropiefluss an dieser Grenze gleich null. Enthalpie und Exergie sind betragsmäßig gleich der akustischen Leistung, da im Kompressor kein Wärmetausch stattfindet.

Der Nachkühler wandelt den vom Kompressor kommenden Enthalpiefluss in Wärme um und gibt diesen an die Umgebung ab. Dieser Wärmeübertrag führt gleichzeitig dazu, dass der vom Regenerator kommende Entropiefluss  $-T\dot{S}^*$  auf Null reduziert wird. Der Exergiefluss wird durch diese Vorgänge nicht berührt, weil im idealen Wärmetauscher keine irreversible Entropie erzeugt wird und der Wärmeübertrag bei Raumtemperatur  $T_w$  (siehe Gleichung 3.12) stattfindet.

Tabelle 3.2: Energieflüsse an den Baugruppengrenzen des PT-08 Modells.

Baugruppe					
Energiefluss (real / ideal)	$\dot{W}^*$ (W)	$\dot{H}^*$ (W)	$\dot{\Xi}^*$ (W)	$-T\dot{S}^*$ (W)	$-T_w\dot{S}^*$ (W)
Kompressor/ Nachkühler	38.2 / 45.2	29.0 / 45.2	38.7 / 45.0	9.9 / -0.2	9.7 / -0.2
Nachkühler/ Regenerator	37.2 / 44.8	2.2 / 0.2	36.9 / 44.9	34.7 / 44.7	34.7 / 44.7
Regenerator/ kalter Wärmetauscher	7.9 / 11.9	2.2 / 0.2	23.8 / 44.0	5.8 / 11.7	21.6 / 43.8
kalter Wärmetauscher/ Pulsrohr	7.4 / 11.8	5.3 / 11.4	13.3 / 11.9	2.1 / 0.1	8.0 / 0.5
Pulsrohr/ warmer Wärmetauscher	7.4 / 11.8	5.3 / 11.5	11.8 / 11.8	2.0 / 0.3	2.0 / 0.3
warmer Wärmetauscher/ Inertance	7.0 / 11.6	2.3 / -0.2	7.1 / 11.6	4.8 / 11.8	4.8 / 11.8

Der Regenerator hat mehrere Aufgaben. Zum einen dient er als isothermes Element im Kreisprozess. Im idealen Pulsrohrkühler ist deshalb wegen  $\dot{H}^* = c_p \dot{m} \Delta T$  der Enthalpiefluss im Regenerator gleich null.  $\Delta T$  ist dabei die Amplitude der Gasttemperaturoszillation im Regenerator. Zum anderen transportiert der Regenerator die am kalten Ende erzeugte Entropie zum Nachkühler. Aufgrund der ansteigenden Temperatur in Richtung Nachkühler steigt auch der mit der Entropie verbundene Energiefluss. Die vom warmen Ende her kommende akustische Leistung nimmt aufgrund des Temperaturgefälles und des damit verbundenen Anstiegs der Gasdichte proportional zur  $T/T_w$  ab. Da im zeitlich Mittel weder Wärme ausgetauscht noch irreversibel Entropie erzeugt wird, bleibt nach Gleichung 3.12 der Exergiefluss im Regenerator konstant.

Der kalte Wärmetauscher nimmt Wärme vom zu kühlenden Objekt auf, was zu einer entsprechenden Erhöhung des Enthalpieflusses in Richtung Pulsrohr führt. Gleichzeitig erzeugt dieser Wärmefluss Entropie (im idealen Fall  $\dot{S} = \dot{Q}_k/T_k$ ), die in Richtung Nachkühler abfließt. Im Gegensatz zum Nachkühler nimmt der Exergiefluss ab, da die Wärme bei einer niedrigeren Temperatur ausgetauscht wird. Wie schon im Nachkühler wird die akustische Leistung beim Durchgang durch den Wärmetauscher nicht reduziert.

Das Pulsrohr dient als adiabatisches Bauelement im Kreisprozess. Weil hier keine Wärme ausgetauscht wird, bleiben der Enthalpie- und der Entropiefluss konstant. Die akustische Leistung nimmt im Gegensatz zum Regenerator trotz des Temperaturgradienten nicht zu, da

sich der Massenfluss um den entsprechenden Faktor verringert. Weil sich die erstgenannten Energieflüsse nicht ändern, ändert sich somit auch der Exergiefluss nicht.

Im warmen Wärmetauscher wird der vom Pulsrohr kommende Enthalpiefluss in Wärme umgewandelt und an die Umgebung abgegeben. Da dies bei Raumtemperatur geschieht, hat dies keinen Einfluss auf den Exergiefluss und die akustische Leistung. Die dabei dem Gas entzogene Entropie  $\dot{S} = \dot{Q}_w/T_w$  muss von der anschließenden Inertance-Leitung geliefert werden.

In der Inertance-Leitung und im Puffervolumen wird die verbleibende akustische Leistung in Entropie umgewandelt, die in Richtung des warmen Wärmetauschers fließt. Durch den Druckhubabfall wird dabei auch Exergie vernichtet, was der Hauptgrund dafür ist, dass der ideale Pulsrohrkühler nicht den Carnot-Wirkungsgrad erreichen kann. Am Ende des Puffervolumens ist der Massenfluss gleich null und somit auch alle Energieflüsse.

Im realen Pulsrohrkühler laufen die Prozesse in den Wärmetauschern nicht abrupt ab, sondern kontinuierlich, wie in Abbildung 3.11 unten zu sehen. Im realen Regenerator ist der Enthalpiefluss von null verschieden, weil die Temperaturosillationen des Gases nie ganz unterdrückt werden können. Sowohl der Temperaturunterschied zwischen Gas und Matrix als auch der Druckamplitudenverlust erzeugen in allen Komponenten irreversible Entropie, die vom Kompressor zusätzlich erbracht werden muss, bzw. die die Kühlleistung senkt. Dies wird besonders im Exergiefluss deutlich, der im Gegensatz zum idealen Modell im Regenerator stark abfällt.

Abbildung 3.12 zeigt die irreversible Entropieerzeugung durch Wärmeübertragung und Druckamplitudenverlust im Regenerator nach Gleichung 3.18 und Gleichung 3.19. Man erkennt, dass am warmen Ende der Verlust primär durch den Druckhubabfall hervorgerufen wird, der zum kalten Ende hin abnimmt. Dies liegt einerseits daran, dass aufgrund der Gasdichtezunahme die Gasgeschwindigkeit abnimmt (Massenerhaltung) und andererseits an der Viskositätsabnahme (siehe Abbildung 3.4) des Arbeitsgases. Die Verluste durch unvollständigen Wärmeübertrag steigen dagegen aufgrund des schlechter werdenden Wärmeübergangs langsam an. Die numerische Integration ergibt für den gesamten Regenerator einen Verlust von ca. 10 W durch Druckverlust und ca. 2 W durch Wärmeübertrag. Obwohl die Entropieerzeugung durch axiale Wärmeleitung vernachlässigt wurde, stimmt dieser Betrag bereits gut mit dem Exergieverlust in Abbildung 3.11 unten überein.

### 3.4 Kühlerverluste

Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, lassen sich die Kühlerverluste durch Ermittlung der erzeugten Entropie nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik (Gleichung 3.10) abschätzen.

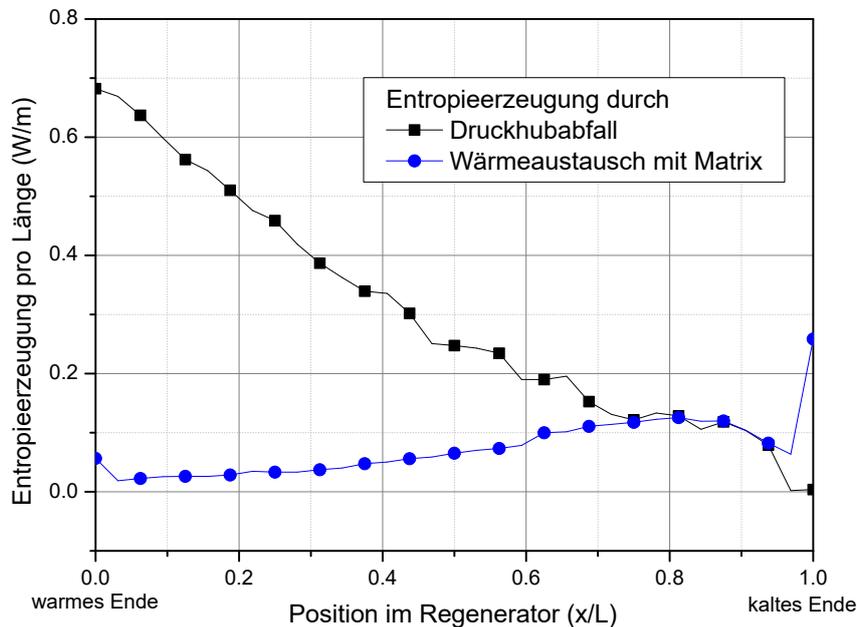


Abbildung 3.12: Entropieerzeugung  $T_{ref} * \dot{S}_{gen}$  im PT-08 Regenerator nach Gleichungen 3.18 und 3.19 für  $T_{ref}=300$  K.

Oft ist es jedoch schwierig alle Quellen von Entropie mit einzubeziehen. Deshalb werden Verluste bevorzugt mit Hilfe des 1. Hauptsatzes (Gleichung 3.8) ermittelt, indem über Wärmeflüsse die Änderung der Enthalpie berechnet wird. Im Folgenden wird deshalb auf Verluste durch Wärmeleitung und parasitäre Pulsrohrströmungen (siehe Abbildung 3.1) eingegangen.

## Wärmeleitung

Die Wärmeleitung ist ein Verlustmechanismus, der vor allem bei kleineren Kühlern eine Rolle spielt, weil in diesem Fall der Anteil der Wärmeleitung im Vergleich zur Kühlleistung groß ist. Wärmeleitung tritt an verschiedenen Stellen im Kaltkopf auf:

- Wände von Pulsrohr und Regenerator
- Regeneratorsiebe
- Arbeitsgas

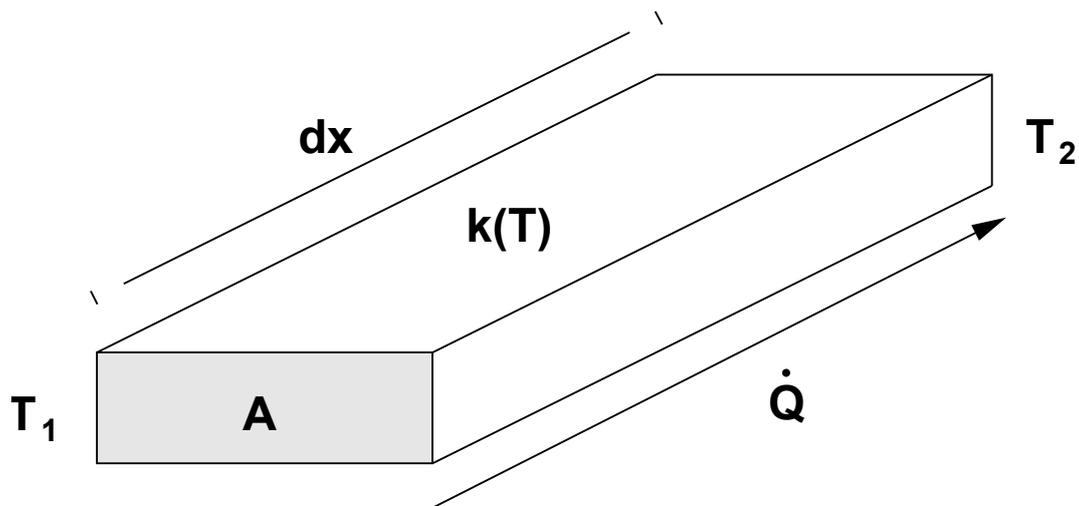


Abbildung 3.13: Wärmeleitung entlang eines Vierkantstabes.

Die Wärmeleitung über die Wände ( $x$ -Richtung) lässt sich anhand der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{Q} = k(x) \frac{dT(x)}{dx} A \quad (3.20)$$

ermitteln. Dabei ist zu beachten, dass die Wärmeleitfähigkeit  $k$  und der Temperaturgradient  $\frac{dT}{dx}$  von der jeweiligen Position im Kaltkopf abhängen. Abbildung 3.13 zeigt ein Volumen mit der Stirnfläche  $A$  im Abstand  $dx$  über dem ein Temperaturunterschied  $dT = T_2 - T_1$ ,  $T_2 < T_1$  besteht. Dieser führt zu einem Wärmefluss  $\dot{Q}$  in Richtung kaltes Ende.

Die Pulsrohrwand steht in Kontakt mit dem Arbeitsgas. Dadurch kann auch über diese Verbindungsstelle Wärme ausgetauscht werden. Aufgrund des Wärmepumpeffektes [25] (vgl. Abschnitt 3.1) kann es deshalb vorkommen, dass der Wärmefluss dort effektiv reduziert oder sogar seine Richtung umgekehrt ist. Im Regenerator wird in der Regel kein solcher Wärmefluss angenommen, da die dafür notwendige Temperaturoszillation im Arbeitsgas sehr klein ist.

Zur Berechnung der Wärmeleitung über die Matrix des Regenerators wird aufgrund der Geometrie (z.B. Siebe oder Kugelschüttungen) eine im Vergleich zum Vollmaterial reduzierte Wärmeleitfähigkeit angenommen. Um diese zu berücksichtigen, wird dazu in der Regel ein Korrekturfaktor eingeführt. Außerdem ist die Wärmeleitfähigkeit im Fall von Sieben anisotrop, d.h. für die radiale Wärmeleitfähigkeit gilt ein anderer Korrekturfaktor als für die axiale Wärmeleitfähigkeit. Während sich die radiale Wärmeleitfähigkeit leicht herleiten lässt, ist im Falle der axialen Wärmeleitfähigkeit eine theoretische Herleitung schwierig. Deshalb werden

hier in der Regel empirisch gewonnene Daten verwendet [62]:

$$\begin{aligned}
 k_{radial} &= (1 - \beta) k_s / c_r \\
 c_r &= 4/\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4(1 - \beta)^2 \sin^2 z} dz
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 k_{axial} &= (1 - \beta) k_s / c_a \\
 c_a &= 1 + 10.2 \beta^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Dabei ist  $k_s$  die Wärmeleitfähigkeit des Vollmaterials und  $\beta$  die Porosität der Siebmatrix.  $c_r$  und  $c_a$  sind Korrekturfaktoren, die die Sinusform der Flechtung, die Winkelabhängigkeit und die Reduzierung der Wärmeleitfähigkeit durch Kontaktwiderstände von Sieben berücksichtigen. Die Korrekturfaktoren für die axiale Wärmeleitung werden ständig weiterentwickelt [63, 64] und in SAGE integriert. Der oben aufgeführte Faktor für die axiale Wärmeleitung gilt für die in dieser Arbeit verwendete Version 3. Für die radiale Wärmeleitung wurde noch kein automatischer Korrekturfaktor eingebaut, d.h. dieser musste manuell im Programm eingegeben werden.

Die molekulare Wärmeleitung im Arbeitsgas wird durch Gasvermischungen, die durch Turbulenz oder Strömungen verursacht werden, erhöht. Auch hier wird mittels eines empirisch gefundenen Parameters die Wärmeleitung  $k$  in der Wärmeleitungsgleichung 3.20 für verschiedene durchströmte Körper angepasst. Im Vergleich zur Wärmeleitung über eine Matrix ist die über das Gas in der Regel um Größenordnungen kleiner. Eine Ausnahme stellt allerdings das Pulsrohr dar.

### Pulsrohrverluste

Das Pulsrohr erfährt in SAGE eine spezielle Behandlung, da der hydraulische Radius in der Regel viel größer als die thermische bzw. viskose Grenzschicht ist. In Verbindung mit einem Temperaturgefälle führt dies zu weiteren Verlusten, die in anderen Komponenten nicht auftreten (vgl. Abschnitt 3.1). Dazu gehören die:

- freie Konvektion
- Grenzschicht-Konvektion
- strömende Konvektion

Der Effekt der freien Konvektion tritt unter Anwesenheit eines Gravitationsfeldes auf. Untersuchungen hierzu wurden erstmals von Thummes et. al. an einem niederfrequent arbeitenden GM-Typ-Pulsrohr Kühler durchgeführt [65]. Die Schwerkraft führt dazu, dass Gaspartikel im

Pulsrohr in Richtung Erdmittelpunkt abgelenkt werden, wodurch eine zirkulare Strömung entsteht, die Wärme zum kalten Ende hin transportiert. Die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern sind im Vergleich zu niederfrequenten GM-Typ-Pulsrohrkühlern unempfindlicher bezüglich freier Konvektion [66, 61]. Der Effekt wird zudem bei senkrechter Montage minimiert, wenn - wie in dieser Arbeit - das warme Ende des Pulsrohrs über dem kalten Ende liegt ( $0^\circ$  Position). Aus diesem Grund blieb dieser Effekt in allen Modellen unberücksichtigt.

Die Grenzschicht-Konvektion (engl. boundary convection) tritt nur im Bereich nahe der Pulsrohrwand auf. Sie ist dem im Basis-Typ Pulsrohrkühler auftretendem Wärmepumpeffekt (siehe Abschnitt 2.6) bzw. dem von Stirling- oder GM-Kühlern bekannten Pendelwärmeverlust (engl. shuttle heat loss) ähnlich [67]. Die in Amplitude und Phase unterschiedlichen Temperaturosillationen der Randschicht und der Pulsrohrmitte führen dabei zu einem Nettowärmetransport vom warmen zum kalten Ende des Pulsrohrs. Dieser Effekt spielt besonders bei kleinen Pulsrohrkühlern eine Rolle, da hier die Randschicht im Vergleich zum Pulsrohrdurchmesser relativ groß ist.

Das Auftreten einer sogenannten strömenden Konvektion (engl. streaming convection) rührt ebenfalls von einem Randschichteffekt her [43]. Der Wärmeaustausch der Randschicht mit der Pulsrohrwand bewirkt eine im Vergleich zum Arbeitsgas in der Pulsrohrmitte verschobene mittlere Gastemperatur an den Umkehrpunkten. Die nicht-lineare Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur (vgl. Abschnitt 3.1) führt zu einer veränderten Auf- und Abwärtsbewegung eines Gasteilchens in der Randschicht, die im zeitlichen Mittel eine Nettoverschiebung des Gasteilchens zum warmen oder kalten Ende hin bewirkt. Aufgrund der Massenerhaltung muss die gleiche Menge Gas in der Pulsrohrmitte in entgegengesetzter Richtung strömen. Es entsteht eine zirkulare Strömung, die Energie vom warmen zum kalten Ende transportiert und deshalb einen zusätzlichen Verlust darstellt.

Weil SAGE nur über ein eindimensionales Rechengitter verfügt, kann es die oben genannten, zweidimensionalen Verluste nur mittels vereinfachter Gleichungen annähern.

## **Regeneratorineffizienz**

Der Regenerator im Pulsrohrkühler dient als Wärmespeicher. Im idealen Regenerator erleidet die durch ihn laufende Druckwelle keinen Amplitudenverlust, sodass die gesamte akustische Leistung im Pulsrohr zur Verfügung steht. Aufgrund der hohen Wärmekapazität verschwinden im Idealfall die Temperaturosillationen des Arbeitsgases. Dazu muss die Regeneratormatrix eine hohe Wärmekapazität und gleichzeitig einen guten Wärmeübergang besitzen. Weiterhin sollte der Regenerator eine niedrige axiale Wärmeleitung aufweisen, um Wärmeleitungsverluste zu verhindern. Das Totvolumen hat nur einen indirekten Effekt auf die Regeneratoreffizienz,

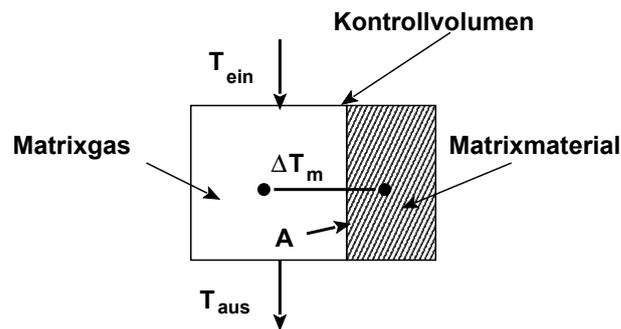


Abbildung 3.14: Illustration zur Berechnung der Anzahl der Übertragungseinheiten  $NTU$ .

da es bei gleicher akustischer Leistung am kalten Ende zu einer Erhöhung des Massenflusses am warmen Ende und damit zu einer zusätzlichen thermischen Belastung des Regenerators bzw. einem zusätzlichen Druckhubabfall führt.

Zur Charakterisierung von Regeneratoren wird oft die thermische Effektivität verwendet. Man betrachtet dabei nur ein kleines Regeneratorelement und definiert als thermische Effizienz

$\varepsilon_{th}$ :

$$\varepsilon_{th} := \frac{NTU}{NTU + 1}$$

mit

$$\begin{aligned} NTU : &= \frac{T_{aus} - T_{ein}}{\Delta T_m} \\ &= \frac{\alpha A}{c_p \dot{m}}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $T_{aus}$  bzw.  $T_{ein}$  die mittlere Gastemperatur beim Aus- bzw. Eintritt in das Element.  $\Delta T_m$  ist die mittlere Temperaturdifferenz zwischen Matrix und Gas während eines halben Zyklus und  $A$  die vom Gas benetzte Matrixfläche mit dem Wärmeübertragskoeffizienten  $\alpha$ .  $NTU$  ist die Anzahl der Übertragungseinheiten (engl. Number of Heat Transfer Units). Abbildung 3.14 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Da die thermische Effektivität in der Regel Werte von über 99% erreicht (im Fall des in Abschnitt 3.3 vorgestellten PT-08 Kaltkopfes ist  $\varepsilon_{th} = 0.999366$ ), verwendet man stattdessen oft die thermische Ineffektivität  $1 - \varepsilon_{th}$ .

Da die thermische Ineffektivität nur einen Teil des Verlustes darstellt und gerade bei Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern der Druckhubverlust eine nicht geringe Rolle spielt, führt Rühlich in [68] zur Bestimmung der Regeneratoreffizienz den Quotienten  $NPH/NTU$  ein.  $NPH$  ist die "Anzahl Staudrücke Druckverlust" (engl. Number Pressure Heads Pressure Drop) und wird aus dem Quotient aus Druckhubabfall  $\Delta p$  und Staudruck  $\frac{1}{2}\rho u^2$  berechnet, was man auch als Verhältnis von Druckhubabfall zur übertragenen Energie verstehen kann.

Eine weitere Methode zur Bestimmung der Regeneratoreffizienz führt über die in Abschnitt 3.2 erläuterte Exergie. Im Unterschied zur Definition von Rühlich [68] ist diese durch das SAGE-Modell leichter zugänglich und die Definition der Effizienz ist nicht auf ein kleines Volumen beschränkt. Außerdem lassen sich Wärmeleitungsverluste besser integrieren. Im idealen Regenerator ändert sich der Exergiefluss nicht, sodass man die Regeneratoreffizienz wie folgt definieren kann:

$$\eta_{Reg} := \frac{\dot{\Xi}_{aus}^* - \dot{H}_{reg}^* - \dot{Q}_{loss}}{\dot{\Xi}_{ein}^*}. \quad (3.23)$$

$\dot{\Xi}_{ein}^*$  und  $\dot{\Xi}_{aus}^*$  sind die Exergieflüsse in und aus dem Regenerator,  $\dot{H}_{reg}^*$  der Enthalpiefluss im Regenerator und  $\dot{Q}_{loss}$  die Wärmeleitungsverluste (z.B. über die Rohrwand (PT-08: 448 mW), die Matrix (PT-08: 18 mW), Arbeitsgas oder Verluste durch konvektive Strömungen (für PT-08 nicht berücksichtigt)). Im Falle des oben beschriebenen PT-08 Kaltkopfes ergibt sich damit für den Regenerator eine exergetische Effizienz nach Gleichung 3.23 von  $\eta_{Reg} \approx 0.57$  (vgl. Tabelle 3.2).

## 4 Simulationsverfahren

### 4.1 Allgemeines

Das Verhalten des Arbeitsgases eines Pulsrohrkühlers wird im Allgemeinen durch drei Differentialgleichungen aus der Fluidodynamik und einer geeigneten Gaszustandsgleichung beschrieben. In der Literatur gibt es einige unterschiedliche Darstellungen dieser Gleichungen (vgl. [69]). Da dieser Abschnitt einen Schwerpunkt auf deren Lösung mittels finiter Differenzen legt, werden diese Gleichungen hier für ein kompressibles Newtonsches Gas in differentieller Form wiedergegeben wie sie u.a. in [60] zu finden sind. In dieser Form beschreiben sie die Erhaltungssätze für Kontinuität, Impuls und Energie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \rho \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{v}) = -\nabla \cdot (p \vec{v} - k \nabla T - \vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (4.3)$$

mit den Zustandsvariablen  $\rho$  für Dichte,  $\vec{v}$  für den Geschwindigkeitsvektor ( $\vec{v} = (u, v, w)$ ),  $p$  für den Druck,  $T$  für die Temperatur,  $e = \varepsilon + |\vec{v}|^2/2$  für die massenspezifische Gesamtenergie eines kompressiblen Gases und  $k$  für die Wärmeleitfähigkeit.  $\boldsymbol{\sigma} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{v} \right) + \xi \nabla \cdot \vec{v}$  ist der viskose Spannungstensor der aus einer 3x3 Matrix besteht und die viskosen Verluste im Fluid beschreibt. Die Größen  $\mu$  und  $\xi$  sind die erste und die zweite dynamische Viskosität des Arbeitsgases. Die Impulsgleichung (Gleichung 4.2) wird manchmal auch Navier-Stokes-Gleichung (NSE) genannt.

Der Zustand eines Gases wird durch zwei Messgrößen eindeutig definiert. Dies können z.B. der Druck und das Volumen oder die Dichte und die Temperatur sein. Die restlichen Größen werden dann durch eine Gaszustandsgleichung beschrieben. Da es keine allgemeingültige Zustandsgleichung gibt, wird je nach Gasart und Temperaturbereich eine andere Näherung verwendet. So verhält sich Helium oberhalb von 100 Kelvin und bei Drücken unterhalb von 50 bar in guter Näherung wie ein ideales Gas, sodass oft die ideale Gasgleichung  $p = \rho R_{gas} T$  mit der massenspezifischen inneren Energie  $\varepsilon = c_v T$  gewählt wird.  $c_v = konst.$  ist dabei die spezifische Wärmekapazität und  $R_{gas}$  die spezifische Gaskonstante (für Helium gilt

$R_{He} = 2077 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ). Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität und die Wärmeleitung wird experimentell ermittelt und ist aus Tabellen oder Interpolationsformeln ersichtlich [70]. Bei niedrigeren Temperaturen bis etwa 10 Kelvin spielen die Kräfte zwischen den Gasmolekülen und deren Eigenvolumen eine stärkere Rolle, sodass diese nicht mehr wie beim idealen Gas vernachlässigt werden können. Hier wird dann meist eine Abwandlung der Van-der-Waals Gleichung (z.B. Virial, Redlich-Kwong oder Redlich-Kwong-Soave [71]) verwendet. Neuere Programmversionen als die hier verwendete Version 3 von SAGE benutzen auch Tabellen zwischen deren Einträgen interpoliert wird.

## 4.2 Analytische Methoden am Beispiel einer Inertance-Leitung

Die vollständigen Gleichungen der Fluidodynamik (siehe Gleichungen 4.1-4.3) lassen sich bislang nur numerisch lösen<sup>1</sup>. Eine analytische Lösung ist jedoch für einige Spezialfälle möglich. Das Verhalten von den in der Pulsrohrkühlertechnik gebräuchlichen Inertance-Leitungen (siehe Abbildung 3.1) lässt sich näherungsweise mit einer vereinfachten Form dieser Gleichungen beschreiben, was im Nachfolgenden anhand einer einzelnen Inertance-Leitung kurz skizziert wird. Ziel ist es hierbei die Flussimpedanz  $Z$  einer Inertance-Geometrie zu bestimmen, damit zu einer vorgegebenen akustischen Leistung die optimale Phasenverschiebung zwischen Druckwelle und Massenfluss gefunden werden kann.

Unter Zuhilfenahme der Definition der massenspezifischen Gesamtenergie  $e = h - p/\rho = c_p T - p/\rho$  erhält man zunächst eine weitere Darstellung der Energiegleichung 4.3, die auch als allgemeine Wärmeleitungsgleichung für Fluide bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{v}) &= -\nabla \cdot (p \vec{v} - k \nabla T - \vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ \frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_p T \vec{v}) &= -\nabla \cdot (-k \nabla T - \vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Unter Annahme einer zylindrischen Geometrie wie in einem Rohr mit  $x$  als Längsachse und  $r$  senkrecht dazu, der eindimensionalen Gasgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung  $u$ , sowie eines

<sup>1</sup>Die Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen gehört zu den sogenannten sieben "Millennium-Problemen" der Mathematik, auf die das Clay Mathematics Institute in Cambridge, Massachusetts (USA) einen Preis von einer Millionen Dollar ausgesetzt hat.

Ansatzes bis zur ersten Ordnung (akustische Näherung nach Rott [72])

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= p_m + \operatorname{Re}[p_1(x) \exp(i\omega t)] \\
 T(x, r, t) &= T_m(x) + \operatorname{Re}[T_1(x, r) \exp(i\omega t)] \\
 \rho(x, t) &= \rho_m(x) + \operatorname{Re}[\rho_1(x) \exp(i\omega t)] \\
 u(x, r, t) &= \operatorname{Re}[u_1(x, r) \exp(i\omega t)]
 \end{aligned}$$

lassen sich die Gleichungen 4.1, 4.2 und 4.4 auf

$$i\omega\rho_1 + \nabla_x(\rho_m u_1) = 0 \quad (4.5)$$

$$i\omega\rho_m u_1 = -\nabla_x p_1 + \mu \Delta_r u_1 \quad (4.6)$$

$$\rho_m c_p (i\omega T_1 + u_1 \nabla_x T_m) - i\omega p_1 = k \Delta_r T_1 \quad (4.7)$$

vereinfachen. Die akustische Näherung geht davon aus, dass sich der zeitliche Verlauf der Variablen in eine Fourier-Reihe entwickeln lässt. Der Index  $m$  bezeichnet dabei den nullten Koeffizienten bzw. den Durchschnittswert, der Index 1 die (komplexe) Amplitude der Grundwelle und höhere Indizes die Amplituden der ganzzahligen Vielfachen der Grundwellenfrequenz (Oberwellen). Eine Variable erster Ordnung wie z.B.  $\rho_1$  stellt dabei eine Kurzschreibweise für  $\operatorname{Re}[\rho_1 \exp(i\omega t)]$  dar. Im obigen Ansatz wurden nur Terme nullter und erster Ordnung berücksichtigt, d.h. Produkte von Variablen erster Ordnung wie  $u_1 \rho_1$  wurden vernachlässigt. Da außerdem in einer Inertance im Gegensatz zum Pulsrohr oder Regenerator in der Regel kein Temperaturgradient entlang der axialen Richtung  $x$  existiert, ist in diesem Fall der Term mit  $\nabla_x T_m$  in der Wärmeleitungsgleichung gleich null. Wird außerdem die Temperatur an der Rohrwand ( $r = R$ ) als konstant angenommen, sieht die über die Fläche des Rohres gemittelte Zwischenlösung dann wie folgt aus [60]:

$$\frac{\partial \dot{V}_1}{\partial x} + i\omega \frac{A}{\gamma p_m} [1 + (\gamma - 1) f_k] p_1 = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + i\omega \frac{\rho_m}{A} \frac{1}{1 - f_\mu} \dot{V}_1 = 0 \quad (4.9)$$

mit

$$f_{\mu,k} = \frac{2 J_1 [(i-1)R/\delta_{\mu,k}]}{J_0 [(i-1)R/\delta_{\mu,k}] (i-1)R/\delta_{\mu,k}}$$

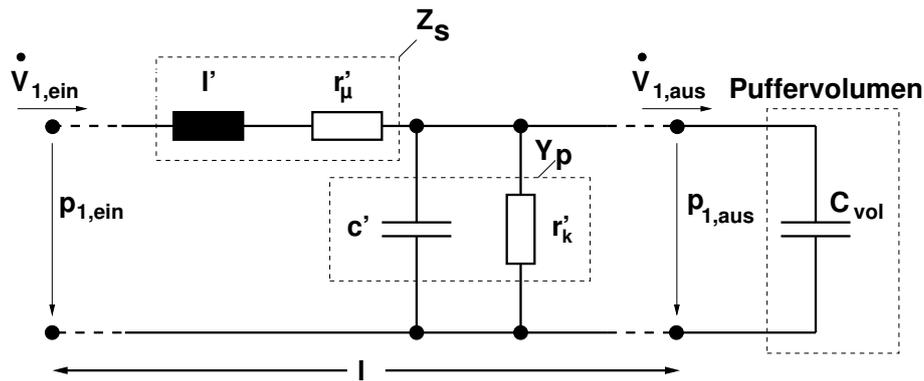


Abbildung 4.1: Elektrisches Ersatzschaltbild für ein infinitesimal kleines Stück einer Inertance-Leitung.

Dabei wurde  $c_p$  in Gleichung 4.7 durch

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_m}{\rho_m T_m}$$

ersetzt. Die thermische Eindringtiefe  $\delta_k$  ist gegeben durch Gleichung 3.1 und die viskose Eindringtiefe  $\delta_\mu$  durch Gleichung 3.2.  $J_0$  und  $J_1$  sind die Besselfunktionen nullter und erster Ordnung [73] und  $\gamma$  der Adiabatenkoeffizient. Anstelle der Gasgeschwindigkeit  $u_1$  wurde hier der Volumenfluss  $\dot{V}_1 = A u_1$  verwendet, da dies den folgenden Analogieschluss vereinfacht.

Die Gleichungen 4.8 und 4.9 ähneln den aus der Elektrotechnik bekannten Telegraphengleichungen, die die Wellenausbreitung entlang einer Zweidrahtleitung beschreiben [74]. Deswegen liegt es nahe, entsprechende Ausdrücke für Widerstand, Induktivität und Kapazität für die Anwendung in der Thermoakustik zu definieren. Das Ersatzschaltbild für ein infinitesimal kurzes Inertance Stück ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Pro Länge ergibt sich für die Serienimpedanz und Paralleladmittanz:

$$Z_s = i\omega \frac{\rho_m}{A(1 - f_\mu)} \quad (4.10)$$

$$Y_p = i\omega \frac{A}{\gamma p_m} [1 + (\gamma - 1)f_k]. \quad (4.11)$$

Im Grenzfall  $\delta_k, \delta_\mu \ll R$  gehen  $f_k \rightarrow 0$  und  $f_\mu \rightarrow 0$  wodurch sich die Gleichungen 4.10 und 4.11 erheblich vereinfachen. Die Eindringtiefen  $\delta_k$  und  $\delta_\mu$  betragen bei 60 Hz etwa 200  $\mu\text{m}$ , sodass diese Approximation bei Leitungsdurchmessern ab etwa einem Zentimeter gültig ist.

Die für die Dimensionierung wichtige akustische Impedanz  $Z = p_1/\dot{V}_1$  am Eingang einer Inertance-Leitung lässt sich zum Beispiel mittels Vierpol-Methode berechnen (vgl. [75, 44]).

Die allgemeine Vierpol-Gleichung einer einzelnen Inertance-Leitung lautet

$$\begin{pmatrix} p_{1, \text{ein}} \\ \dot{V}_{1, \text{ein}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{Z_s Y_p} l) & \sqrt{Z_s / Y_p} \sinh(\sqrt{Z_s Y_p} l) \\ \sqrt{Y_p / Z_s} \sinh(\sqrt{Z_s Y_p} l) & \cosh(\sqrt{Z_s Y_p} l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1, \text{aus}} \\ \dot{V}_{1, \text{aus}} \end{pmatrix}.$$

Da am Ausgang einer Inertance-Leitung in der Regel ein nahezu adiabatisches Volumen mit der akustischen Kapazität  $C_{\text{vol}} = \frac{V_{\text{vol}}}{\gamma p_m}$  mit der Phasenverschiebung  $90^\circ$  und der Impedanz  $Z_{\text{vol}} = 1/(i\omega C_{\text{vol}})$  angeschlossen wird, ergibt sich die Eingangsimpedanz der Inertance-Volumen-Kombination zu

$$Z_{\text{ein}} = \frac{Z_{\text{vol}} \cosh(\sqrt{Z_s Y_p} l) + \sqrt{Z_s / Y_p} \sinh(\sqrt{Z_s Y_p} l)}{Z_{\text{vol}} \sqrt{Y_p / Z_s} \sinh(\sqrt{Z_s Y_p} l) + \cosh(\sqrt{Z_s Y_p} l)}. \quad (4.12)$$

Andere Ansätze fügen weitere Verlustfaktoren hinzu, sodass dieses Modell nur ein stark vereinfachtes Bild der Realität wiedergibt. So geht der oben vorgestellte Ansatz von der idealisierten Bedingung aus, dass das Arbeitsgas an der Rohrwand "haftet". In der Realität treten aber Ablösungserscheinungen auf, die u.a. von der Rohrrauigkeit abhängen. Des Weiteren werden nicht alle viskosen Verluste und keine Effekte höherer Ordnung mit eingeschlossen. In manchen Modellen werden deshalb  $f_k$  und  $f_v$  gleich null gesetzt und stattdessen ein zusätzlicher Serienwiderstand eingeführt, dessen Größe empirisch ermittelt wird [76]. Die so ermittelten Impedanzen geben allerdings nur ein eingeschränktes Bild der zugrunde liegenden experimentell untersuchten Anordnungen (Länge, Durchmesser und Rauigkeit der Rohrleitung, Massenflüsse, Frequenz, Temperaturen und Ein- und Austrittseffekte) wieder. Außerdem hängt die Größe des Serienwiderstandes in der Regel von der Reynoldszahl ab, sodass die Impedanz nur noch bei vorgegeben Volumenfluss oder iterativ berechnet werden kann.

Abbildung 4.2 vergleicht die mittels SAGE und mittels Gleichung 4.12 berechneten Phasenverschiebungen ( $\arg(Z_{\text{ein}}) = \arg(\dot{m}_{1, \text{ein}}) - \arg(p_{1, \text{ein}})$ ) zwischen Massenfluss ( $\dot{m}_1 = \rho_m \dot{V}_1$ ) und Druck  $p_1$  am Eingang der Inertance für verschiedene akustische Leistungen. Der Serienwiderstand entspricht dabei dem von SAGE verwendeten Reibungskoeffizienten mit deaktivierten Ein- und Austrittseffekten für Rohrleitungen [59]. Die Inertance-Leitung wurde mittels SAGE so optimiert, dass der Betrag der Phasenverschiebung maximal wird. Die ermittelte Inertancegeometrie (siehe Abbildung 4.3 und 4.4) wurde anschließend in Gleichung 4.12 eingesetzt und mit Hilfe des ebenfalls berechneten Massenflusses die Phasenlage bestimmt. Der Fülldruck beträgt 25 bar, die Arbeitsfrequenz 60 Hz und das Druckverhältnis  $P_r = (p_m + p_1) / (p_m - p_1)$  am Eingang der Inertance wurde auf 1,2 festgelegt. In der Abbildung erkennt man deutliche Abweichung zwischen der SAGE-Rechnung und der akustischen Näherung, weshalb letztere Methode zur Bestimmung der Inertancegeometrie nur bedingt geeignet ist. Des

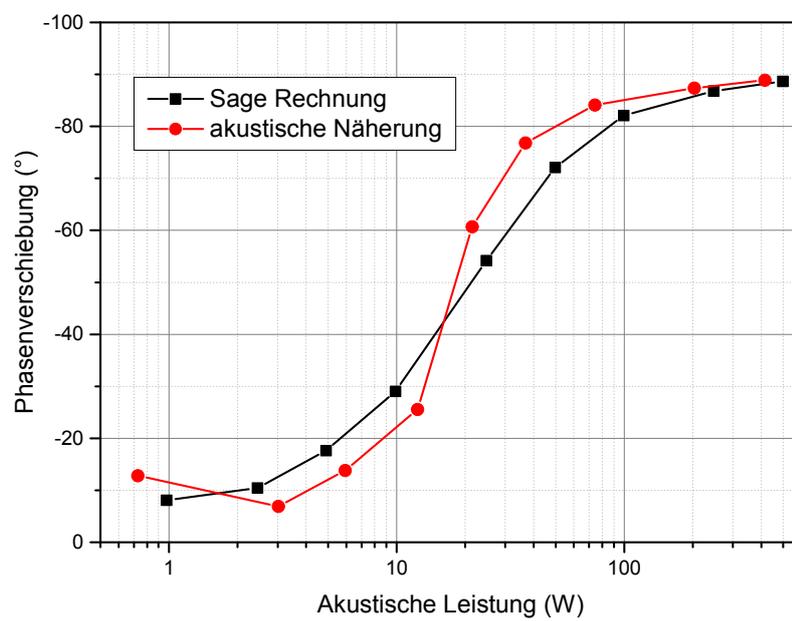


Abbildung 4.2: Vergleich der mit SAGE berechneten maximal möglichen Phasenverschiebung einer einzelnen Inertance-Leitung mit  $1 \text{ m}^3$  Puffervolumen und der bei gleicher Geometrie nach Gleichung 4.12 berechneten Phasenverschiebung. Mitteldruck: 25 bar, Frequenz: 60 Hz, Druckverhältnis: 1.2. Akustische Leistung am Eingang der Inertance.

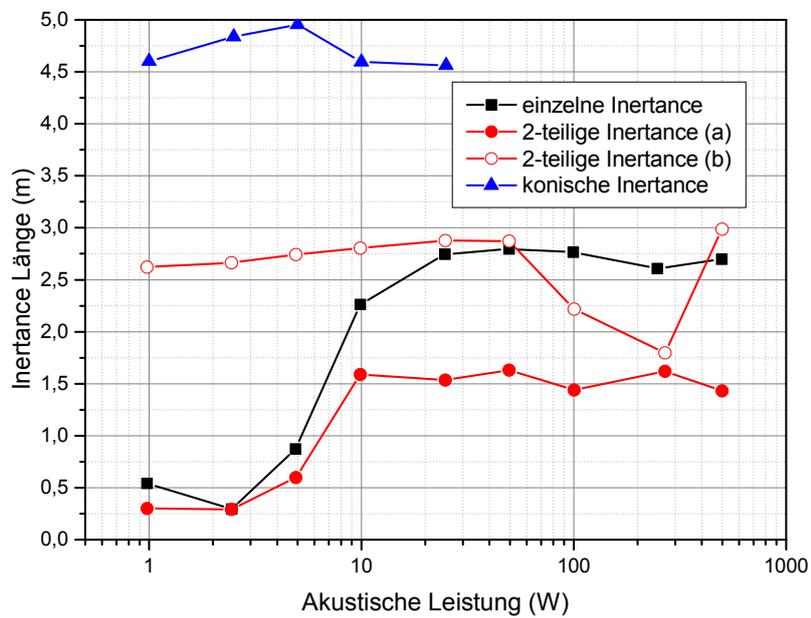


Abbildung 4.3: Längen der mit SAGE optimierten Inertance-Leitungen in Abhängigkeit der akustischen Leistung am Eingang der Inertance. (a) entspricht der Inertance-länge an der Pulsrohrseite und (b) der Inertancelänge an der Pufferseite.

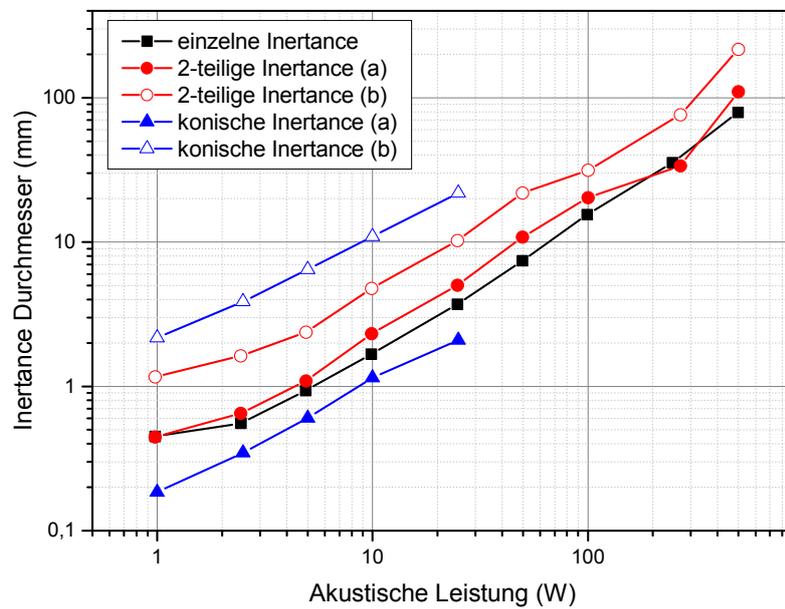


Abbildung 4.4: Durchmesser der mit SAGE optimierten Inertanceleitungen. (a) entspricht dem Durchmesser an der Pulsrohrseite und (b) dem Durchmesser an der Pufferseite.

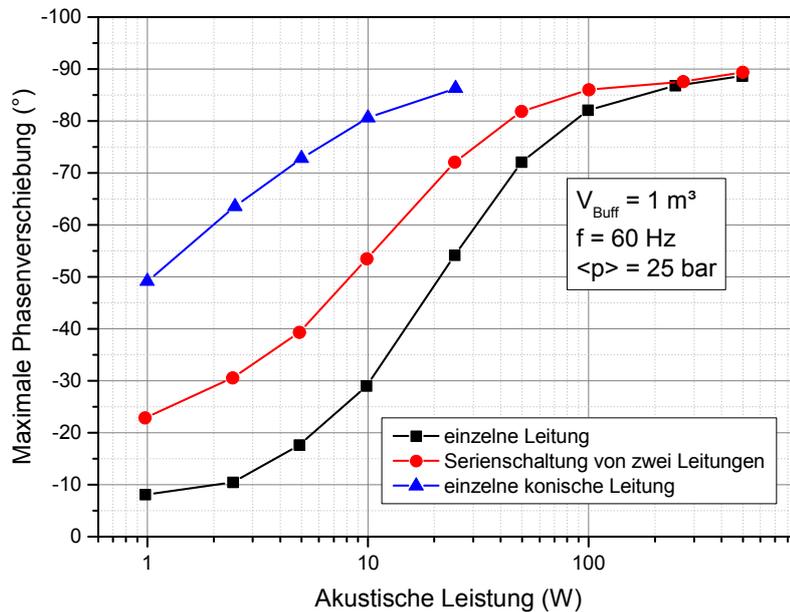


Abbildung 4.5: Maximal mögliche Phasenverschiebung für verschiedene Inertance-Typen (mit SAGE berechnet).

Weiteren zeigt die Abbildung, dass es mit einer einzelnen Inertance-Leitung bei akustischen Leistungen unter 30 W nicht mehr möglich ist, die optimale Phasenverschiebung von ca.  $-60^\circ$  einzustellen [77], da der resistive Anteil  $r'_\mu$  der Inertance (siehe Abbildung 4.1) dominiert. Deshalb kommen bei Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern mit geringer Eingangsleistung mehrstufige Inertance-Leitungen oder Double-Inlet-Typen zum Einsatz. Abbildung 4.5 vergleicht die maximale Phasenverschiebung, die mit einer ein- und zweiteiligen bzw. einer konischen Inertance-Leitung bei 60 Hz Arbeitsfrequenz erreicht werden kann. Dabei wurde ein quasi "unendlich großes" Puffervolumen von  $1 \text{ m}^3$  und 25 bar Fülldruck angenommen. Das ebenfalls vorgegebene Druckverhältnis von 1.2 ist typisch für einen Inertance-Typ-Pulsrohrkühler. Eine zweiteilige Inertance-Leitung besteht aus einer Serienschaltung von zwei einzelnen Inertance-Leitungen, wobei das direkt auf den warmen Wärmetauscher folgende Teilstück in der Regel einen kleineren Durchmesser hat und kürzer ist als das zweite Teilstück. Die konische Inertance beginnt ebenfalls mit einem kleinen Durchmesser am Pulsrohr und besitzt bis zum Puffervolumen einen linearen Anstieg der Querschnittsfläche. Man erkennt, dass bei einer zweiteiligen Inertance-Leitung die kritische akustische Leistung nur noch halb so groß ist, wie bei der einzelnen Inertance-Leitung, während die konische Inertance-Leitung bereits bei zwei Watt die gewünschte Phasenverschiebung erreicht. Inertance-Leitungen, die zu mehr als  $-60$  Grad Phasenverschiebung am Eingang der Inertance führen, können dazu

verwendet werden, das nötige Puffervolumen zu verringern.

Die obigen Rechnungsergebnisse zeigen, dass mit dem thermoakustischen Ansatz eine näherungsweise Beschreibung der Phasenverschiebung auf einer Inertance-Leitung möglich ist, aber doch quantitative Unterschiede zur genaueren numerischen Lösung mit SAGE vorhanden sind. Neben der näherungsweise Berechnung von Inertance-Leitungen können solche analytischen Lösungen auch dazu beitragen, physikalische Prozesse in thermoakustischen Maschinen zu verstehen. So lässt sich die Entstehung von parasitären Strömungen in Pulsrohren oder Regeneratoren mittels analytischer Lösungen höherer Ordnungen beschreiben (siehe Abschnitt 6 und [78, 79]).

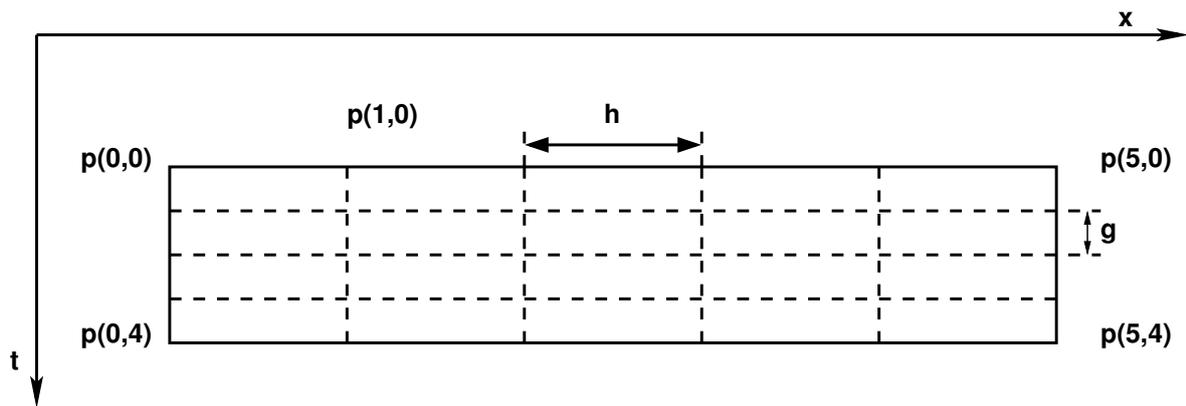


Abbildung 4.6: Unterteilung eines Volumens in kleine Kontrollvolumina. Die Gitterpunkte besitzen in jede Raumrichtung einen festen Abstand ( $h$  und  $g$ ). Der Druck  $p(i, j)$  wird an den Gitterpunkten berechnet.

### 4.3 Näherungslösungen mittels diskreter Lösungsansätze

Die im letzten Abschnitt vorgestellte analytische Methode lässt sich nur bei einfachen Problemstellungen (akustische Näherung, einfache Geometrie) anwenden. Sollen komplizierte Geometrien (Flussbegradiger, Ventile) oder komplexe Strömungen (Verwirbelungen, Gas-Festkörper-Wechselwirkungen, kompressible Strömung, Effekte höherer Ordnung) modelliert werden, kommen heute numerische Näherungen mittels diskreter Lösungsansätze zum Einsatz. Dazu wird der zu untersuchende Raumbereich (ggf. kommt noch ein Zeitabschnitt hinzu) in kleine Parzellen (Elemente oder Kontrollvolumen) geteilt. Die Kreuzungspunkte der Trennlinien werden Knoten genannt. Die eigentliche Lösung wird dann anhand von Polynom- oder Fourier-Reihen approximiert. Ziel ist es, ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  aufzustellen, das eine möglichst dünn besetzte Koeffizientenmatrix  $A$  besitzt. Dies erleichtert dann die spätere Berechnung mittels Standardlösungsverfahren auf dem Computer.

#### 4.3.1 Finite Differenzen Methode (FDM)

Bei der "Finite-Differenzen-Methode" werden die partiellen Ableitungen der Differenzialgleichungen (Gleichungen 4.5-4.7) an den Knoten des Rechengitters durch ihre Differenzenquotienten ersetzt. Wie in Abbildung 4.6 gezeigt, müssen die Knoten dabei in jede Raumrichtung feste Abstände  $h$  und  $g$  besitzen. Anschließend werden die gesuchten Variablen (z.B.  $u$ ,  $T$  und  $p$ ) an den Gitterpunkten durch eine Taylor-Reihe bis zum nächsten Nachbarpunkt dargestellt. Hierfür gibt es zunächst zwei Möglichkeiten, die anhand der Funktion  $p(x)$  im Eindimensionalen verdeutlicht werden sollen. Die Nachbarknoten  $x_{i\pm 1}$  von  $x_i$  können mit

Hilfe einer Taylorreihe genähert werden:

$$p(x_{i+1}) = p(x_i) + \frac{h}{1!} \frac{\partial p(x_i)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 p(x_i)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 p(x_i)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.13)$$

$$p(x_{i-1}) = p(x_i) - \frac{h}{1!} \frac{\partial p(x_i)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 p(x_i)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 p(x_i)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.14)$$

Eine erste Annäherung an den Differenzenquotienten erster Ordnung erhält man nun, indem man jeweils unter Vernachlässigung höherer Ordnungen nach  $\frac{\partial p(x_i)}{\partial x}$  umstellt:

$$\frac{\partial p(x_i)}{\partial x} = \frac{p(x_{i+1}) - p(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial p(x_i)}{\partial x} = \frac{p(x_i) - p(x_{i-1}))}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (4.16)$$

Je nachdem welche Nachbarpunkte man für die Interpolation nutzt, spricht man entweder vom *vorwärtigen* oder *rückwärtigen Differenzenquotienten*. Diese Form des Differenzenquotienten wird z.B. an den Rändern eines zu untersuchenden Volumens oder bei Zeitableitungen eingesetzt, da hier Nachbarpunkte nur in eine Richtung bekannt sind. Ähnlich wie bei der Zeitableitung verhält es sich auch bei den advektiven Termen in der Fluidodynamik, da hier durch die Strömungsrichtung eine Abhängigkeit der Variablen an den Gitterpunkten vorgegeben ist, weswegen man auch hier den vor- bzw. rückwärtigen Differenzenquotienten einsetzt (UpStream Verfahren). Den relativ großen Fehler in Gleichungen 4.15 und 4.16 kann man durch Subtraktion von Gleichung 4.13 von 4.14 verringern (Methode von Crank-Nicholson [80]). Dies führt auf den *zentralen Differenzenquotienten*

$$\frac{\partial p(x_i)}{\partial x} = \frac{p(x_{i+1}) - p(x_{i-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

mit der Fehlerordnung  $h^2$ . Ein ähnliches Verfahren kann auch für Ableitungen zweiter Ordnung und höher angewandt werden. Setzt man diese Näherungen in die zu lösende Differenzialgleichung ein, erhält man ein lineares Gleichungssystem mit unbekanntem Funktionswerten an den Gitterpunkten und bekannten Funktionswerten an den Rändern (Randbedingungen).

Ein weiterer Ansatz zur Bestimmung des Differenzenquotienten ist die Approximation mittels Potenzreihen. Legt man den Knoten  $x_i$  auf den Koordinatenursprung ( $x_i = 0$ ,  $x_{i+1} = h$ ,  $x_{i+2} = 2h$ ), so führt der Ansatz

$$\begin{aligned} p(x_i) &= Ax_i^2 + Bx_i + C = C \\ p(x_{i+1}) &= Ax_{i+1}^2 + Bx_{i+1} + C = Ah^2 + Bh + C \\ p(x_{i+2}) &= Ax_{i+2}^2 + Bx_{i+2} + C = 4Ah^2 + 2Bh + C \end{aligned}$$

nach dem Lösen auf

$$\begin{aligned} C &= p(x_i) \\ B &= \frac{-p(x_{i+2}) + 4p(x_{i+1}) - 3p(x_i)}{2h} \\ A &= \frac{p(x_{i+2}) - 2p(x_{i+1}) + p(x_i)}{2h^2}. \end{aligned}$$

Damit erhält man dann einen Ausdruck für den vorwärtigen Differenzenquotienten an der Stelle  $x_i = 0$ , allerdings mit einem Fehler der Ordnung  $h^2$ :

$$\left. \frac{\partial p(x_i)}{\partial x} \right|_{x_i=0} = 2Ax_i + B|_{x_i=0} = \frac{-p(x_{i+2}) + 4p(x_{i+1}) - 3p(x_i)}{2h}.$$

Im Allgemeinen lässt sich durch Einbeziehung weiterer Umgebungspunkte die Fehlerordnung reduzieren. Allerdings hat dies eine dichter besetzte Koeffizientenmatrix zur Folge, sodass der Rechenaufwand und der Speicherverbrauch bei der Lösung des Gleichungssystems steigt. Eine auch von SAGE benutzte Möglichkeit die Fehlerfortpflanzung zu reduzieren, liegt in der Verwendung eines "gestuften" oder "verschobenen" Gitters. Dabei werden nicht alle Variablen auf allen Knoten gelöst, sondern einzelne jeweils nur auf jedem zweiten. Für die anderen Knoten wird mit einem interpolierten Wert gerechnet. Dies hat effektiv eine numerische Dämpfung zur Folge, was das Oszillieren der Lösung reduziert und so schneller zur Konvergenz führt.

### 4.3.2 Finite Elemente Methode (FEM)

Ein Nachteil der Finiten Differenzen Methode besteht in der Voraussetzung äquidistanter Knotenpunkte. An Stellen komplizierter Strömungsgeometrien wie z.B. Ein- oder Austrittsströmungen treten deshalb größere Fehler auf, da sich das Gitter dort nicht lokal verdichten lässt. Diesen Nachteil beseitigt die Finite Elemente Methode, die hier kurz vorgestellt werden soll.

Ähnlich wie bei der FDM aus Abschnitt 4.3.1 wird der zu untersuchende Bereich in kleine Parzellen (Elemente) geteilt. Die Funktionswerte an den Knoten werden jedoch nicht durch Taylor-Reihen, sondern mittels gewichteter, stückweise definierter (finiter) Formfunktionen  $\Phi_i$  und den Koeffizienten  $c_i$  angenähert:

$$p(x) \approx p_N(x) := \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i(x).$$

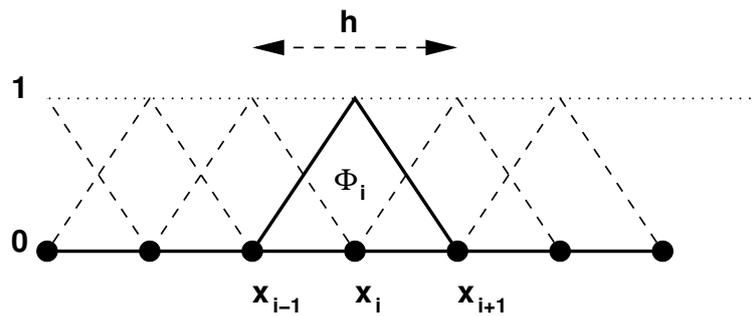


Abbildung 4.7: Eine einfache Formfunktion (Hütchenfunktion).

Die Formfunktionen sind dabei so beschaffen, dass sie an den Knoten den Wert eins besitzen und bis zum Nachbarknoten auf null abfallen. Die Lösung ergibt sich dann durch die Überlagerung der einzelnen Stücke. Eine einfache Formfunktion ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

Für die Bestimmung der unbekannt Koeffizienten  $c_i$  gibt es mehrere Verfahren, wobei die Methode der *gewichteten Residuen* eine der wichtigsten ist. Bei dieser Methode wird die einfache Differentialgleichung  $\hat{D}p_N(x) = f(x)$  auf die Form

$$R(\mathbf{c}, x) = \hat{D}p_N(x) - f(x)$$

gebracht, wobei  $\hat{D}$  ein Differentialoperator ist und  $p_N(x)$  die linke Seite und  $f(x)$  die rechte Seite der Differentialgleichung darstellt.  $\mathbf{c}$  ist ein Vektor, der aus den unbekannt Koeffizienten  $c_i$  besteht, und  $R(\mathbf{c}, x)$  ist das *Residuum*, welches z.B. durch Variation der Koeffizienten  $c_i$  zum Verschwinden gebracht wird.

Allerdings lassen sich nicht alle Differentialgleichungen, u.a. auch nicht die Navier-Stokes Gleichung, auf diese einfache Form bringen, sodass zunächst noch kompliziertere mathematische Umformungen nötig sind, weshalb einfache Computermodelle oft auf der Finite-Differenzen-Methode aufbauen.

#### 4.4 Glimps/Glop und Sage

SAGE ist eine Software zur Modellierung von periodisch schwingenden Systemen. Basierend auf einem einfachen Masse-Feder-Dämpfer Modell wurden im Zuge der Entwicklung Modelle für Stirling- und Pulsrohr-Kühler hinzugefügt. Der Computer-Code beruht auf einem zunächst nur text-basierten Gleichungslöser (GLIMPS) und einem Optimierer (GLOP) aus dem Jahr 1986 der von David Gedeon entwickelt wurde [81]. Im Jahr 1993 begann mit der Integration in eine graphische Oberfläche die Entwicklung von SAGE, welches im Jahr 1996 in der

Version 1.0 veröffentlicht wurde [54].

Intern arbeitet SAGE mit einer Finiten Differenz Methode (siehe Abschnitt 4.3.1) auf einem eindimensionalen Gitter. Für die "inneren" Punkte kommt dabei der zentrale Differenzenquotient und für die Randpunkte der Potenzreihenansatz zweiter Ordnung zum Einsatz. Bei der Zeitdiskretisierung nutzt SAGE die Periodizität der Lösung aus, indem es einen Fourierreihenansatz verwendet. Dies führt u.a. dazu, dass die Anzahl der berechneten harmonischen Amplituden der Hälfte der Zeitknoten entspricht (Nyquist-Theorem).

SAGE organisiert die einzelnen Bauelemente des Kühlers hierarchisch, d.h. ein Mutterelement (z.B. Regenerator) enthält Kindelemente (z.B. Matrix und Arbeitsgas). Eigenschaften des Mutterelementes (z.B. Durchmesser, Länge) werden an die Kindelemente "vererbt".

SAGE bietet zwei Möglichkeiten der Ergebnisausgabe. Zum Einen können die zeitlich und räumlich gemittelten Lösungen für Temperaturen, Wärmeflüsse, Druck, Massenfluss, usw. für jede Komponente in einer fortlaufenden Liste ausgegeben werden. Daneben besteht noch die Möglichkeit, Teile des zeitlich und räumlich aufgelösten Rechengitters für ausgewählte Komponenten als 2D-Tabelle (in Zeit und Raum) abzuspeichern. Für die letzte Methode wurde ein eigenes Programm (siehe Anhang 10.7) geschrieben, das die zur Verfügung gestellten Daten nutzt, um weitere thermodynamische Größen zu berechnen und darzustellen.

## 5 Sage-Modell des Hochleistungspulsrohrkühlers

### 5.1 Gesamtmodell

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, organisiert SAGE die einzelnen Kühlerkomponenten in einer Baumstruktur. Das Wurzelement beschreibt zunächst die Art der Baugruppe (z.B. Rohr, veränderbares Volumen oder Temperatursenke) und die äußeren Dimensionen. Die genaue Funktionsweise (z.B. Wärmetauscher, Regenerator oder Pulsrohr) wird in den tieferen Ebenen festgelegt. Die einzelnen Wurzelemente werden im Wurzelmodell entweder durch Wärmeflüsse ( $\dot{Q}$ ) und/oder Massenflüsse ( $\dot{m}$ ) miteinander verbunden.

Abbildung 5.1 zeigt die grafische Oberfläche von SAGE mit der Wurzel des Pulsrohrkühlermodells. Die einzelnen Baugruppen aus Abbildung 3.1 wurden hervorgehoben. Obwohl die Anordnung der Elemente keine Rolle spielt, wurden die Kühlerkomponenten in Reihenfolge von links oben (Kompressor) nach rechts unten (Puffervolumen) platziert.

### 5.2 Modellierung der Kühlerkomponenten

#### 5.2.1 Kompressor

Der Kompressor liefert die im Pulsrohr benötigte akustische Leistung, die letztendlich für den Wärmetransport vom kalten zum warmen Ende des Kühlers verantwortlich ist. Bei den hier untersuchten Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern wird diese in der Regel durch zwei gegenläufige Kolben erzeugt, was Vibrationen minimiert. Um eine optimale Übertragung von elektrischer in akustische Leistung zu erhalten, muss der Kompressor möglichst in mechanischer Resonanz betrieben werden. Diese liegt genau dann vor, wenn der Kolben sich in einem Phasenwinkel von  $90^\circ$  zum anregenden elektrischen Strom bewegt. Parameter, die den Resonanzpunkt hauptsächlich beeinflussen sind u.a. die Flussimpedanz des Kaltkopfes und die Auslegung der Kompressorkolben (schwingende Masse und Kolbendurchmesser). Näheres dazu findet sich z.B. in [82], [83] und [84]. Des Weiteren kann der Gasverlust durch den Spalt zwischen Kolben und Zylinder die Kompressoreffizienz stark verringern, sodass dieser ebenfalls mit modelliert werden sollte. Abbildung 5.2 zeigt die Hälfte eines Kompressor-Modells, wie es in SAGE erstellt wurde, bei dem zur besseren Übersicht die Gas- und Wärmeleitungsverbindungen weggelassen wurden.

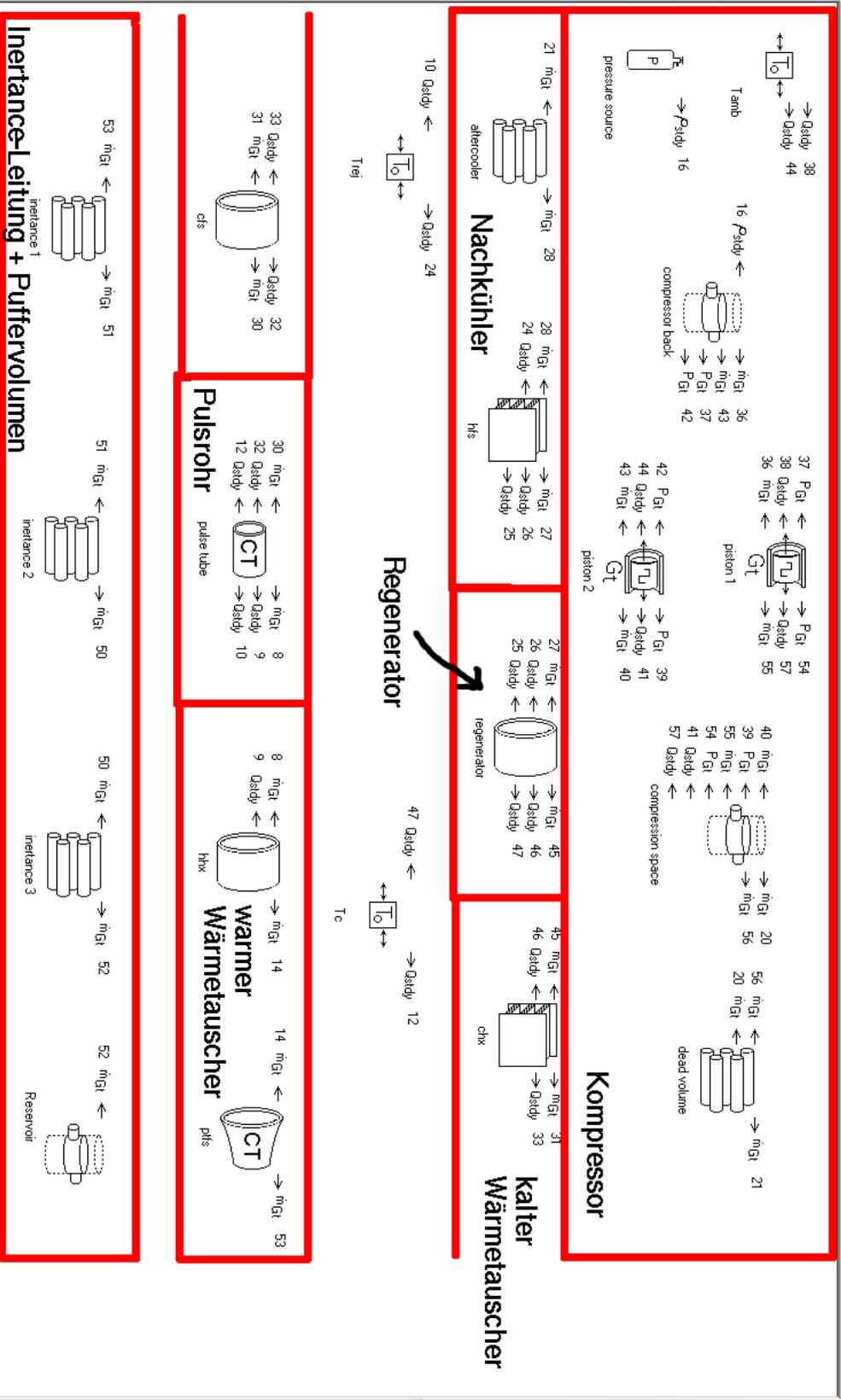


Abbildung 5.1: Modell des Hochleistungspulsrohrkühlers in SAGE 3.

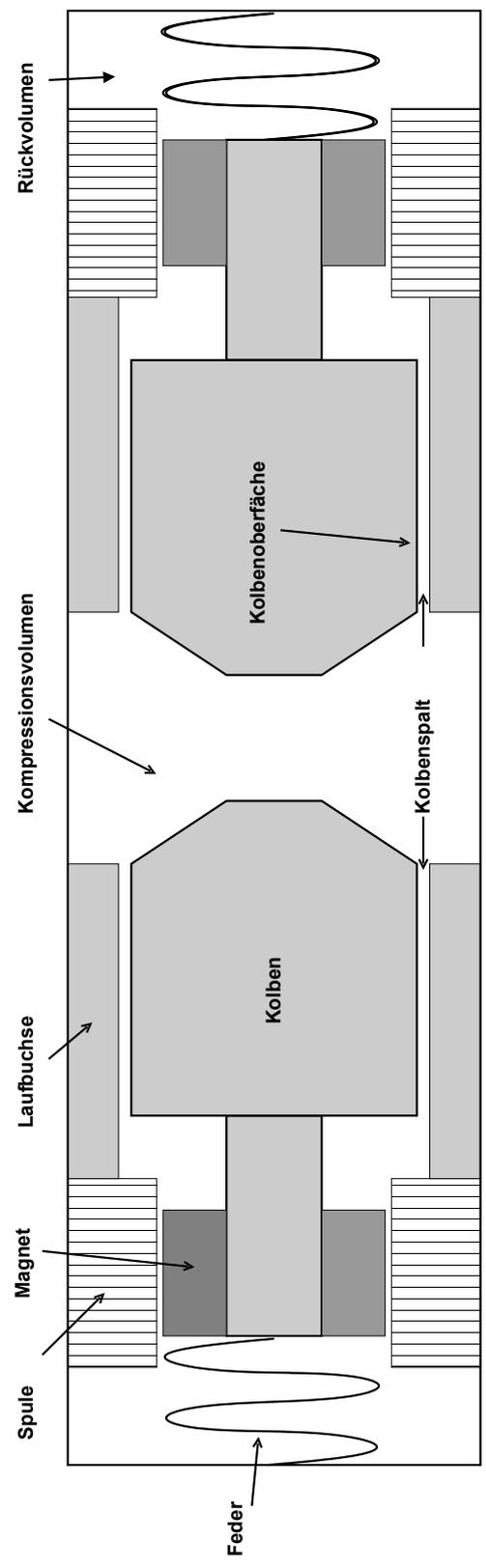
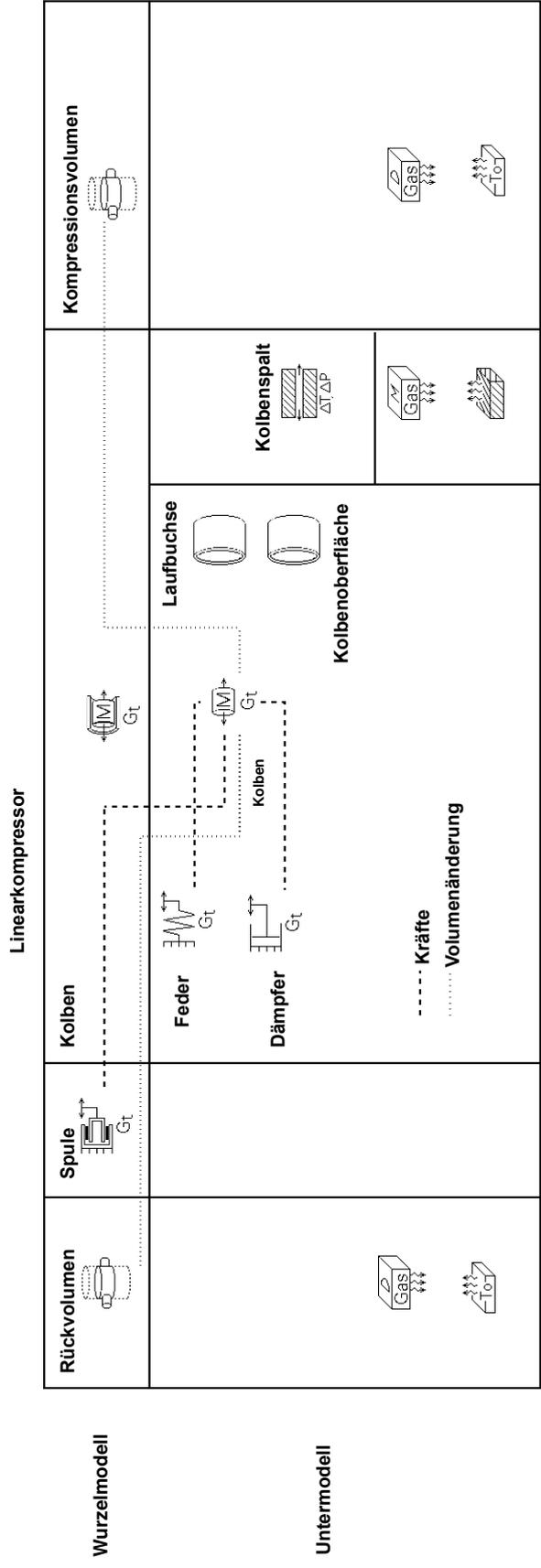


Abbildung 5.2: SAGE Modell eines Linearkompressors (nur ein Kolben gezeigt) und Schemazeichnung eines Doppelkolben-Linearkompressors.

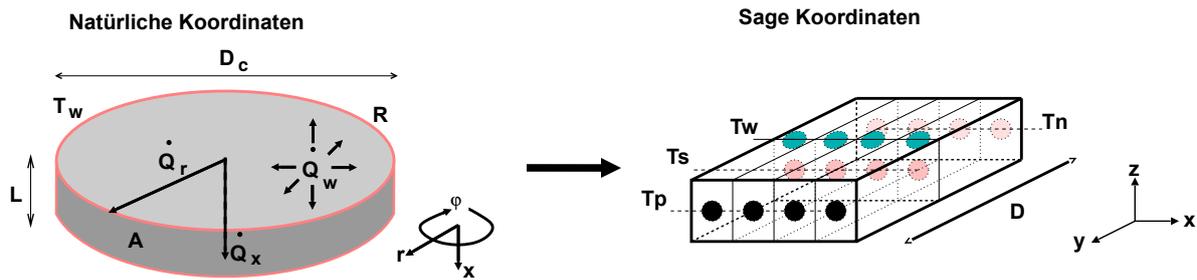


Abbildung 5.3: Schema eines wärmeleitenden Festkörpers in SAGE (siehe Text).

In der Praxis hat sich gezeigt, dass besonders bei den Linearkompressoren der Fa. CFIC Inc. ein relativ großes Anpassungsvolumen zwischen Kompressor und Kaltkopf eingefügt werden muss, um die Resonanzbedingung zu erfüllen. Da sich im Allgemeinen in der Kühler Designphase die Kaltkopfparameter (und somit auch die Flussimpedanz) stark ändern können, muss der Kompressor und ein eventuell nötiges Anpassungsvolumen im Modell berücksichtigt und gleichzeitig optimiert werden.

### 5.2.2 Nachkühler, Wärmeaustauscher

SAGE 3 unterscheidet zwischen ausschließlich wärmeleitenden und darüber hinaus zusätzlich wärmespeichernden Festkörpern (Modellelemente). Der Grund hierfür liegt in dem niedrigeren Rechenaufwand für rein wärmeleitende Modellelemente. Diese ermitteln den Wärmefluss anhand des zeitlich gemittelten Temperaturgradienten während wärmespeichernde Modellelemente auch die Wärmekapazität und die thermische Eindringtiefe berücksichtigen. SAGE definiert nur eine sehr allgemeine, an das kartesische Koordinatensystem angelehnte Geometrie, die durch entsprechende Parameter an reale Verhältnisse angepasst werden muss. So sind die meisten Komponenten in einem Pulsrohrkühler zylindrisch, sodass zunächst eine Umrechnung in das SAGE Koordinatensystem erfolgen muss. In Abbildung 5.3 ist ein Wärmeleiter aus der Sicht von SAGE dargestellt. Während die Oberfläche und die Länge in  $x$ -Richtung vom Wurzelobjekt abgeleitet werden, muss die Länge in  $y$ -Richtung anhand der Geometrie des Wärmetauschers angegeben werden. Dies wird am Beispiel eines Siebstapels (Abbildung 5.3 links) deutlich.

Ausgehend von einem zylindrischen Siebstapel mit dem Volumen  $V$ , der Länge  $L$  in  $x$ -Richtung, dem Radius  $R$  ( $= D_c/2$ ), der Porosität  $\beta$ , einem volumetrischen Wärmefluss  $\dot{Q}_w = -\dot{q}_w \pi R^2 L$  und der über den Rand  $A$  abgeführten Wärme  $\dot{Q}_w = 2\pi k \frac{\partial T}{\partial r} RL$  wird zunächst das Temperaturprofil mittels der Energieerhaltung berechnet. Ist der radiale Temperaturgradient

$\frac{\partial T}{\partial r}$  konstant, so kann  $R$  durch  $r$  ersetzt werden und es gilt:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_w(r) &= 2\pi k \frac{\partial T}{\partial r} r L = -\dot{q}_w \pi r^2 L \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{1}{2} \dot{q}_w \frac{r}{k} \\ \Rightarrow T(r) &= -\frac{1}{4} \dot{q}_w \frac{r^2}{k} + T_0.\end{aligned}$$

Aus der Randbedingung  $T(r = R) = T_w$  folgt  $T_0 = T_w + \frac{1}{4} \dot{q}_w \frac{R^2}{k}$ .

SAGE verwendet zur Bestimmung des radialen Wärmestroms die mittlere Temperatur der Fläche

$$\begin{aligned}T_m &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r T(r) dr d\varphi \\ &= \frac{1}{8k} \dot{q}_w R^2 + T_w.\end{aligned}$$

Mit  $\Delta T := T_w - T_m$  und  $\dot{q}_w = -\dot{Q}_w / \pi R^2 L$  folgt für die über den Rand abgeführte Wärme in Abhängigkeit vom mittleren Temperaturunterschied:

$$\dot{Q}_w = 8\pi k L \Delta T.$$

Für einen Siebstapel berechnet SAGE den radialen Wärmefluss anhand der Gleichung

$$\dot{Q} = k \frac{\Delta T}{D/2} \pi R^2 L / D, \quad (5.1)$$

der mit dem obigen Wärmefluss durch den Rand identisch sein muss ( $\dot{Q} = \dot{Q}_w$ ).  $D$  bezeichnet die mittlere Strecke, die der Wärmefluss im Wärmeleiter zurücklegen muss. Löst man Gleichung 5.1 nach dem gesuchten Parameter  $D$  auf, so erhält man  $D = R/\sqrt{4}$  bzw.  $D = D_c/4$ .

Eine analoge Überlegung gilt auch für geschlitzte Wärmetauscher. Um hier unsinnige Ergebnisse bei der Optimierung zu vermeiden, wurde in Simulationen bei gegebenem Durchmesser folgende Randbedingung für zylindrische Schlitz-Wärmetauscher verwendet:  $\pi D_c/2 = Nchan(Tfin + Wchan)$ .  $Nchan$ ,  $Tfin$  und  $Wchan$  sind in SAGE die Anzahl der Kanäle, die durchschnittliche Stegbreite und der Kanaldurchmesser.  $D_c$  ist der Gesamtdurchmesser des Zylinders.

### 5.2.3 Regenerator

Der Regenerator besteht aus einem Druckbehälter, der mit einem Material gefüllt wird, das auf Grund seiner hohen Oberfläche in einem besonders guten Kontakt mit dem Arbeitsgas steht. Gleichzeitig besitzt dieses eine hohe Wärmekapazität, sodass es wie ein Wärmespeicher wirkt. Zu den wichtigsten geometrischen Kenngrößen eines Regenerators zählt die Porosität  $\beta$ , die als Verhältnis von Leervolumen zum Gesamtvolumen definiert ist. Zusammen mit dem hydraulischen Durchmesser  $d_h$ , der das Verhältnis aus Leervolumen zur Oberfläche beschreibt, können die geometrischen Eigenschaften vieler Regenerator beschrieben werden.

Je nach Einsatzgebiet kommen verschiedene Füllmaterialien in Frage. Für Temperaturen im Bereich von 80 K werden in der Regel Edelstahlsiebe eingesetzt. Bei Sieben gibt die Meshzahl  $M_z$  die Anzahl der Knoten pro Zoll an. Zusammen mit dem Drahtdurchmesser  $d_w$  (in Zoll) lassen sich dann Porosität und hydraulischer Durchmesser berechnen [85]:

$$\beta = 1 - 1/4\pi M_z d_w \sqrt{1 + (M_z d_w)^2} \quad (5.2)$$

$$d_h = \frac{\beta}{1 - \beta} d_w. \quad (5.3)$$

Abbildung 5.4 zeigt den Verlauf der volumetrischen Wärmekapazität für typische Regeneratormaterialien im Temperaturbereich von 4 bis 250 K. Während bei Blei und Edelstahl die spezifische Wärmekapazität im Wesentlichen durch die Gitterschwingungen (Phononen) bedingt ist, werden bei den Materialien mit Seltenen Erden (z.B.  $Er_3Ni$  und  $HoCu_2$ ) die in Abbildung 5.4 zu sehenden Maxima in der spezifischen Wärme durch magnetische Phasenübergänge verursacht. Eine hohe volumetrische Wärmekapazität ermöglicht eine stärkere Dämpfung der Temperaturosillationen im Regenerator und verringert somit die Verluste (vgl. Abschnitt 3.3). Unterhalb von ca. 60 K besitzt Blei eine höhere volumetrische Wärmekapazität als Edelstahl, jedoch können aus ersterem keine Siebe hergestellt werden, weshalb hier Kugelschüttungen verwendet werden müssen. Der Flusskanal bzw. der hydraulische Durchmesser  $d_h$  sollte idealerweise im Bereich der Eindringtiefe (Gleichung 3.1) liegen. Da bei niedrigen Temperaturen die thermische Eindringtiefe in Blei um eine Größenordnung höher ist als die in Helium ( $\delta_{k,Pb} \gg \delta_{k,He}$ ), wird der Durchmesser der Kugeln  $d_s$  primär durch die entstehenden Kanalbreiten festgelegt. Abbildung 5.5 zeigt die thermischen Eindringtiefen in 25 bar Helium im Temperaturbereich zwischen 3 und 300 K und bei Frequenzen von 2 und 60 Hz. Analog zu Gleichung 5.3 gilt für Kugelschüttungen:

$$d_h = \frac{2}{3} \left( \frac{\beta}{1 - \beta} \right) d_s.$$

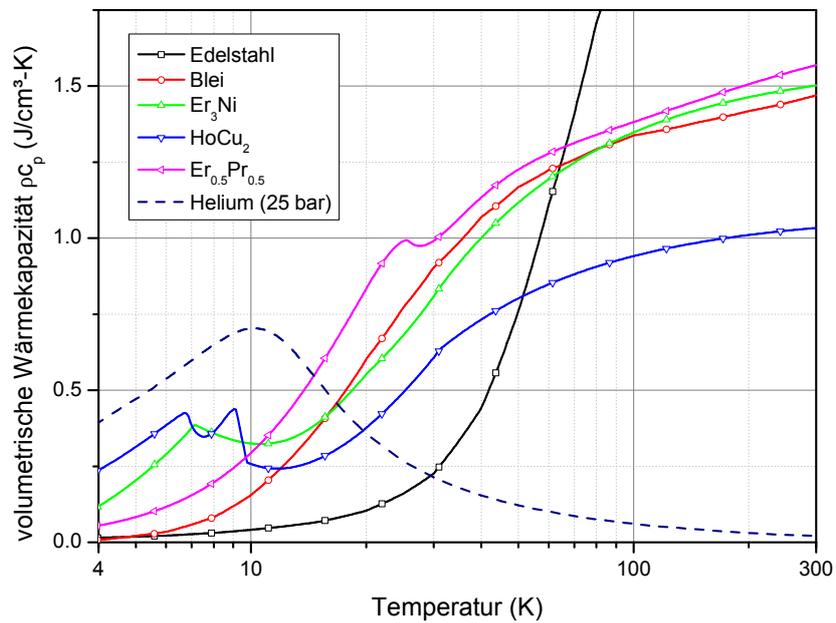


Abbildung 5.4: Wärmekapazitäten für typische Regeneratormaterialien im Vergleich zu Helium bei einem Druck von 25 bar.

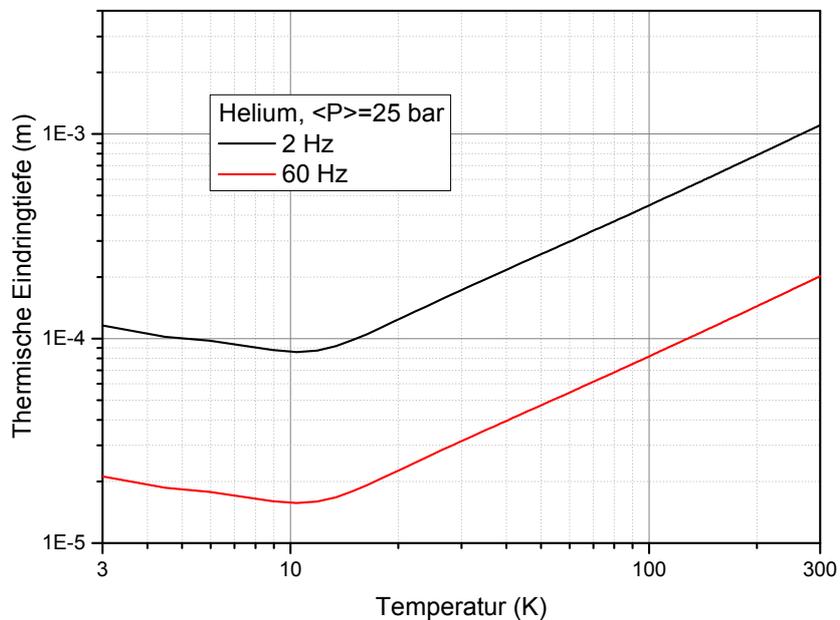


Abbildung 5.5: Eindringtiefen in 25 bar Helium bei 2 Hz und 60 Hz für Temperaturen zwischen 3 und 300 K.

Bei Kugelschüttungen mit typischen Porositäten von  $\beta=0.37$  bedeutet dies für den optimalen Kugeldurchmesser  $d_s \approx 8/3 d_h$ , sodass für GM-Typ-Kaltköpfe bei 20 K  $d_s = 260 \mu\text{m}$  und für Stirling-Typ-Kaltköpfe  $d_s = 60 \mu\text{m}$  gilt. Die geringere Porosität der Kugelschüttung führt zu einem erhöhten Druckamplitudenverlust, der jedoch durch die niedrigere Gasgeschwindigkeit und die niedrigere Viskosität des Heliums bei tiefen Temperaturen teilweise ausgeglichen wird. Als Kompromiss aus hoher Wärmekapazität und niedrigem Druckhubverlust wird Blei deshalb erst ab Temperaturen unterhalb von etwa 30 K eingesetzt. Bei sehr tiefen Temperaturen kommen Legierungen mit Seltenen Erden zum Einsatz, die ebenfalls nur als Kugeln herstellbar sind.

Für das Matrixmaterial von Regeneratoren sieht SAGE wärmespeichernde Elemente vor, sogenannte "quasi-adiabatische" Oberflächen. Im Gegensatz zu den wärmeleitenden Elementen, wird hier auch die thermische Eindringtiefe und die Wärmekapazität, d.h. der zeitliche Verlauf der Festkörpertemperatur mit berücksichtigt. Bei der Spezifikation der Porosität ist je nach Stopfkraft ein empirisch gewonnener Korrekturfaktor zu berücksichtigen. In Übereinstimmung mit von mir durchgeführten Messungen nach dem Stopfen wurde im Modell deshalb die Porosität der Regeneratormatrix im Vergleich zur theoretisch ermittelten Porosität (siehe Gleichung 5.2) um 10% erhöht.

#### 5.2.4 Pulsrohr

Das Pulsrohr wird in SAGE als gewöhnliche Rohrleitung behandelt, allerdings mit einer modifizierten axialen Wärmeleitung des Arbeitsgases. Dies ist nötig, da im realen Pulsrohr wie in Abschnitt 3.1 neben der Wärmeleitung durch das Gas und über die Wand noch weitere Verluste auftreten (siehe Abschnitte 3.1 und 3.4).

Dies sind alles höher dimensionale Effekte, die in SAGE nur angenähert berücksichtigt werden können. Da der Enthalpiefluss im Pulsrohr bei konstantem Rohrvolumen über weite Bereiche des Durchmesser zu Längenverhältnisses gleich bleibt, wird das optimale Verhältnis vorwiegend durch die oben aufgeführten Verluste bestimmt. In den Abbildungen 5.6 und 5.7 sind diese Verluste gegen die Pulsrohrlänge für zwei unterschiedliche Kaltköpfe aufgetragen. Abbildung 5.6 zeigt die Verluste des SAGE-Modells des HLPRK (Modell Nr. 7 in Tabelle 5.4) mit einem Pulsrohrvolumen von  $26.4 \text{ cm}^3$ . In Abbildung 5.7 sind zum Vergleich die Verluste eines Modells für den PT07 Kaltkopf aufgetragen (siehe Abschnitt 3.1), welcher mit nur  $2 \text{ cm}^3$  ein deutlich kleineres Pulsrohrvolumen hat. Bei kürzeren (und damit breiteren) Pulsrohren nehmen die Verluste durch die normale Gaswärmeleitung ( $\dot{Q}_{mol}$ ) zu, während die Verluste durch Pendelwärmeverluste ( $\dot{Q}_{osc}$ ) und Strömung zweiter Ordnung ( $\dot{Q}_{str}$ ) abnehmen. Aufgrund des geringen Länge zu Durchmesserverhältnisses dominieren im HLPRK-Modell die Wärmeleitungsverluste durch die Wand ( $\dot{Q}_{wall}$ ) über alle Geometrien hinweg, während die

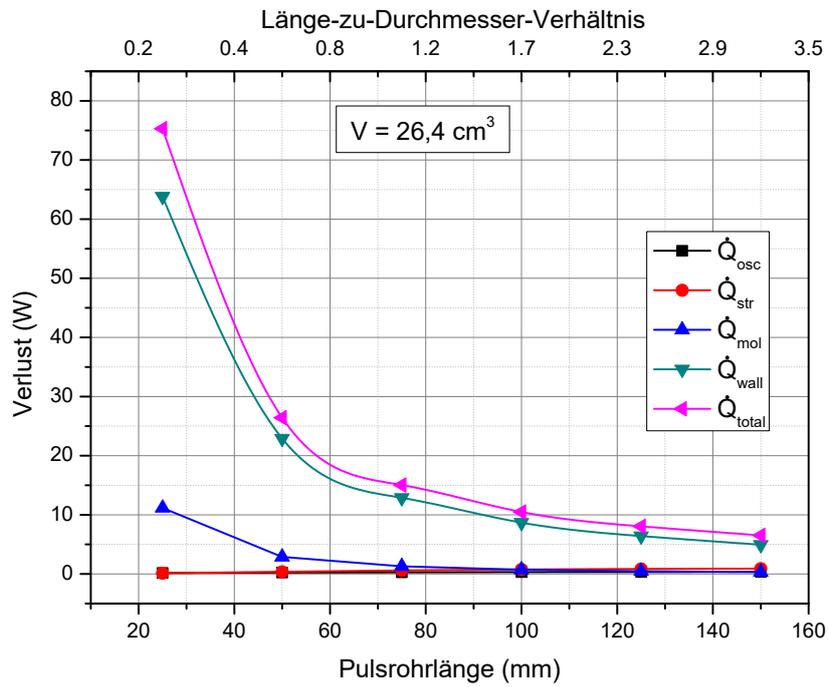


Abbildung 5.6: Pulsrohrverluste im SAGE-Modell des HLPRK-Kaltkopfes.

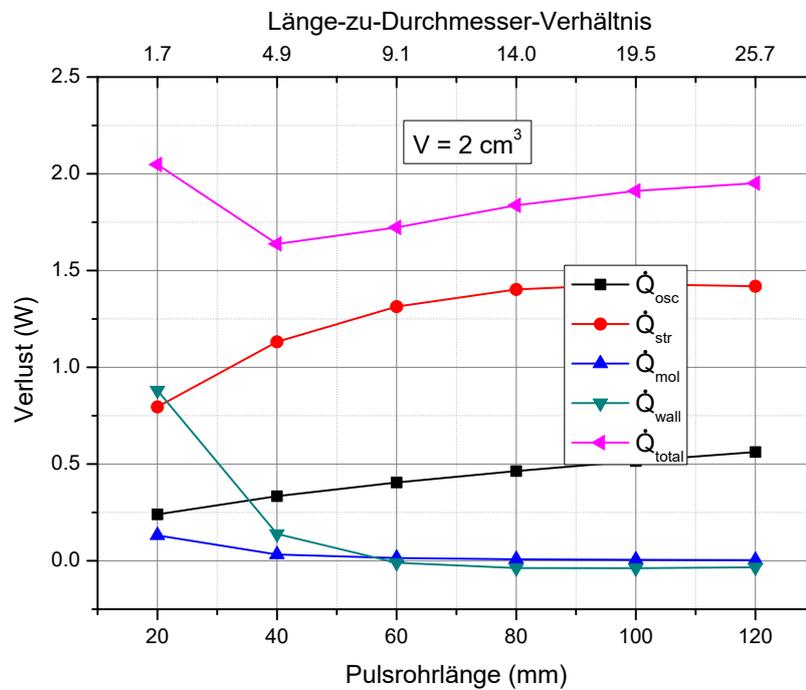


Abbildung 5.7: Pulsrohrverluste im SAGE-Modell des "PT-07" Kaltkopfes.

Wandverluste im PT-07 Modell nur bei sehr kurzen Pulsrohren eine Rolle spielen. SAGE sagt hier starke Verluste durch Strömungen zweiter Ordnung voraus, da diese mit steigendem  $L/d$ -Verhältnis größer werden [43].

### 5.2.5 Inertance und Puffervolumen

Die Inertanceleitung dient nach Abschnitt 3.1 bei hochfrequenten Pulsrohrkühlern zur Einstellung der Phasenlage zwischen Druckwelle und Massenfluss am kalten Ende, sowie der Einstellung des Druckverhältnisses im Pulsrohr. Wie im Abschnitt 4.2 bereits erläutert, hängt die Fähigkeit der Inertanceleitung die Phasenlage zwischen Massenfluss und Druckwelle zu beeinflussen u.a. vom Massenfluss selbst bzw. von der transportierten akustischen Leistung ab. Da im Falle des hier zu entwickelnden HLPRK-Kaltkopfes die akustische Leistung in der Inertance den kritischen Schwellenwert von 30 W weit überschreitet (siehe Abbildung 4.2 und 4.5), wird hier nur eine einzelne Inertance zum Erreichen der optimalen Phasenlage benötigt.

Die Wände der Inertanceleitung und des Puffervolumens wurden isotherm modelliert, da es sich gezeigt hat, dass ein Wärmefluss zwischen Gas und Wand zu einer besseren numerischen Konvergenz des Modells führt, ohne die Lösung stark zu beeinflussen. Die vorgegebene Wandtemperatur wird der im Experiment gemessenen angepasst. Ohne verfügbare Messdaten sollte ein Startwert von etwa 10 Kelvin oberhalb der Raumtemperatur verwendet werden, da sich die Inertanceleitung und das Puffervolumen in der Regel nicht sehr erwärmen. Bei Inertanceleitungen mit Durchmessern von weniger als 10 mm spielt die Rohrrauigkeit eine wichtige Rolle, da der Rohrdurchmesser die Größenordnung der viskosen Randschicht erreicht. In diesem Falle muss der Rauigkeitsparameter [59] im Modell angepasst werden.

## 5.3 Auslegung des HLPRK-Kaltkopfes

### Modell 1: Idealisierte Wärmetauscher

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war, einen Pulsrohrkaltkopf (HLPRK) für einen Linear-kompressor, Typ 2S297W, der Fa. CFIC Inc, Troy, USA (elektr. Eingangsleistung 10 kW, pV-Leistung 7.9 kW bei 60 Hz Arbeitsfrequenz und 25 bar Arbeitsdruck) mit einer Kühlleistung von etwa 100 W bei 30 K zu entwickeln. Die kühlleistungsbestimmenden Geometrien sind dabei die des Regenerators und des Pulsrohres. Eine Möglichkeit der Herangehensweise besteht darin, zunächst nur letztere zu optimieren und die restlichen Baugruppen als "ideal" zu betrachten. Ideal bedeutet in diesem Fall, dass die Wärmetauscher (Nachkühler, warmer und kalter Wärmetauscher) eine quasi unendlich hohe Wärmekapazität besitzen und sowohl das Totvolumen als auch der Druckhubabfall unendlich klein ist. Im SAGE Modell lässt sich

dies annähernd z.B. durch Verändern des “*heat transfer multipliers*” und des “*friction factor multipliers*” erreichen [59]. Als möglich Verlustquellen bleiben dann noch

- Wärmeleitungsverluste
- Druckhubabfall über die Regeneratormatrix
- Matrixineffektivität
- Reibungsverluste in der Inertanceleitung

Die Wärmeleitungsverluste lassen sich direkt aus dem Modell ablesen.

Der Druckhubabfall über der Regeneratormatrix führt zu einer Verringerung der akustischen Leistung am kalten Ende und somit auch zu einer Verringerung der Bruttokühlleistung. Außerdem sinkt die akustische Leistung vom warmen zum kalten Ende des Regenerators zwangsläufig um den Faktor  $T_k/T_w$ , da sich der Volumenfluss aufgrund zunehmender Gasdichte bei abnehmender Temperatur entsprechend verringert (vgl. Abbildung 3.11). Auf der anderen Seite führen in realen Systemen Temperaturosillationen im Regenerator zu einer Erhöhung des Volumenflusses, sodass die akustische Leistung am kalten Ende trotz Druckhubabfall höher als  $\dot{W}_{ein} T_k/T_w$  sein kann. Da im Pulsrohr fast keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird (adiabatische Zustandsänderung), entspricht der Enthalpiefluss dort annähernd der akustischen Leistung (akustische Näherung, siehe Abschnitt 4.2 und [60]):

$$\begin{aligned} \langle \dot{H}_{pt} \rangle &= \frac{1}{2} \langle p_1 \dot{V}_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{R_{He} T_k}{p_m} \langle p_1 \dot{m}_1 \rangle . \end{aligned}$$

Die Matrixineffektivität bewirkt eine nicht verschwindende Temperaturosillation des Arbeitsgases im Regenerator. Sie erzeugt einen zeitlich gemittelten Enthalpiefluss vom warmen zum kalten Ende der Größe

$$\langle \dot{H}_{reg} \rangle = \frac{1}{2} c_p \langle \dot{m}_1 T_1 \rangle .$$

Dabei ist  $T_1$  die Amplitude der Temperaturosillation des Arbeitsgas im Regenerator. Die Differenz zwischen dem Enthalpiefluss am kalten Ende des Pulsrohrs und im Regenerator ergibt die Nettokühlleistung. Um die tatsächlich zur Verfügung stehende Kühlleistung zu erhalten, müssen hier von noch die Wärmeleitungs- und Strahlungsverluste abgezogen werden.

In Tabelle 5.1 sind die einzelnen Energieflüsse für ein einfaches SAGE Modell (Nr. 1)

Tabelle 5.1: Energieflüsse im HLPRK mit idealisierten Wärmetauschern (Modell Nr. 1).

akust. Leistung Regenerator ( $\dot{W}_{ein}$ ) (warmes Ende)	6923 W ( $T_w=299.3$ K)	
$\dot{W}_{ein} * T_k/T_w$	699 W ( $T_k=30.2$ K)	
akust. Leistung Regenerator (kaltes Ende)	813 W ( $T_k=30.2$ K)	
	Bruttokühlleistung	Verluste
Enthalpiefluss Pulsrohr ( $\dot{H}_{pt}$ ) (kaltes Ende)	753 W	
Enthalpiefluss Regenerator ( $\dot{H}_{reg}$ ) (kaltes Ende)		499 W
Wärmeleitung über Wände (Reg + Pt)		46 W
Wärmeleitung über Regeneratorsiebe		2 W
Wärmeleitung über das Arbeitsgas		11 W
Summen	753 W	558 W
Nettokühlleistung		195 W

wiedergegeben. Als Randbedingungen hierfür wurden die vom Hersteller angegebenen Kompressordaten (7 kW pV-Leistung, 3 bar Druckamplitude) verwendet. Anschließend wurden gleichzeitig Länge und Durchmesser des Regenerators, Pulsrohrs und der Inertance sowie die Regeneratorsiebentapel für maximale Kühlleistung bei 30 K optimiert. Die so ermittelte Nettokühlleistung beträgt ca. 195 W. Aus Tabelle 5.1 ist ersichtlich, dass der Hauptverlust durch die Ineffizienz des Regenerators zustande kommt. Die Längen des Regenerators und des Pulsrohrs ergeben sich als Kompromiss zwischen Wärmeleitungsverlusten der Wände und des Arbeitsgases sowie des Druckhubabfalls. Die Wärmeleitungsverluste der Regeneratorsiebe spielen nur eine untergeordnete Rolle. Die Rechnung mit idealisierten Wärmetauschern zeigt, dass die geforderte Kühlleistung von 100 W bei 30 Kelvin erreichbar ist. Bemerkenswert ist allerdings der im Vergleich zur akustischen Leistung am kalten Ende hohe Enthalpiefluss im Regenerator, der primär durch den hohen Massenfluss verursacht wird. Eine Reduktion wäre nur mit einer entscheidend verbesserten Regeneratormatrix möglich. Eine weitere Erhöhung des Regeneratordurchmessers zur Erhöhung der Sieboberfläche ist ungünstiger, da sich hierdurch das Totvolumen des Regenerators und somit der Massenfluss weiter erhöhen würde.

Beim nächsten Modell (Nr. 2) wurde nun versucht die optimalen Wärmetauscherkonfigurationen zu finden. Der ideale Wärmetauscher besitzt eine hohe Wärmeleitfähigkeit und eine große Kontaktfläche. Gleichzeitig sollte der Druckhubabfall und das Totvolumen möglichst klein sein. Da sich diese Kriterien teilweise ausschließen, muss für den jeweiligen Einsatzzweck ein Kompromiss gefunden werden. In Tabelle 5.2 sind die Vor- und Nachteile verschiedener Wärmetauscher gegenübergestellt (siehe auch [86]). Für alle verwendeten Wärmetauscher gilt, dass aufgrund der hohen Betriebsfrequenz die Breite der Wärmetauscherkanäle möglichst im Bereich der thermischen Eindringtiefe im Helium-Arbeitsfluid (Gleichung 3.1) liegen sollte. Bei 60 Hz und den beiden Austauschtemperaturen 300 K und 30 K beträgt diese ca. 200  $\mu\text{m}$  bzw. ca. 31  $\mu\text{m}$ .

Es werden nun die aufeinander aufbauenden Änderungen am idealisierten Modell und deren Einflüsse beschrieben. Nach jeder Änderung wurden die Länge und Durchmesser von Regenerator, Pulsrohr und Inertanceleitung sowie die Regeneratormatrix erneut optimiert. Die folgende Liste enthält die dabei durchgeführten Modifikationen:

1. Basismodell: idealisierte Wärmetauscher (wenig Totvolumen, hoher Wärmeübergang, geringer Druckhubabfall)
2. Einfluss und Optimierung des Nachkühlers
3. Einfluss und Optimierung des warmen Wärmetauschers
4. Einfluss und Optimierung des kalten Wärmetauschers

Tabelle 5.2: Vor- und Nachteile verschiedener Wärmetauscherkonfigurationen.

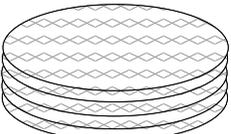
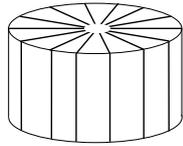
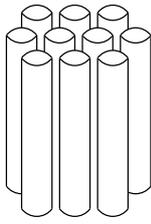
Wärmetauscher	Vorteile	Nachteile	Geometrie
Siebe	große Oberfläche, geringe Kosten	geringe radiale Wärmeleitung, Druckhubverlust, Totvolumen	
Schlitze	gute radiale Wärmeleitung, geringer Druckhubverlust, kleines Totvolumen	geringe Oberfläche, schwierige Flussbegradigung (Jetbildung)	
Rohrbündel	große Oberflächen möglich, gute Ankopplung an Kühlwasser möglich	Kosten (steigen stark mit der Oberfläche an)	

Tabelle 5.4: Vergleich der Dimensionen und Kühlleistungen bei 30 K der verschiedenen Modellgenerationen.

Modell	Regenerator				Pulsrohr		Inertance		$\dot{Q}_{net}$ [W]	$\Delta\dot{Q}_{net}$ [W]	$\dot{W}_{ac}$ [kW]
	L [mm]	D [mm]	Poros.	Dw [ $\mu$ m]	L [mm]	D [mm]	L [m]	D [mm]			
1	59	181	67.3	25	123	98	2.4	30	195	-	7
2	61	182	68	25	123	98	2.4	30	184	-11	7
3	58	170	68	24	96	77	3.4	28	172	-12	7
4	51	156	69	20	160	63	1.3	14	69	-103	7
5	74	140	64.4	30	163	62	1.6	16	49	-20	5.67
6	75	142	64.4	30	99	68	1.24	13	37	-12	5.97
7 (45 Hz)							0.9	10	59	+22	5.5
							1.0	15			
							1.0	20			

5. Einfluss und Optimierung der Regeneratormatrix

6. Einschalten der Pulsrohrverluste höherer Ordnung

7. erste gebaute Version

Tabelle 5.4 zeigt die Dimensionierung der einzelnen Kühlerkomponenten sowie die Kühlleistungsdaten für die verschiedenen Modellgenerationen. In der ersten Spalte ist die Modellgeneration eingetragen. Bis auf Modell Nr. 7 sind alle Kaltköpfe für eine Arbeitsfrequenz von 60 Hz ausgelegt. In den folgenden Spalten von Tabelle 5.4 sind die optimierten Kaltkopfparameter aufgeführt, beginnend mit dem Regenerator (Länge und Durchmesser des Regenerators, Porosität und Drahtstärke der Regeneratorsiebe). Dann folgen Länge und Durchmesser des Pulsrohrs und der Inertanceleitung. In der nächsten Spalte ist das Simulationsergebnis für die Nettokühlleistung ( $\dot{Q}_{net}$ ) aufgeführt. Die nächste Spalte zeigt die Differenz der Nettokühlleistung zum vorherigen Modell ( $\Delta\dot{Q}_{net}$ ) und die letzte Spalte die akustische Leistung des Kompressors ( $\dot{W}_{ac}$ ).

## Modell 2: Nachkühler

Der Nachkühler (siehe Abbildung 3.1) muss die vom Kompressor erzeugte Kompressionswärme (entspricht der akustischen Leistung) von ca. 7 kW abführen können, d.h. eine sehr gute radiale Wärmeleitung ist hier wichtig. Aufgrund der guten Ankopplung an das Kühlmittel wurde deshalb ein Rohrbündelwärmetauscher gewählt. Aus geometrischen Gründen

sollte der Rohrinne Durchmesser etwa  $4 \delta_k$  (ca. 1 mm) betragen, jedoch wurde hier ein Innendurchmesser von 2 mm gewählt, um den späteren Herstellungsaufwand geringer zu halten. Der letztlich verwendete Nachkühler besteht aus 400 Kupferröhren von je 10 cm Länge, die einzeln von Kühlwasser umflossen werden. Diese Anordnung besitzt nur einen geringen Druckverlust, erhöht jedoch aufgrund des im Vergleich zur thermischen Eindringtiefe zu großen Durchmessers leicht die mittlere Gastemperatur. Die Kühlleistung mit diesem Wärmetauscher nimmt im Vergleich zum idealisierten Modell um 11 W (vgl. Tabelle 5.4) ab.

### **Modell 3: warmer Wärmetauscher**

Der warme Wärmetauscher (siehe Abbildung 3.1) führt fast den gesamten Enthalpiefluss im Pulsrohr in Form von Wärme an die Umgebung ab. Im Modell sind es ca. 750 W (vgl. Tabelle 5.1). Eine weitere Aufgabe des Wärmetauschers ist es, beim Übergang von der Inertance zum Pulsrohr für eine Flussbegradigung zu sorgen, um Verwirbelungen und "Jet"-Effekte zu vermeiden. Dies ist der Grund, weshalb man in der Regel an dieser Stelle einen Siebwärmetauscher verwendet. Allerdings ist die zu übertragende Wärmemenge relativ groß. Lässt man einen reinen Siebwärmetauscher im Modell optimieren, so ergibt sich eine sehr geringe Porosität ( $< 0.3$ ) bei sehr großen Drahtdurchmessern ( $> 10$  mm). Dies ist in der Regel ein Hinweis darauf, dass ein geschlitzter Wärmetauscher verwendet werden sollte. Um trotzdem eine gute Flussbegradigung zu erreichen, wurde letztlich ein 20 mm langer Mesh 80 Cu Siebstapel zwischen geschlitztem Wärmetauscher und Pulsrohr eingefügt. Der geschlitzte Kupfer-Wärmetauscher ist ebenfalls 20 mm lang und hat 48 Kanäle mit 0.5 mm Breite und 22 mm Tiefe. Der Verlust an Kühlleistung beträgt mit diesem Wärmetauscher im Vergleich zum vorherigen Modell Nr. 2 etwa 12 W.

### **Modell 4: kalter Wärmetauscher**

Der kalte Wärmetauscher (siehe Abbildung 3.1) ist ein kritisches Bauteil. Da er sich am kalten Ende des Kühlers befindet, reduziert sein Totvolumen aufgrund der hohen Gasdichte die Kühlleistung besonders stark. Wegen der verringerten Eindringtiefe bei niedrigen Temperaturen muss der hydraulische Durchmesser relativ klein gewählt werden. Bei den hier benötigten hohen Kühlleistungen benötigt man zugleich eine gute radiale Wärmeleitung. Aus diesen Gründen wurde ein Schlitzwärmetauscher verwendet.

Neben der Aufnahme der Kühlleistung kommt dem kalten Wärmetauscher noch eine weitere Aufgabe zu. Da der Regenerator im Vergleich zum Pulsrohr einen relativ großen Durchmesser besitzt (vgl. Tabelle 5.1), muss der dazwischen sitzende Wärmetauscher die unterschiedlichen Anströmflächen anpassen. Außerdem sollte die Geometrie so beschaffen sein,

dass das Arbeitsgas möglichst "gerade" und homogen in das Pulsrohr bzw. den Regenerator strömt, um Verwirbelungen zu vermeiden. Deshalb wurde hier ein konisch geschlitzter Wärmetauscher verwendet. Um die Herstellungskosten in Grenzen zu halten, musste die Gesamtlänge aller Schlitze begrenzt werden, da der Maschinenfahrweg bei der zur Herstellung verwendeten Funkenerosion (und somit die Maschinenlaufzeit) einen großen Kostenfaktor darstellt. Als Kompromiss wurde der in Abbildung 7.3 gezeigte Wärmetauscher gefertigt. Er besitzt 48 Schlitze von je 0.3 mm Breite und drei unterschiedliche Kanaltiefen. Auf der Regeneratorseite beträgt der Durchmesser 117 mm und auf der Pulsrohrseite 45 mm. Da im SAGE-Modell keine konischen Schlitzwärmetauscher modelliert werden konnten, wurde deshalb der Mittelwert von 117 und 45 mm als Durchmesser angenommen (81 mm), was auf eine mittlere Kanallänge von ungefähr 25 mm führt.

Die Empfindlichkeit der Kaltkopfparameter bezüglich des kalten Wärmetauschers wird deutlich, wenn letzterer in das Modell integriert wird. Bei der anschließenden Optimierung des Regenerators und des Pulsrohrs ändert sich die gesamte Dimensionierung des Kaltkopfes. Der zusätzliche Verlust im Vergleich zum vorherigen Modells Nr. 3 beträgt über 100 W. Ein Teil dieses Verlustes rührt vom Regenerator her, da der vorherige, ideale Wärmetauscher keine Temperaturosillationen am kalten Ende verursachte und so den Enthalpiefluss des Regenerators herabsetzte. Zum anderen verursacht die geringe Anströmfläche einen nicht unerheblichen Druckverlust, der den Enthalpiefluss im Pulsrohr verringert.

### **Modell 5: Regeneratormatrix**

Die Regeneratormatrix besteht aus einem Edelstahlsiebstapel (Werkstoff DIN 1.4401 / AISI 316). Da die im Modell als optimal berechnete Siebmatrix aufgrund des geringen Drahtdurchmessers ( $< 20\mu\text{m}$ ) technisch nicht herstellbar ist, wurden kommerziell erhältliche, Mesh 400 Siebe mit  $30\ \mu\text{m}$  Drahtstärke verwendet. Ihre theoretische Porosität beträgt allerdings nur 59%, die sich selbst durch "lockeres Stopfen" des Regenerators nur um ca. 10% auf 64.4% erhöht. Die niedrige Porosität führt zu einem im Vergleich zur Matrix aus Modell 4 erhöhten Druckhubabfall. Gleichzeitig verringert sich wegen des größeren Drahtdurchmessers die Matrixoberfläche. Die weitere Optimierung führt deshalb zu einer Vergrößerung des Regeneratorvolumens durch Verlängerung. Damit erhöht sich auch die Kaltkopfimpedanz erheblich, sodass bei gegebener Druckamplitude der Kompressor nur noch 5.6 kW akustische Leistung liefert. Die Verlängerung des Regenerators wurde notwendig, um die nun im Vergleich zur Kühlleistung größer gewordenen Wärmeleitungsverluste zu mindern. Trotz der nun verringerten akustischen Leistung reduziert sich die Kühlleistung nur um ca. 20 W.

## Modell 6: Pulsrohrverluste

Die bisherigen Untersuchungen vernachlässigten die in Abschnitt 5.2.4 erläuterten höherdimensionalen Verluste im Pulsrohr. Werden diese im Modell aktiviert, so wird der Kaltkopf mit einem zusätzlichen Wärmeeintrag belastet. Dieser lässt sich nur durch Variation des Länge zu Durchmesser Verhältnisses des Pulsrohrs beeinflussen. Den größten Anteil dieser Verluste bilden dabei die "Strömung zweiter Ordnung" mit 4,7 Watt sowie die Randströmung mit 2 Watt. Durch die Änderung der Pulsrohrgeometrie und durch Berücksichtigung der höherdimensionalen Pulsrohrverluste verringert sich die Kühlleistung insgesamt um 12 W.

## Modell 7: Erste gebaute Version

In das Design der ersten gebauten Kaltkopfversion flossen die SAGE-Simulationen noch nicht ein. Zunächst wurde der Kaltkopf mittels eines von Luwei Yang entwickelten Simulationsprogramms [87] bei 45 Hz und 20 bar Fülldruck optimiert, da Erfahrungen mit kleineren Kaltköpfen (siehe Abbildung 3.7) zeigten, dass im Vergleich zur spezifizierten Kompressorfrequenz (60 Hz) niedrigere Betriebsfrequenzen eine bessere Effizienz erbringen. Im Vergleich zu den mit SAGE optimierten Dimensionen aus Modell Nr. 6 besitzt das Design kleinere Regenerator- und Pulsrohrvolumina. Zur weiteren Effizienzsteigerung wurde außerdem noch eine mit SAGE berechnete dreiteilige Inertance mit den in Tabelle 5.4 angegebenen Daten eingesetzt. Tatsächlich zeigt das Modell Nr. 7 im Vergleich zu Nr. 6 trotz niedrigerer Eingangsleistung eine erhöhte Kühlleistung bei 30 K. Der Hauptgrund hierfür liegt vor allem in den durch die Senkung der Arbeitsfrequenz bedingten reduzierten Verlusten innerhalb des Regenerators und der Wärmetauscher.

## Zusammenfassung des Modellierungsprozesses

Abbildung 5.8 zeigt die Exergieverluste der einzelnen Kaltkopfkomponenten für die verschiedenen Modellgenerationen. Nach Gleichung 3.12 entspricht die Nettokühlleistung (ohne Wärmeleitungsverluste) wegen des Temperaturquotienten  $T_w/T_k \approx 10$  etwa einem Zehntel des Exergieverlustes über dem kalten Wärmetauscher.

Die im idealen Modell Nr. 1 theoretisch erreichte Kühlleistung von 195 W bei 30 K reduziert sich unter Berücksichtigung von Verlusten im realistischen Modell Nr. 7 auf 37 W. Hauptursache sind die Verluste im kalten Wärmetauscher und in der Regeneratormatrix. Beide Bauteile ließen sich mit höherem technischen Aufwand noch verbessern. Allerdings spielen hier auch wirtschaftliche Überlegungen eine Rolle, zumal weitere, in Modell nicht berücksichtigte Verluste die Leistung des Kaltkopfes in nicht unerheblichem Maße beeinflussen (siehe Abschnitt 5.5). Der Betrieb bei hohen Frequenzen führt trotz erhöhter akustischer Leistung

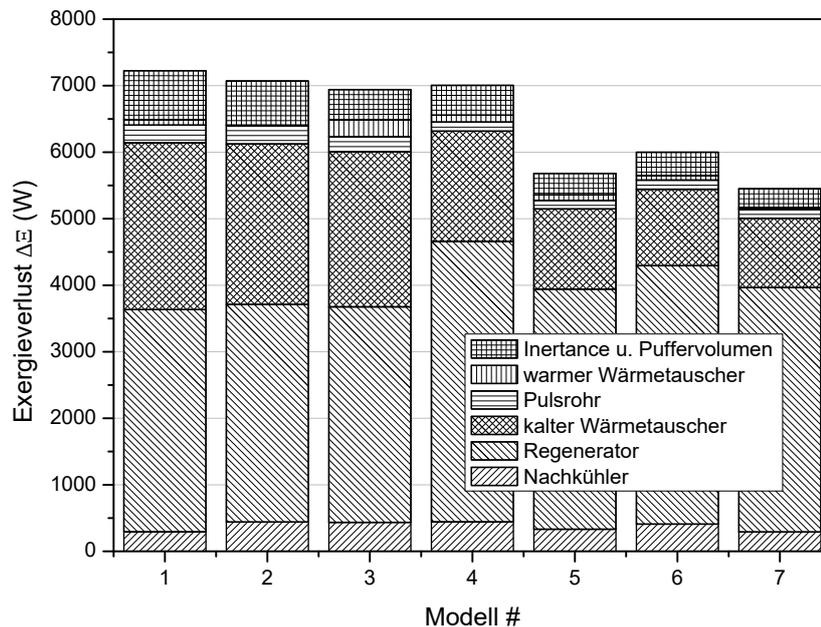


Abbildung 5.8: Exergieverluste der einzelnen Kaltkopfkomponenten für die verschiedenen Modellgenerationen.

nicht unbedingt zu mehr Kühlleistung. Eine genaue Untersuchung der Verlustmechanismen erscheint deshalb notwendig.

## 5.4 Energiebilanz des Kühlermodells

In Abbildung 5.9 ist die mit SAGE berechnete Energiebilanz des Kaltkopfmodells Nr. 7 schematisch dargestellt. Die Arbeitsfrequenz beträgt 43 Hz und der Fülldruck 18 bar. Aufgetragen sind die Enthalpie- und Wärmeflüsse für eine Arbeitstemperatur von 40 Kelvin. Vom Kompressor werden etwa 4,3 kW akustische Leistung geliefert. Der größte Teil der dabei erzeugten Kompressionswärme wird im Nachkühler abgeführt. 164 W fließen als Verluste in den Regenerator. Das Pulsrohr liefert eine Bruttokühlleistung von 287 W, sodass nach Abzug der Wärmeleitungs- und Regeneratorverluste 95 W Nettokühlleistung bei 40 K zur Verfügung steht. Am warmen Wärmetauscher werden 223 W abgeführt. Die restlichen 55 W fließen in die Inertanceleitung und erwärmen diese und das Puffervolumen.

In Abbildung 5.10 sind die Enthalpie- und Entropieflüsse sowie die akustische Leistung zwischen Nachkühler und dem warmen Wärmetauscher dargestellt. Die Modellparameter sind 4,4 kW akustische Leistung bei einer Arbeitsfrequenz von 46 Hz. Die Kaltkopftemperatur

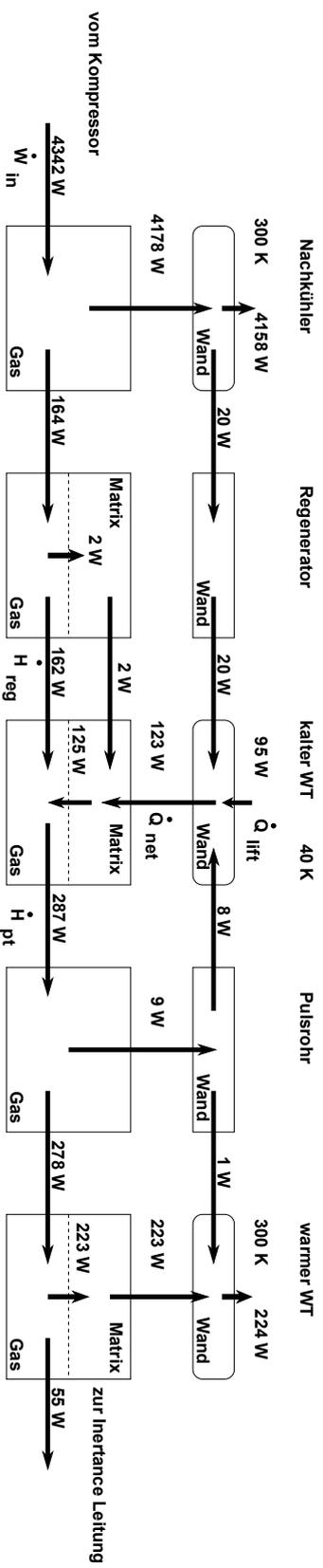


Abbildung 5.9: Schematische Darstellung der Energiebilanz des Kaltkopfmodells Nr. 7 aus Abschnitt 5.3 bei einer Kaltkopf Temperatur von 40 K.

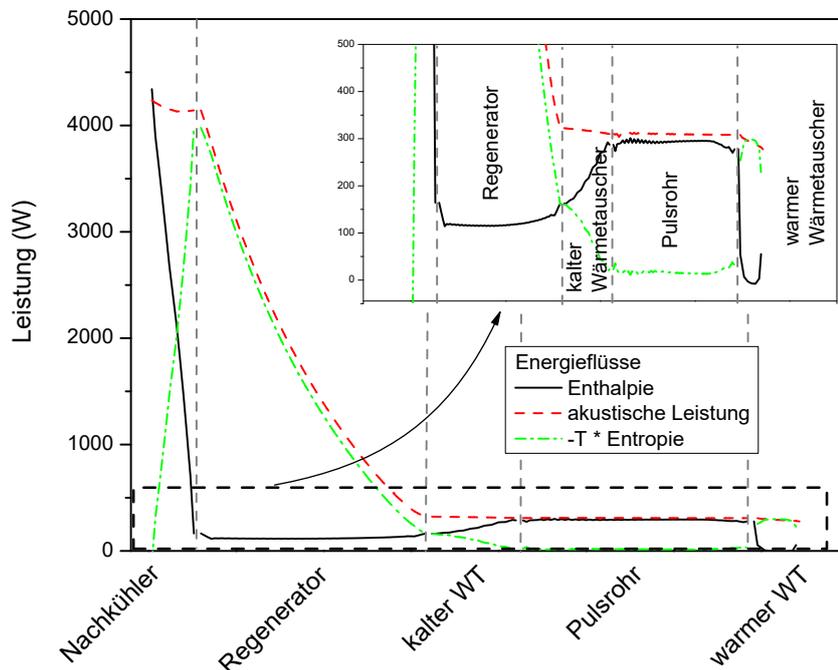


Abbildung 5.10: Enthalpie, akustische Leistung und Entropie im Kaltkopfmodell Nr. 7 aus Abschnitt 5.3 bei 40 K.

beträgt 40 K und der Fülldruck 18 bar. Da in der Regel nur die Energieflüsse an den Objektgrenzen direkt aus dem SAGE-Modell-Listing ablesbar sind, wurden die Werte im Inneren der Komponenten wie in Abschnitt 3.3 durch zeitliche Mittelung aus dem vollständigen SAGE-Gitter berechnet. Die vom Kompressor kommende akustische Leistung durchquert nahezu verlustfrei den Nachkühler und fällt dann aufgrund des Temperaturgradienten und des Druckhubverlustes im Regenerator ab. Da im kalten Wärmetauscher wiederum kaum Druckhubverluste auftreten, entspricht die akustische Leistung im Pulsrohr in etwa der Bruttokühlleistung. Die Nettokühlleistung ergibt sich aus der Differenz aus Pulsrohr- und Regeneratorenthalpiefluss, weil der Enthalpiefluss im Regenerator die Hauptverlustquelle darstellt.

In Abbildung 5.11 sind die aus dem SAGE-Gitter ermittelten Regeneratorkenngrößen  $NTU/Länge$ ,  $NPH/Länge$  und deren Quotient (siehe Abschnitt 3.4) aufgetragen. Die Modellparameter sind die selben wie im vorherigen Absatz. Der Vergleich mit [68] zeigt zum einen, dass die hier berechneten Werte räumlich gemittelt gut mit dem von Rühlich berechneten Quotienten für Siebwärmetauscher von 6 bis 7 übereinstimmen. Zum anderen zeigt Abbildung 5.11, dass die Kenngrößen entlang eines Regeneratorprofils nicht konstant sind. Aufgrund der kleiner werdenden thermischen Eindringtiefe und dem Absinken der

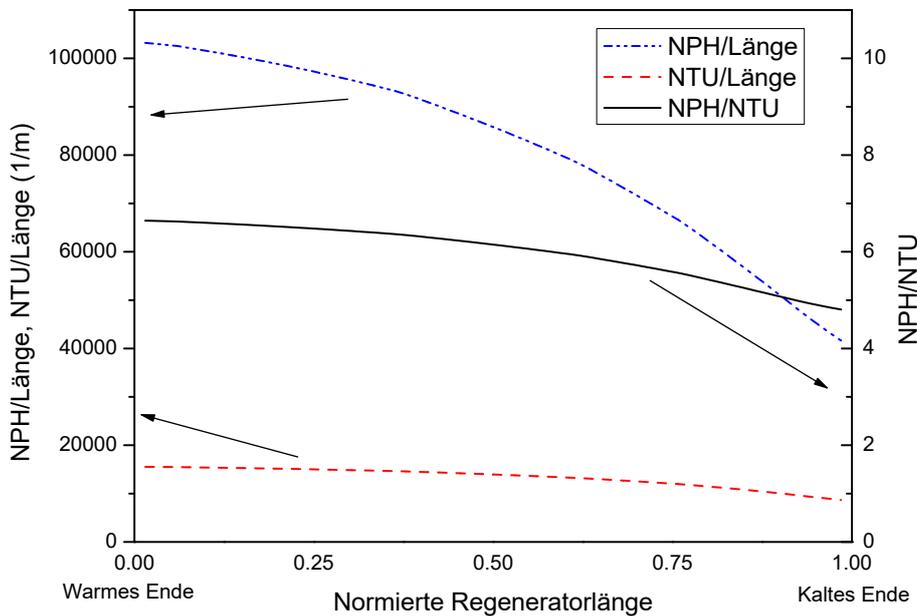


Abbildung 5.11: Darstellung der Regeneratorkenngrößen  $NTU/Länge$ ,  $NPH/Länge$  und  $NPH/NTU$  des Kaltkopfmodells #7 aus Abschnitt 5.3.

Wärmekapazität nimmt die thermische Effizienz  $NTU$  mit abnehmender Temperatur in nicht-linearer Weise ab. Der Druckhubverlust  $NPH$  zeigt aufgrund der mit fallender Temperatur abnehmenden Viskosität ein noch deutlicheres absinken. Dies führt dazu, dass der Quotient aus Druckhubverlust  $NPH$  und thermischer Effizienz  $NTU$  mit fallender Temperatur insgesamt abnimmt, d.h., der Regenerator wird bei niedrigeren Temperaturen in Sinne von [68] effizienter.

## 5.5 Anpassung des Kaltkopfmodells zur Simulation zirkulare Regeneratorströmungen

Aus den experimentellen Ergebnissen am HLPK (siehe Kapitel 8) ergaben sich Hinweise auf eine zirkulare Regeneratorströmung, die in diesem Abschnitt durch ein modifiziertes *SAGE* Modell behandelt wird. In Abbildung 5.12 ist ein möglicher Verlauf zweier verschiedener Strömungsformen dargestellt. Die zirkulare Strömung bewirkt sowohl einen Wärmetransport vom warmen zum kalten Ende des Regenerators als auch in umgekehrter Richtung. Experimentell lässt sich dies durch einen Temperaturunterschied auf gleicher Höhe an der Außenseite des großflächigen Regenerators messen (siehe Abbildung 8.1). Da der zeitlich

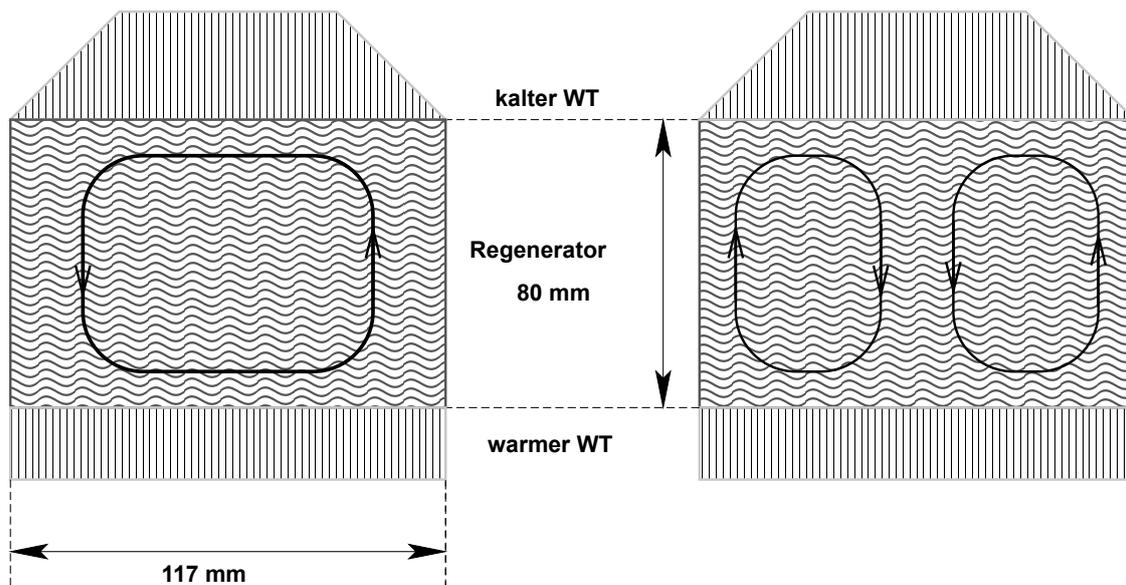


Abbildung 5.12: Mögliche Verläufe zirkularer Regeneratorströmungen. Die Abmessungen entsprechen denen des Regenerators im HLPRK.

gemittelte Massenfluss der Ringströmung aufgrund der Massenerhaltung in beide Richtungen betragsgleich sein muss, das Energieniveau  $h = c_p T$  am warmen Ende jedoch größer ist als am kalten Ende, führt dies zu einem Nettoenergiefluss vom warmen zum kalten Ende des Regenerators und ist somit ein Verlust. Da das Simulationsprogramm SAGE nur ein eindimensionales Rechengitter zur Verfügung stellt, musste zur Simulation der Strömung ein vereinfachtes Modell erstellt werden. Dazu wurden folgende Vereinfachungen angenommen:

- es existiert nur ein einzelner Massenfluss (wie in Abbildung 5.12 links)
- die Richtungsänderung des Flusses findet außerhalb des Regenerators in den Wärmetauschern statt, d.h. kein radialer Massenfluss innerhalb des Regenerators
- es wird nur an drei Stellen im Regenerator Wärme in transversaler Richtung ausgetauscht (bei  $1/6$ ,  $1/2$  und  $5/6$  der Gesamtlänge  $L$ )

Mittels dieser Vereinfachungen wurde im Modell der ursprüngliche Regenerator durch zwei identische parallele Regeneratoren (1 und 2) ersetzt, die zusammen die gleiche Querschnittsfläche besitzen, wie der ursprüngliche Regenerator. Diese Konfiguration stellt sicher, dass sich ohne Strömung die selben Ergebnisse wie im alten Modell einstellen. Um die Komplexität des Modells in Grenzen zu halten, wurden nur drei Wärmeübergänge vorgesehen, über die jeweils für  $1/3$  der Regeneratorlänge die radiale Wärmeleitung simuliert wird. Abbildung 5.13 zeigt ein schematisches Modell dieser Parallelregeneratoren.

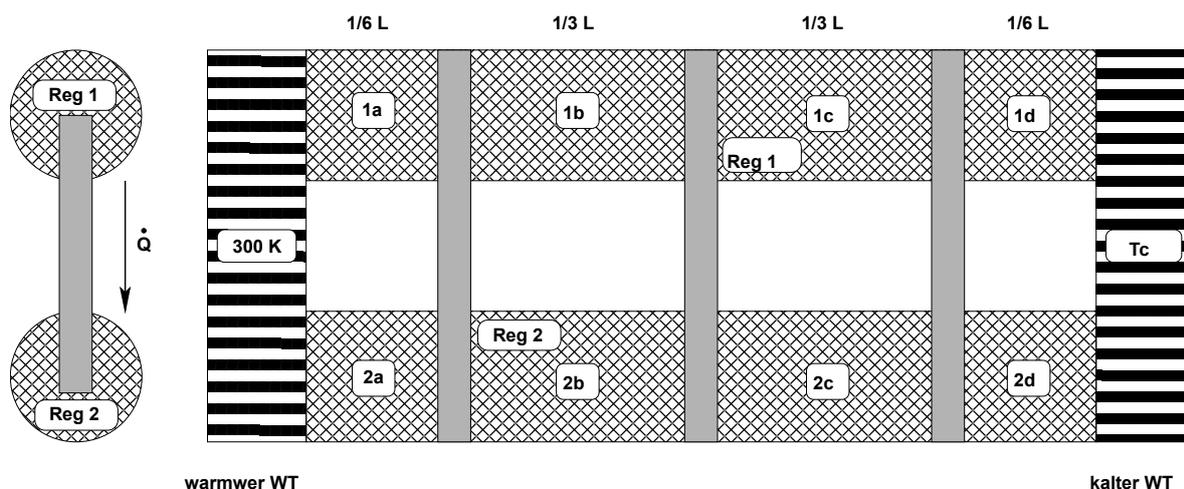


Abbildung 5.13: Schematisches Regeneratormodell mit parallelen Regeneratoren.

Ein Wärmeleitpfad wird in SAGE durch die Gleichung  $\dot{Q} = k \Delta T A/l$  beschrieben (siehe Gleichung 3.20).  $\dot{Q}$  ist dabei die über ein Gebiet der Länge  $l$  und der Querschnittsfläche  $A$  fließende Wärme.  $k$  bezeichnet den (temperaturabhängigen) Wärmeleitkoeffizient des Materials und wird in SAGE 3 anhand der mittleren Temperatur zwischen Regenerator A und B ermittelt. Im Modell umfasst ein Gebiet genau  $1/3$  des Regenerators, wobei  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zwischen den Parallelregeneratoren in der Mitte eines Gebietes angibt. Der Quotient  $A/l$  hängt stark von der mikroskopischen Ausprägung der Störung der Temperaturverteilung im Regenerator ab, sodass eine Herleitung von  $A/l$  aufgrund fehlender Daten schwierig ist. Da sich außerdem je nach Betriebsbedingungen die Ausprägung der Störung verändert, ist davon auszugehen, dass dieser Quotient einen variablen Wert besitzt. Deshalb wurde in den Simulationen der Quotient zu einem variablen Parameter  $c_{trans}$  zusammengefasst und zwischen 0 und 0,1 m variiert, um den Einfluss der radialen Wärmeleitung untersuchen zu können. Für die Rechnungen wurde Modell Nr. 7 aus Abschnitt 5.3 verwendet, wobei eine Arbeitsfrequenz von 46 Hz, ein Fülldruck von 18 bar und eine akustische Leistung von 4,4 kW eingestellt wurden. Falls nicht anders angegeben, betrug die Kaltkopftemperatur im Modell 60 K.

## 5.6 Energiebilanz im modifizierten Kühlermodell

Um die im Experiment (siehe Abschnitt 8.1) beobachtete parasitäre Strömung mit dem Modell aus dem letzten Abschnitt zu simulieren, muss zu Beginn ein Temperaturgleichgewicht in den beiden Regeneratoren herrschen, dessen Ursprung für die Simulation jedoch zunächst unerheblich ist. Dieses wird erzeugt, indem die Initialtemperatur  $T_{init}$  für beide Regeneratoren unterschiedlich eingestellt wird. Der nun im zeitlichen Mittel auftretende Massenstrom  $\dot{m}_{dc}$

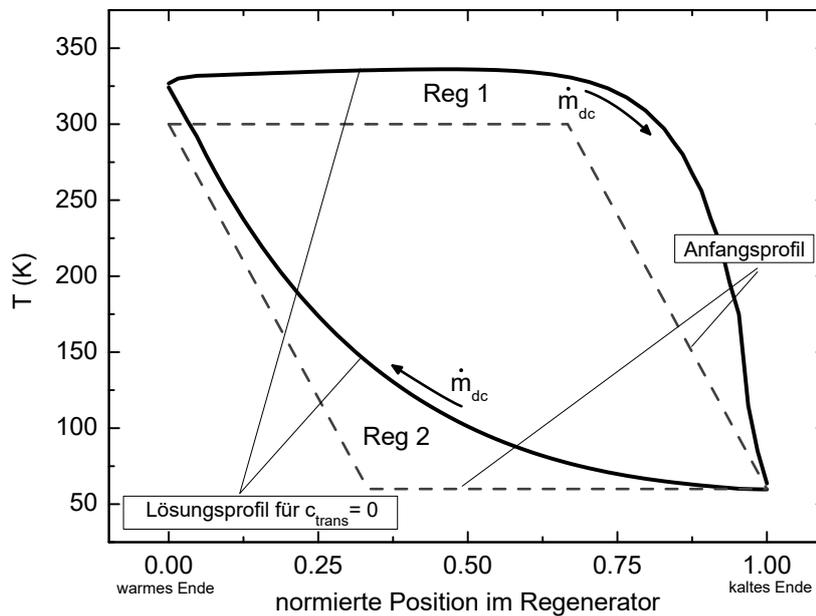


Abbildung 5.14: Temperaturprofile beider Regeneratorthälften ohne radiale Wärmeleitungsbrücken ( $c_{trans} = 0$ ).

führt zu einer Offsetverschiebung der beiden Enthalpieflüsse in entgegengesetzten Richtungen. Sind die beiden Regeneratorteile thermisch nicht gekoppelt, ergibt sich ein Temperaturprofil wie in Abbildung 5.14 gezeigt. Während sich in einem Regenerator die Mitteltemperatur erhöht, sinkt sie im anderen ab. Die Ursache hierfür liegt in dem durch den Massenstrom  $\dot{m}_{dc}$  bewirkten zusätzlichen Enthalpiefluss, dessen Richtung durch die Pfeile in Abbildung 5.14 verdeutlicht wird.

In der Energiebilanz in Abbildung 5.15 teilt sich der Enthalpiefluss im Regenerator in zwei Stränge auf. Der auftretende zirkuläre Massenfluss transportiert zusätzlich Wärme in den Regenerator 1. Dies führt dort zu einer Erhöhung des Enthalpieflusses. Auf der anderen Seite kühlt der Massenfluss vom kalten Ende her die Matrix im Regenerator 2 ab, sodass der Enthalpiefluss dort verringert wird. In der Summe führt dies zu einer Gesamterhöhung der Verluste, da aufgrund des höheren Energieniveaus bei Raumtemperatur der Massenfluss in Regenerator 1 mehr Energie transportieren kann als in Regenerator 2. Die starken Einbrüche im Enthalpiefluss an den Enden der Regeneratoren werden durch den Übergang vom quasi isothermen Regenerator zu den Wärmetauschern verursacht. Die Einbrüche treten auf, wenn das Arbeitsgas in den Regenerator strömt, da es noch nicht die Temperatur der Matrix angenommen hat. Dadurch wirkt dieser Teil des Regenerators quasi als "Verlängerung" der

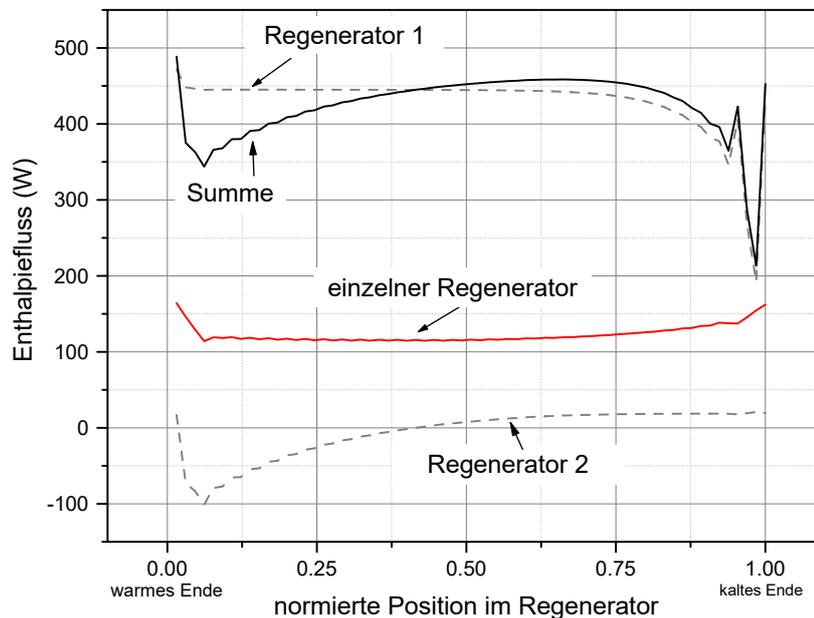


Abbildung 5.15: Enthalpieflüsse im gesplitteten und im einzelnen Regenerator.

angeschlossenen Wärmetauscher.

Das im Experiment beobachtete plötzliche Einsetzen der Temperaturinhomogenität (siehe Abschnitt 8.1) sowie deren danach eintretender Anstieg lassen vermuten, dass das Phänomen auf einem sich selbst verstärkenden Effekt beruht. Deshalb wurde zunächst untersucht, in wie weit sich durch eine Erhöhung der transversalen Wärmeleitfähigkeit eine Absenkung der maximalen azimuthalen Temperaturdifferenz erreichen lässt und somit sich ein dämpfender Effekt auf die Verluste einstellt. Abbildung 5.16 zeigt die mit SAGE simulierten Temperaturprofile bei unterschiedlichen Kopplungsfaktoren  $c_{trans}$ . Während bei  $c_{trans} = 0,1$  m die Profile in beiden Regeneratoren noch übereinanderliegen, erkennt man bei  $c_{trans} \leq 0,05$  m eine Aufspaltung, die sich hin zu kleineren Kopplungsfaktoren vergrößert.

Abbildung 5.17 zeigt den DC-Massenfluss in Abhängigkeit vom Kopplungsfaktor  $c_{trans}$ . Wie in Abbildung 5.16 ist auch hier deutlich zu erkennen, dass unterhalb einer kritischen Kopplungsstärke (in diesem Fall  $c_{trans} \leq 0,07$  m) der DC-Massenfluss abrupt beginnt und dann monoton ansteigt. Bei einem Kopplungsfaktor von Null (keine Kopplung) tritt eine Sättigung ein, die den maximalen DC-Massenfluss auf ca. 350 mg/s begrenzt. Der DC-Massenfluss erzeugt einen zusätzlichen Nettoenthalpiefluss vom warmen zum kalten Ende des Regenerators von der Größenordnung  $\dot{H} = \dot{m}_{dc} c_p (T_w - T_k)$  und stellt deshalb einen Verlust dar.

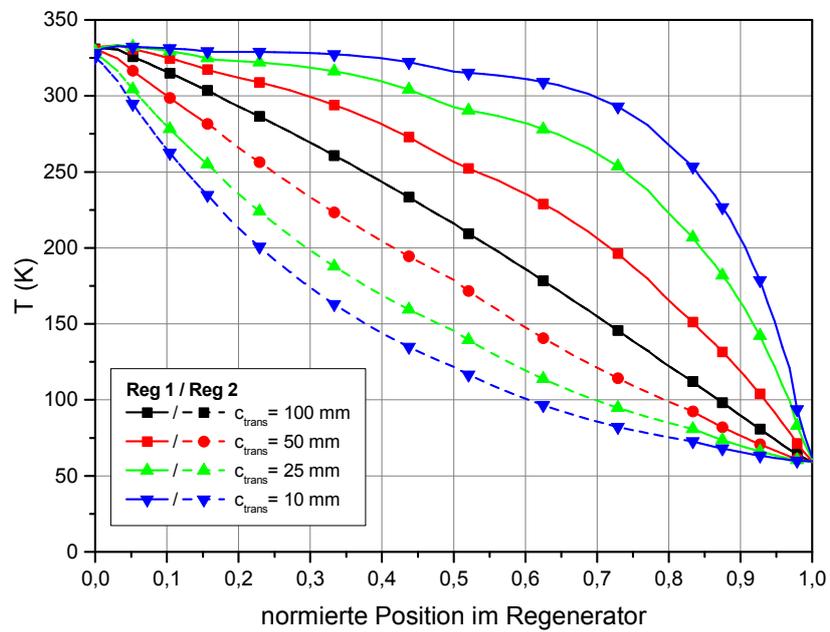


Abbildung 5.16: Mit SAGE simulierte Temperaturprofile im Regenerator bei unterschiedlichen Kopplungsfaktoren  $c_{trans}$  bei einer pV-Leistung von 7 kW und einer Kaltkopftemperatur  $T_c$  von 60 K.

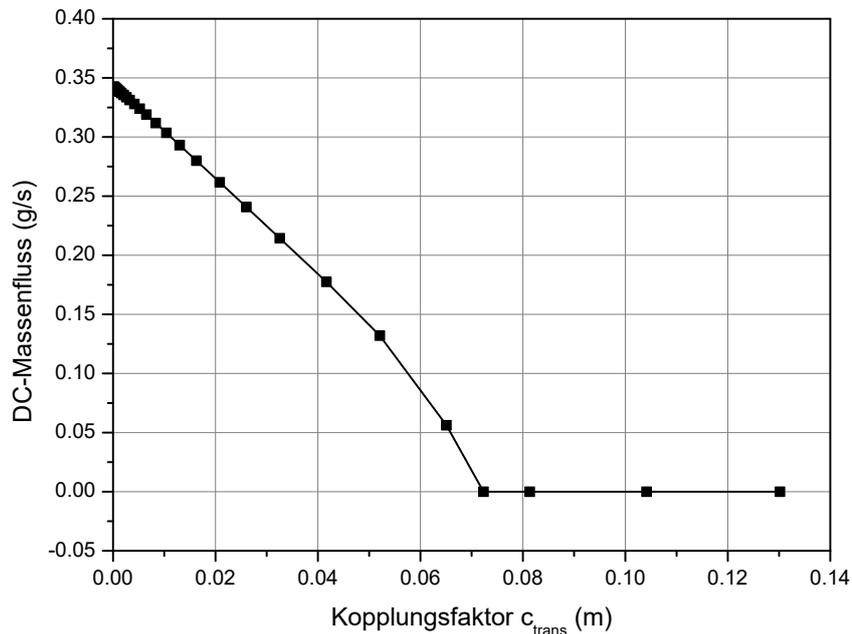


Abbildung 5.17: DC-Massenfluss im Regenerator in Abhängigkeit von  $c_{trans}$  bei einer pV-Leistung von 7 kW und einer Kaltkopftemperatur  $T_c$  von 60 K.

In Abbildung 5.18 ist die Summe der Enthalpieflüsse beider Regeneratoren zwischen dem Regenerator und kaltem Wärmetauscher in Abhängigkeit von  $c_{trans}$  aufgetragen. Bei niedrigen Kopplungsfaktoren  $c_{trans} \rightarrow 0$  erreicht der Enthalpiefluss den Maximalwert von ca. 570 W. In diesem Fall beträgt der zusätzliche Verlust durch den DC-Massenfluss über 220 W.

In Abbildung 5.19 ist die Temperaturdifferenz zwischen den Regeneratormitten in Abhängigkeit von  $c_{trans}$  aufgetragen. Wie zu erwarten, verringert sich die Temperaturdifferenz bei größeren Kopplungsfaktoren  $c_{trans}$ . Oberhalb des kritischen Wertes von  $c_{trans} = 0,07$  m sinkt diese Differenz auf Null ab und der parasitäre DC-Massenfluss verschwindet.

Die experimentellen Daten zeigen ebenfalls, dass neben der Wärmeleitfähigkeit der Matrix auch die pV-Leistung einen Einfluss auf den DC-Massenfluss hat. Abbildung 5.20 zeigt die Zunahme des DC-Massenflusses bei Erhöhung der pV-Leistung von 0,6 auf 7 kW ohne thermische Kopplung der Regeneratoren. Ab einem kritischen AC-Massenfluss von ca. 40 g/s steigt der DC-Massenfluss linear mit dem AC-Massenfluss an. Die Steigung der linearen Ausgleichsgeraden  $\dot{m}_{dc}/\dot{m}_{ac}$  beträgt etwa 3700  $\mu\text{g/g}$ .

Die Simulationen zeigen, dass durch einen vorgegebenen Temperaturunterschied ein DC-Massenfluss in zwei identischen, parallelen Regeneratoren ausgelöst werden kann. Der damit verbundene Enthalpiefluss wirkt als zusätzliche Last auf den Kaltkopf, sodass die

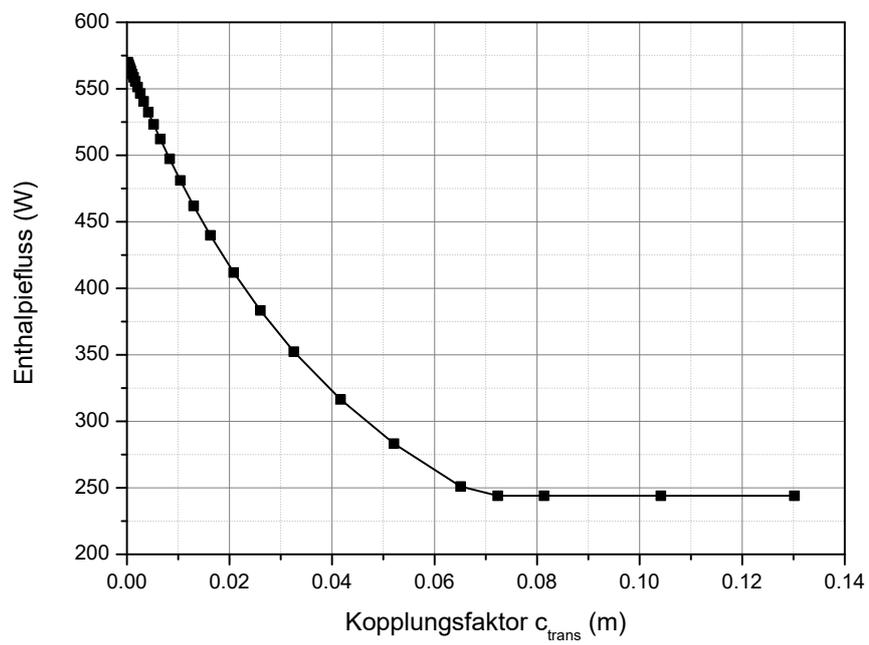


Abbildung 5.18: Summe der Enthalpieflüsse in beiden Regeneratoren in Abhängigkeit von  $c_{trans}$  bei einer pV-Leistung von 7 kW und einer Kaltkopftemperatur  $T_c$  von 60 K.

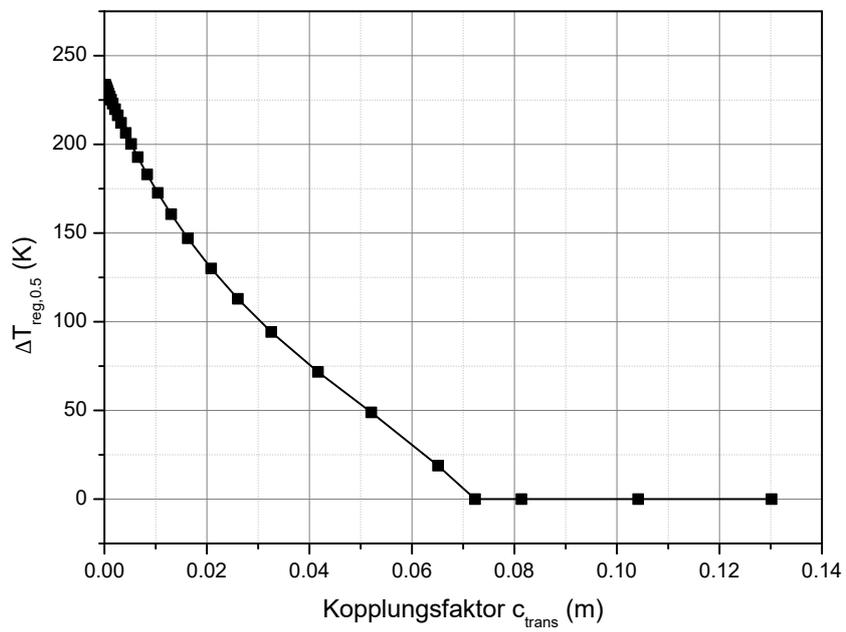


Abbildung 5.19: Transversale Temperaturdifferenz zwischen den Regeneratormitten in Abhängigkeit von  $c_{\text{trans}}$  bei einer pV-Leistung von 7 kW und einer Kaltkopftemperatur von 60 K.

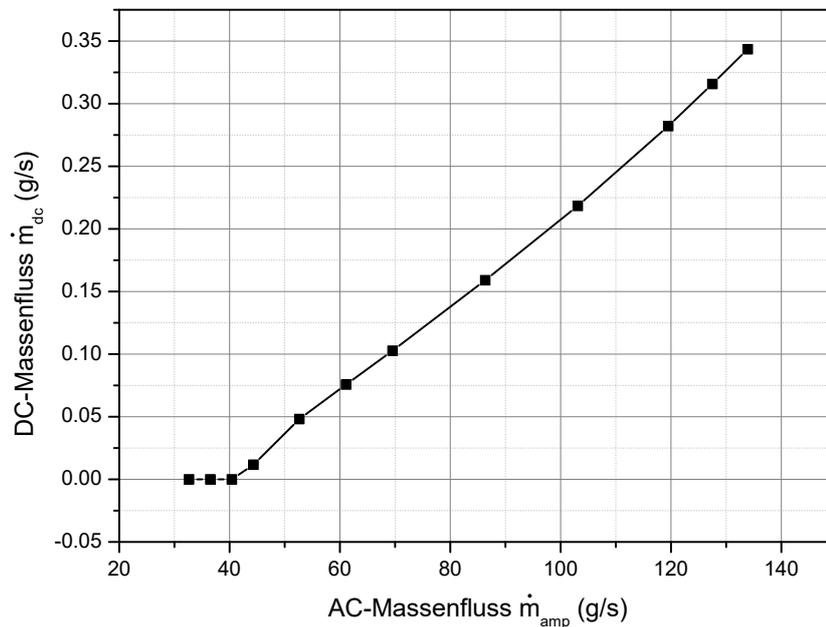


Abbildung 5.20: DC-Massenfluss in Abhängigkeit des AC-Massenflusses bei einer pV-Leistung zwischen 0,6 und 7 kW, einer Kaltkopf­temperatur von 60 K und  $c_{trans} = 0$ .

Kühlleistung in erheblichem Maße reduziert wird. Das Einsetzen der Inhomogenität hängt u.a. vom Kopplungsfaktor  $c_{trans}$  ab, der den Durchmesser und die radiale Leitfähigkeit der Regeneratorsiebe beschreibt, sowie der pV-Leistung ab. Weitere Abhängigkeiten werden im experimentellen Kapitel 8 aufgezeigt.

Andersen et. al. sehen die Ursache für den DC-Massenfluss größtenteils in einer deformierten (nicht sinusförmigen) Form des Druckwellenabfalls über dem Regenerator [88]. In [89] vermuten So et. al., dass der Ursprung der parasitären Strömung im nicht-linearen Flusswiderstand von Siebregeneratoren begründet liegt. Bei Andersen et. al. führen eine nicht verschwindende Temperaturos­zillation und damit eine zeitlich veränderliche Viskosität zu einer leichten Verstärkung der Strömung. So et. al. hingegen gehen von einer zeitlich konstanten Viskosität aus, sodass dieser Effekt unberücksichtigt bleibt. Sie führen aber an, dass ein erhöhter Enthalpiefluss die Ausprägung der Strömung dämpfen soll, was wegen Gleichung 3.3 im Widerspruch zu Andersen steht. Beide Veröffentlichungen weisen darauf hin, dass Regeneratoren mit linearem Flusswiderstand keine Inhomogenität erzeugen sollten. Eine Überprüfung mittels SAGE zeigte jedoch, dass in bestimmten Fällen, selbst in Modellen mit linearem Flusswiderstand eine Inhomogenität aufrecht erhalten bleibt. Darauf weist auch Gedeon in [90] hin. Im folgenden Abschnitt wird nun ein verallgemeinertes Modell der parasitären Regeneratorströmung entwickelt.

## 6 Analytische Herleitung der parasitären Regeneratorströmung

### 6.1 Linearer Reibungskoeffizient

Um das im vorhergehenden Kapitel beschriebene Strömungsphänomen näher zu untersuchen, wird nun, wie in [90] vorgestellt, der DC-Massenfluss  $\dot{m}_{dc}$  in zwei parallelen Regeneratoren hergeleitet. Dieses Konzept wird im nächsten Unterabschnitt dann auf den nicht-linearen Reibungskoeffizienten, wie er z.B. in Siebstapelregenerator auftritt, erweitert. Der Begriff "linearer Reibungskoeffizient" leitet sich aus dem Darcy-Gesetz (rechte Seite von Gleichung 4.2 auf Seite 42) für den Fall einer eindimensionalen Strömung ohne Totvolumen (linke Seite von Gleichung 4.2 ist Null) ab. Die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{f}{d_h} \frac{\rho |u| u}{2} \quad (6.1)$$

$$= -\frac{f}{2 d_h^2} R_e \mu u \quad (6.2)$$

beschreibt dann den viskosen Reibungsverlust für den eindimensionalen Fall. Der Reibungsfaktor  $f$  ist im Falle der linearen Reibung antiproportional zur Reynoldszahl  $R_e = \rho |u| d_h / \mu$ , sodass der Druckverlust  $\frac{\partial p}{\partial x}$  linear mit der Gasgeschwindigkeit  $u$  ansteigt. Dies ist in laminaren Rohrströmungen ( $f = 64/R_e$ ) oder in laminaren Strömungen zwischen ebenen Platten ( $f = 96/R_e$ ) der Fall. Bei nicht-linearer Strömung wird im einfachsten Fall der Reibungsfaktor um einen konstanten Term erweitert, z.B.  $f = \frac{c_1}{R_e} + c_2$ . Damit hängt der Druckverlust nun linear-quadratisch von der Gasgeschwindigkeit  $u$  ab.

Für den Rechenweg wird zunächst angenommen, dass aufgrund der Massenerhaltung der DC-Massenfluss pro Strömungsfläche (oder Massenflussdichte)  $(\rho u)_{dc}$  zeitlich und räumlich konstant ist und in den parallelen Regeneratoren A und B jeweils ein umgekehrtes Vorzeichen trägt. Setzt man eine lineare Expansion der Massenflussdichte  $\rho u$  wie in Abschnitt 4.2 beschrieben mit einem Ansatz bis zur ersten Ordnung für die Dichte und Geschwindigkeit ein

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_m + \rho_1 \sin(\omega t) \\ u &= u_m + u_1 \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

so ergibt sich für den Massenfluss

$$\dot{m} \propto \rho_m u_m + \rho_m u_1 \sin(\omega t + \varphi) + \rho_1 u_m \sin(\omega t) + \frac{\rho_1 u_1}{2} \cos \varphi - \frac{\rho_1 u_1}{2} \cos(2\omega t + \varphi).$$

Der Winkel  $\varphi$  gibt die Phasenverschiebung zwischen Geschwindigkeit  $u_1$  und Dichteoszillation  $\rho_1$  an. Für den DC-Massenfluss sind nur die zeitlich konstanten Terme relevant, da sich diese nicht herausmitteln, sodass sich

$$\dot{m}_{dc} \propto (\rho u)_{dc} = \rho_m u_m + \frac{\rho_1 u_1}{2} \cos \varphi \quad (6.3)$$

ergibt. In Systemen ohne DC-Massenfluss ( $\dot{m}_{dc} = 0$ ) müssen beide Terme gleich groß sein (mit unterschiedlichen Vorzeichen). Da der Term  $\rho_1 u_1 \cos \varphi$  in realen Kühlern von Null verschieden ist, führt dies zu einem DC-Volumenfluss  $u_m A$ , der wiederum einen Mitteldruckabfall entlang des Regenerators bzw. Pulsrohrs bewirkt. Da dieser im quasi isothermen Regenerator und im adiabatischen Pulsrohr unterschiedlich ist, führt dies letztlich dazu, dass es z.B. in Double-Inlet-Pulsrohrkühlern ohne Gegenmaßnahmen zu einem intrinsischen DC-Massenfluss kommt.

Die im Anhang (Abschnitt 10.1) und in [91] im Detail ausgeführte Herleitung soll hier kurz skizziert werden. Zunächst werden in Gleichung 6.3 die Geschwindigkeiten  $u_m$  und  $u_1$  mit Hilfe des Darcy-Gesetzes 6.1 durch den Mitteldruckabfall  $\frac{\partial p_m}{\partial x}$  bzw. durch den Druckhubabfall  $\frac{\partial p_1}{\partial x}$  ersetzt. Diese Ersetzung ist jedoch noch unvollständig, da sie nur den inkompressiblen Teil der Druckwelle  $p_{1i}$  enthält. Inkompressibel bedeutet hier, dass kein Gas im Totvolumen gespeichert wird, bzw. die Massenflussdichte  $\rho u_c$  über die Länge des Regenerators konstant bleibt. Der kompressible Teil  $p_{1c}$  wird durch den Massenfluss in das Totvolumen des Regenerators verursacht und wird in diesem Unterabschnitt weiter unten behandelt. Als Zwischenergebnis erhält man nun:

$$(\rho u)_{dc} = -\frac{2 \rho_m d_h^2}{c_1 \mu} \frac{\partial p_m}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{2 \rho_1 d_h^2}{c_1 \mu} \cdot \frac{\partial p_{1i}}{\partial x} F_1^+$$

wobei  $F_1^+$  ein Polynom darstellt ( $F_1^+ = F_1 = 1$  im linearem Fall), mit dem die nicht-lineare Ergänzung eingeführt wird (siehe nächster Unterabschnitt).  $p_m$  bezeichnet dabei den zeitlichen Mittelwert und  $p_{1i}$  die Amplitude der inkompressiblen Druckwelle  $p_1$ .

Nach dem Zwischenstellensatz der Differenzialrechnung lassen sich die partiellen Ableitungen an einem Punkt  $x_c$  durch Differenzenquotienten ersetzen:  $\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_c} = \frac{\Delta p}{L}$ , mit  $\Delta p$  dem Druckhubabfall über dem Regenerator und  $L$  der Länge des Regenerators. Nach dem

Einsetzen erhält man als weiteres Zwischenergebnis:

$$(\rho u)_{dc}|_{x_c} = -\frac{2}{c_1 L} \left( C \Delta p_m + \frac{1}{2} D \right) \quad (6.4)$$

mit  $C = \frac{d_h^2 \rho_c}{\mu_c}$  und  $D = \frac{d_h^2 \rho_{1c}}{\mu_c} \cdot \Delta p_{1i} F_1$ . Der Index  $c$  stellt eine Größe am Punkt  $x_c$  dar. Da der Punkt  $x_c$  für beide Regeneratoren unterschiedlich sein wird, der DC-Massenfluss (bis auf das Vorzeichen) jedoch gleich ist, lassen sich die beiden Gleichungen für Regenerator A und B zu Null addieren und durch Umstellen  $\Delta p_m$  in Gleichung 6.4 eliminieren.

Wie das Simulationsergebnis in Abbildung 5.20 auf Seite 87 nahelegt, nimmt der DC-Massenfluss linear mit dem AC-Massenfluss zu (siehe auch Abbildung 8 in [92]). Eine Normierung des DC-Massenflusses auf den AC-Massenfluss erscheint deshalb sinnvoll. Nimmt man noch an, dass sich eine Störung in beiden Regenerator symmetrisch zu einem ungestörten Regenerator verhält, so kann man sich weitere Vereinfachungen zu Nutze machen und erhält nun

$$\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} = \frac{1}{4} \frac{\left[ \frac{\rho_1}{\rho_c} \cdot \Delta p_{1i} F_1 \right]_A^B}{|\Delta p_{1i} F_1|_0}, \quad (6.5)$$

wobei mit dem Index "0" Größen im ungestörten Regenerator ohne DC-Massenfluss gekennzeichnet sind und mit  $[\dots]_A^B$  die Differenz des Ausdrucks in der Klammer ausgewertet für die Regeneratoren B und A abgekürzt ist.

Um die lokale Dichteoszillation  $\frac{\rho_1}{\rho_c}$  in Gleichung 6.5 zu eliminieren, wird sie zunächst mit Hilfe der idealen Gasgleichung in eine Druck- und Temperaturoszillation zerlegt:

$$\frac{\rho_1}{\rho_m} = \frac{p_1}{p_m} - \frac{T_1}{T_m}.$$

$T_m$  bezeichnet hier die mittlere Temperatur (vgl. Abschnitt 4.2). Diese Näherung gilt für kleine Amplituden, wie sie in Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern vorkommen (vgl. u.a. [60]). Die Temperaturoszillation  $T_1$  lässt sich mit Hilfe der Energiegleichung 4.4 auf Seite 43 ersetzen, sodass man nach einem längeren Rechenweg (siehe Anhang Abschnitt 10.1 auf Seite 155) einen Ausdruck für die Dichteoszillation

$$\frac{\rho_1}{\rho_m} = \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} i E_1 \right) \frac{p_1}{p_m} - E_2 (1 - i E_1) \frac{\Delta p_{1i}}{p_m} F_1$$

erhält, mit  $E_1$  und  $E_2$  wie im Anhang definiert. An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Originalveröffentlichungen [91, 90] einen Vorzeichenfehler enthalten, der auch vom Autor bestätigt wurde. Die in dieser Arbeit enthaltenen Referenzwerte zum Folienregenerator wurden mit der korrigierten Fassung berechnet. Diese sind deshalb zu den in [90] veröffentlichten

Werten verschieden. Zur Auswertung der Gleichung 6.5 auf der vorherigen Seite fehlt noch die Bestimmung des Punktes  $x_c$  sowie die inkompressible Druckoszillation  $\Delta p_{1i}$ . Für die Bestimmung von  $x_c$  wird nochmal das Darcy-Gesetz herangezogen:

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dx} &= -\frac{u_i}{2d_h^2}c_1\mu \\ &= -\frac{R(\rho u_i)T}{2d_h^2p}c_1\mu.\end{aligned}\quad (6.6)$$

In einem Temperaturbereich von 1000 bis 100 K lässt sich die Viskosität  $\mu$  von Helium durch ein Potenzgesetz annähern:  $\mu(T) \cong \mu_a \left(\frac{T}{T_a}\right)^{0,7}$ , mit  $\mu_a$  als Viskosität bei einer Referenztemperatur  $T_a$  (z.B. 300 K). Im Fall des linearen Reibungskoeffizienten kann man damit Gleichung 6.6 direkt über die Regeneratorlänge integrieren, wenn ein Temperaturprofil  $T(x)$  vorgegeben wird, sodass man den inkompressiblen Druckhubabfall über dem Regenerator erhält. Bei nicht-linearem Reibungskoeffizient muss dagegen  $T_c$  iterativ mit Hilfe des kompressiblen Druckhubverlusts  $\Delta p_{1c}$  aus dem nächsten Absatz bestimmt werden (siehe auch Abschnitt 10.4 auf Seite 176 im Anhang). Setzt man das Ergebnis mit Gleichung 6.6 für  $T = T_c$  gleich, kann diese nach  $T_c$  umgestellt und mittels eines vorgegebenen Temperaturprofils  $x_c$  bestimmt werden.

Der im Experiment (oder in der Simulation) bestimmbare Druckhubabfall über dem Regenerator  $\Delta p$  lässt sich, wie schon beschrieben, in einen inkompressiblen  $\Delta p_i$  und einen kompressiblen Teil  $\Delta p_c$  zerlegen:  $\Delta p = \Delta p_i + \Delta p_c$ . Den kompressiblen Teil erhält man, indem man in der Massenerhaltungsgleichung (Gleichung 4.1 auf Seite 42) die Zeitableitung der Dichte durch eine Zeitableitung des Drucks ersetzt (mit Hilfe der idealen Gasgleichung). Unter Annahme einer über die Regeneratorlänge konstanten Porosität der Siebmatrix liefert das Integral die Massenflussdichte

$$\rho u_c = -\frac{\dot{p}}{R} \int \frac{dx}{T} \quad (6.7)$$

bzw. die Gasgeschwindigkeit  $u_c$  der kompressiblen Strömung. Diese lässt sich wie wieder in das Darcy-Gesetz einsetzen, sodass man nach erneuter Integration den kompressiblen Druckhubabfall  $\Delta p_c$  erhält:

$$\Delta p_{1c} = \omega \frac{p_1}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} F_2 \quad (6.8)$$

mit  $F_2$  wie im Anhang definiert. Mit Hilfe von Gleichung 6.8 und einem vorgegebenen Druckhubabfall  $\Delta p$  über dem Regenerator kann nun der inkompressible Druckhubabfall  $\Delta p_{1i}$  in Gleichung 6.5 durch bekannte Variablen ersetzt werden. Durch Ordnung der Terme

nach den Faktoren  $|\Delta p|^2$ ,  $i p_1 \cdot \Delta p$  und  $|p_1|^2$  erhält man schließlich für den linearen Fall die Gleichung

$$\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} = \underbrace{C_2 |\Delta p|^2 [d_h^4 \tau_2]_0^A}_{\text{Term 1}} + \underbrace{C_3 (i p_1 \cdot \Delta p) [d_h^2 \tau_3]_0^A}_{\text{Term 2}} + \underbrace{C_4 |p_1|^2 [\tau_4]_0^A}_{\text{Term 3}} \quad (6.9)$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{16 (\gamma - 1) N_u k_a T_a p_m |\Delta p_{1i} F_1|_0} \\ C_2 &= 4 C_1 \frac{\gamma p_m^2}{c_1 \mu_a L^2} \\ C_3 &= 2 C_1 \omega p_m \\ C_4 &= C_1 c_1 \omega^2 L^2 \mu_a \end{aligned}$$

sowie den temperaturprofilabhängigen Faktoren

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{T_a^{1.7}}{T_c^{1.7}} \\ \tau_2 &= F_1^2 \frac{T_a^{2.4} T_\xi}{T_c^{3.4}} \\ \tau_3 &= F_1 (\gamma - 1) \tau_1 - 2 \gamma \tau_2 F_2 \\ \tau_4 &= F_1 (1 - \gamma) F_2 \tau_1 + \gamma \tau_2 F_2^2, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe sich qualitativ Aussagen über Herkunft und Stärke des DC-Massenflusses treffen lassen. Im Folgenden wird  $\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0}$  der DC-Flusskoeffizient genannt, der das Verhältnis aus DC-Massenfluss zum AC-Massenfluss bezeichnet. Dies ist formal das gleiche Ergebnis wie in [90], bei dem der Folienabstand  $g$  durch den halben hydraulischen Durchmesser  $d_h$  ersetzt wurde und die Konstante  $c_1$  im linearen Reibungskoeffizienten frei wählbar ist. Die Bedeutung der einzelnen Terme wird im übernächsten Abschnitt diskutiert.

## 6.2 Nicht-lineare Ergänzung

Dieser Abschnitt erläutert die Terme, die die nicht-lineare Ergänzung einführt. Wie im vorherigen Unterabschnitt wird bei der Ersetzung der Gasgeschwindigkeit  $u$  durch den Druckhubverlust  $\frac{\partial p_1}{\partial x}$  in Gleichung 6.3 auf Seite 89 wieder das Darcy-Gesetz angewandt. Da  $\rho_m \gg \rho_1$  ist, muss  $|u_m| \ll |u_1|$  sein, damit sich die Terme im Fall  $\dot{m}_{dc} = 0$  aufheben können. Der Reibungskoeffizient  $f$  wird daher für die langsame Strömung  $u_m$  nur linear ( $f = c_1/Re$ ) und für die schnellere Strömung  $u_1$  nicht-linear ( $f = c_1/Re + c_2$ ) angesetzt. Der

bei der Substitution entstehende Wurzelterm wird der Einfachheit halber durch ein Polynom dritter Ordnung ersetzt (siehe Abschnitt 10.1 auf Seite 155 im Anhang). Das Polynom ist so gewählt, dass sich mit den Koeffizienten  $a = 1$ ,  $b = c = 0$  und dem hydraulischen Durchmesser  $d_h = 2g$ , mit  $g$  für den Folienabstand, der gleiche Ausdruck wie in [90] für Folienregeneratoren ergibt.

In Gleichung 6.7 geht Gedeon implizit von einem konstanten Druckhub über dem Regenerator aus. Betrachtet man Tabelle 6.2 auf Seite 96 mit den verwendeten Simulationsdaten so ist diese Vereinfachung akzeptabel, da im Folienregenerator  $\Delta p \ll p_1$  ist. Beim Siebregenerator ist diese Vereinfachung jedoch nicht mehr möglich, sodass die Zeitableitung des Druckhubs  $\dot{p}$  in Gleichung 6.7 mit integriert werden muss. Da der Verlauf des Druckhubs entlang des Regenerators nicht bekannt ist, wird hier eine Näherung basierend auf der Temperaturabhängigkeit der Viskosität angenommen:

$$p_1(x) = p_1(0) + \frac{\Delta p}{N} \int_0^x \left( \frac{T_m(x)}{T_a} \right)^{1.7} dx$$

mit der Normierung  $N = \int_0^L \left( \frac{T_m(x)}{T_a} \right)^{1.7} dx$ .

Die Rechnung erfolgt nun analog wie im letzten Unterabschnitt beschrieben. Um eine bessere Vergleichbarkeit zu ermöglichen, werden die durch die nicht-lineare Ergänzung hinzugekommenen vier Terme 4-7 einfach zur bekannten linearen Lösung von Gedeon hinzuaddiert. Als Ergebnis erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} = \frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0 \text{ linear}} + \underbrace{C_4 |\Delta p|^2 [\tau_5]_0^A}_{\text{Term 4}} - \underbrace{C_5 (i p_1 \cdot \Delta p) [\tau_6/d_h^2]_0^A}_{\text{Term 5}} + \underbrace{(p_1 \cdot \Delta p) [C_4 \tau_7 - C_6 \tau_8]_0^A}_{\text{Term 6+7}} \quad (6.10)$$

mit den Konstanten

$$C_5 = 4 C_1 c_1 (\gamma - 1) k_a N_u L^2 \mu_a \omega / p_m$$

$$C_6 = 8 C_1 (\gamma - 1) k_a N_u$$

und der Temperaturabhängigkeit

$$\tau_5 = F_3^2 \gamma \tau_2$$

$$\tau_6 = F_1 F_3 T_a$$

$$\tau_7 = 2 F_2 F_3 \tau_2 \gamma - F_1 F_3 \tau_1 (\gamma - 1)$$

$$\tau_8 = F_1 T_a.$$

Terme mit  $F_3$  gehen auf den x-abhängigen inkompressiblen Druckhubabfall im Regenerator zurück, während der Term  $\tau_8$  nur durch die Nichtlinearität des Reibungsfaktors hervorgerufen wird.

Gleichung 6.10 auf der vorherigen Seite beschreibt Richtung und Stärke eines möglichen DC-Massenflusses in zwei identischen parallelen Regeneratoren als Modell für einen realen Regenerator aus gestapelten Sieben. Ein initialer DC-Massenfluss stellt jedoch erst den eventuellen Beginn einer Zirkularströmung dar, da aufgrund selbverstärkender oder -abschwächender Effekte eine anfängliche Strömung zu- bzw. wieder abnehmen kann. Wie die Simulation im vorherigen Abschnitt sowie die Experimente im nächsten Kapitel zeigen, entwickelt sich der Massenfluss jedoch erst ab einem bestimmten Schwellenwert. Eine Abschätzung basierend auf der Analyse von Gedeon in [91] unter Berücksichtigung des nicht-linearen Reibungsfaktors wird daher in Unterabschnitt 6.4 auf Seite 97 gegeben.

### 6.3 Diskussion der Einflussfaktoren auf den DC-Massenfluss im Regenerator

In diesem Unterabschnitt werden zunächst die Schlussfolgerungen aus [90] zusammengefasst und dann auf den Fall eines nicht-linearen Reibungskoeffizienten verallgemeinert. Betrachtet man die einzelnen Terme in Gleichung 6.9, so stellt man zunächst fest, dass die Konstanten  $C_x$  stets positiv sind, dies gilt auch für den nicht-linearen Fall. Dies ist jedoch eine willkürliche Wahl, um additive und subtraktive Terme besser erfassen zu können. Die Temperaturabhängigkeit in den  $\tau$ -Faktoren hängt teilweise vom Vorzeichen des Temperaturgradienten  $T_\xi$  ab, der für Kryokühler immer negativ und für Stirling- oder thermoakustische Motoren immer positiv ist:  $\tau_2$  hat das Vorzeichen des Temperaturgradienten und ist deshalb für Kryokühler immer negativ.  $\tau_3$  hängt von dem Produkt aus  $\tau_2$  und  $F_2$  ab. Letzterer hat in der Regel wie  $\tau_2$  das gleiche Vorzeichen wie der Temperaturgradient, und somit ist  $\tau_3$  positiv (für Kryokühler und Motoren).  $\tau_4$  hat immer das Vorzeichen des Temperaturgradienten, da hier zusätzlich mit  $F_2$  multipliziert wird. Allerdings können sich die Vorzeichen nach der Subtraktion der Regeneratoranteile wieder drehen. Dies ist insbesondere bei einer Störung des Temperaturprofils in Regenerator A zu beobachten.

Das Skalarprodukt im zweiten Term von Gleichung 6.9 ist in der Regel klein, da der Massenfluss und somit auch der Druckhubverlust  $\Delta p$  bei guten Regeneratoren in etwa in Phase mit der Druckwelle  $p_1$  ist, bzw.  $90^\circ$  aus der Phase mit  $i p_1$ . Das Vorzeichen hängt hier vom Vorzeichen des Winkels zwischen  $i p_1$  und  $\Delta p$  ab. Nach [90] ist das Skalarprodukt für Kryokühler oft negativ und für Motoren positiv. Die Richtung des DC-Massenflusses wird deshalb hauptsächlich vom Vorzeichen des Temperaturgradienten bestimmt, der für

Tabelle 6.1: Terme und Summe von Gleichung 6.10 auf Seite 93 bei einer Störung des hydraulischen Durchmessers um +2.2% bzw. des Temperaturprofils um +10 K im Falle eines Kryokühlers.

$\frac{\dot{m}_{dc} _A}{ \dot{m}_1 _0} * 10^6$	Term 1	Term 2	Term 3	Term 4	Term 5	Term 6	Term 7	Summe
linear, $\Delta d_h$	-359	22	0	0	-2	0	0	-339
nicht linear, $\Delta d_h$	-46	-5	<1	<1	94	<1	-1848	-1806
linear, $\Delta T$	409	-62	48	<1	-4	2	0	393
nicht linear, $\Delta T$	69	11	1	<1	-63	<1	2330	2348

Kryokühler negativ und für Motoren positiv ist.

Der Faktor  $F_1$ , den die nicht-lineare Erweiterung mit Gleichung 6.10 einführt, ist reell und liegt stets zwischen 0 und 1. Er berücksichtigt die im Vergleich zum linearen Ansatz erhöhte Reibung, die durch den quadratischen Term verursacht wird. Der Beitrag des inkompressiblen Druckhubverlustes, welcher durch den Faktor  $F_3$  bestimmt wird, ist vernachlässigbar, da die Terme 4 und 6 sehr klein sind. Einzig der rechte Summand  $C_6 [\tau_8]_0^A$ , in dem  $F_3$  nicht vorkommt, hat einen bestimmenden Einfluss auf den DC-Massenfluss. Sein Vorzeichen hängt von der Differenz der Faktoren  $F_1$  der Regeneratoren A und 0 ab.

Wie auch im linearen Fall taucht in der nicht-linearen Erweiterung ein Skalarprodukt von  $p_1$  und  $\Delta p$  auf (Term 6). Dieses ist jedoch größer als in Term 2, da es die Teile von  $p_1$  und  $\Delta p$  berücksichtigt, die in Phase liegen. Im Vergleich zu Gleichung 6.9 fehlt in der nicht-linearen Erweiterung ein von  $|p_1|^2$  abhängiger Term, jedoch ist der erste Term wie in Gleichung 6.9 proportional zu  $|\Delta p|^2$ , hängt aber nicht vom hydraulischem Durchmesser ab.

Um einen DC-Massenfluss zu generieren, werden in den folgenden Beispielberechnungen zwei Varianten durchgespielt. Die erste Variante ist eine Größenänderung des hydraulischen Durchmessers in Regenerator "A" in Bezug auf einen ungestörten Regenerator "0". Dies tritt z.B. bei Schwankungen im Folienabstand auf, oder bei nicht-homogener Verteilung der Packungsdichte in Siebregeneratoren (Störung in der Regeneratorporosität). Variante zwei ist eine parabolische Verzerrung des Temperaturprofils in Regenerator "A" ebenfalls in Bezug auf Regenerator "0", in dem ein lineares Profil angenommen wird. Eine solche Störung kann z.B. aufgrund inhomogener Anströmung des Regenerators oder aufgrund einer seitlichen thermischen Last (Vorkühlung) auftreten. Tabelle 6.1 stellt die vorzeichenkorrigierten Ergebnisse aus [91] den Ergebnissen der nicht-linearen Erweiterung aus dieser Arbeit gegenüber.  $\Delta d_h$  bezeichnet dabei eine Erhöhung des hydraulischen Durchmessers um 2.2%, während  $\Delta T$  ein parabolische Störung im Temperaturprofil mit einer maximalen Amplitude von 10 K

Tabelle 6.2: Daten der simulierten Regeneratoren aus Gedeon [91] und dieser Arbeit (HLPRK).

Größe	Gedeon	HLPRK	Größe	Gedeon	HLPRK
$d_h$ ( $\mu\text{m}$ )	180	54.3	$N_u$ (-)	8.23	4.57
$p_1$ (kPa)	272@0°	342@0°	$f$ (Hz)	100	50
$\Delta p$ (kPa)	7.1@-193°	164@-143°	$T_a$ (K)	300	300
$p_m$ (kPa)	2700	2000	$T_e$ (K)	100	60
$k_a$ (W/m*K)	0.157	0.157	$c_1$ (-)	96	120
$\mu_a$ ( $\mu\text{Pa*s}$ )	20	20	$c_2$ (-)	0	2
$L$ (m)	0.1	0.075			

in der Mitte des Regenerators "A" bezeichnet. In Tabelle 6.2 sind die für die Berechnung verwendeten Randbedingung aufgelistet. Ein Hauptunterschied zwischen dem von Gedeon in [91] und [90] untersuchten Folienregenerator zum hier untersuchten Siebstapelregenerator ist der niedrige Druckhubabfall über dem Folienregenerator. Des Weiteren hat der von Gedeon verwendete Kryokühler mit 180  $\mu\text{m}$  einen großen hydraulischen Durchmesser (HLPRK: 54.3  $\mu\text{m}$ ), obwohl die Arbeitsfrequenz mit 100 Hz ebenfalls höher liegt als beim HLPRK (50 Hz).

Beim Vergleich zwischen linearer und nicht-linearer Lösung im Falle eines Kryokühlers ist die Richtung des DC-Massenflusses bei Variation des Temperaturprofils bzw. des hydraulischen Durchmessers in beiden Rechnungen gleich. Eine Vergrößerung des hydraulischen Durchmessers bewirkt immer einen negativen DC-Massenfluss, während eine positive Variation des Temperaturprofils immer einen positiven DC-Massenfluss bewirkt. Eine positive Richtung entspricht dabei einer Strömung vom warmen zum kalten Ende wie in Abbildung 5.14 auf Seite 81 gezeigt. Im Falle einer Vergrößerung des hydraulischen Durchmessers kühlt sich deshalb der betreffende Regeneratorteil ab (negative Störung im Temperaturprofil), was wiederum den negativen DC-Massenfluss verstärkt. Im Falle einer positiven Variation des Temperaturprofils ist der DC-Massenfluss positiv, sodass sich der betreffende Regenerator erwärmt. Auch hier führt dies zu einer Vergrößerung des DC-Massenflusses, sodass in beiden Fällen die Strömung instabil ist und sich selbst verstärkt. Insgesamt ist der DC-Flusskoeffizient im HLPRK größer als im Kryokühler mit Folienregenerator.

Betrachtet man nur die linearen Terme (1-3) sind deren Beiträge beim HLPRK gering, während Term 7 dominiert. Dies ist zunächst verwunderlich, da der Druckhubabfall  $\Delta p$  hier viel größer ist als beim Folienregenerator. Jedoch beeinflusst der im Vergleich niedrigere hydraulische Durchmesser im HLPRK die Terme 1-2, während Term 3 beim Folienregenerator durch die höhere Arbeitsfrequenz größer als beim HLPRK ist.

## 6.4 Kritischer Schwellenwert

Zur Ermittlung des kritischen Schwellenwerts geht Gedeon in [91] zunächst davon aus, dass der durch den DC-Massenfluss verursachte Wärmetransport  $\dot{H}_{DC}^* = c_p \dot{m}_{dc} T_m$  mindestens durch andere Transportmechanismen, wie axiale und radiale Wärmeleitung durch die Siebe  $\dot{Q}_{sx} = k_{sx} \frac{\partial T}{\partial x} (1 - \beta) A_c$ , axiale Wärmeleitung durch das Gas  $\dot{Q} = k_g \frac{\partial T}{\partial x} \beta A_c$  und durch den durch thermische Regeneratorverluste bedingten AC-Enthalpiefluss  $\dot{H}_{Reg}^* = \frac{1}{2} c_p \langle \dot{m}_1 T_1 \rangle$  kompensiert wird (siehe Unterabschnitt 3.4 auf Seite 35). Gegebenenfalls kommt noch ein weiterer Term  $\dot{Q}_{sy} = k_{sy} \frac{\partial T}{\partial y} (1 - \beta) A_c$  für die transversale Wärmeleitung zwischen zwei parallelen Regeneratoren dazu.

Alle oben genannten Wärmeflüsse werden in einer vereinfachten Form der zeitlich stationären Energiegleichung (Gleichung 4.4) für eine Regeneratorhälfte A oder B summiert:

$$c_p \dot{m}_{dc} \frac{\partial T}{\partial x} + \beta A_c \frac{\partial q_h}{\partial x} + \beta A_c \frac{\partial q_k}{\partial x} + (1 - \beta) A_c \frac{\partial q_s}{\partial x} + q_y D = 0$$

wobei mit  $q_h$ ,  $q_k$  und  $q_s$  der AC-Enthalpiefluss, die Wärmeleitung durch das Gas und die Siebmatrix respektive bezeichnet wird. Mit  $q_y$  wird der transversale Wärmestrom im Regenerator bezeichnet.  $D$  ist die Seitenlänge eines gedachten Regenerators (A oder B) mit quadratischem Querschnitt und der Querschnittsfläche  $A_c = D^2$  des runden Regenerators. Eine Evaluation der einzelnen Terme findet sich in [91] sowie in Abschnitt 10.2 auf Seite 165 im Anhang. Nach Auswertung der Terme ergibt sich ein kritischer Schwellenwert unter ausschließlicher Berücksichtigung einer reinen Temperaturprofilstörung  $\Delta T$  ( $\Delta d_h = 0$ ) zu:

$$\underbrace{-c_p \beta (\rho u)_1 \frac{\partial T}{\partial x} \varepsilon_{dh}}_{\text{Term 1}} < \underbrace{\frac{\beta k_g}{N_u} \left( \frac{c_p d_h (\rho u)_1}{k_g L} \right)^2}_{\text{Term 2}} + \underbrace{\frac{8}{L^2} (\beta k_g + (1 - \beta) k_{sx})}_{\text{Term 3}} + \underbrace{\frac{2 k_y}{D^2}}_{\text{Term 4}}. \quad (6.11)$$

Abbildung 6.1 zeigt den Quotienten aus Massenflussverhältnis und Temperaturprofilstörung  $\varepsilon_{dh} = \left. \frac{(\dot{m}_{dc})_A / (\dot{m}_{c1})_0}{\Delta T} \right|_{d_h}$  ohne Störung des hydraulischen Durchmessers im HLPRK. Im Vergleich zum Folienregenerator aus [90] mit  $\varepsilon_{dh} = 39 * 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  zeigt der hier entwickelte Kaltkopf eine um den Faktor 6 ( $\varepsilon_{dh} = 235 * 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) höhere Tendenz zum Ausbilden eines parasitären Massenflusses bei einer angenommenen Temperaturstörung von  $\Delta T = 10 \text{ K}$ . Tabelle 6.3 zeigt die Auswertung der einzelnen Terme von Gleichung 6.11 für den HLPRK bei unterschiedlichen pV-Leistungen. Da der durch den DC-Massenfluss verursachte Energiefluss in Term 1 viel größer ist als die Summe der dämpfenden Energieflüsse (Term 2-4), ist diese Kaltkopfkonfiguration bei voller pV-Leistung instabil und neigt daher zur Ausbildung eines parasitären DC-Massenflusses. Erst bei einer pV-Leistung von unter 2 kW wird der

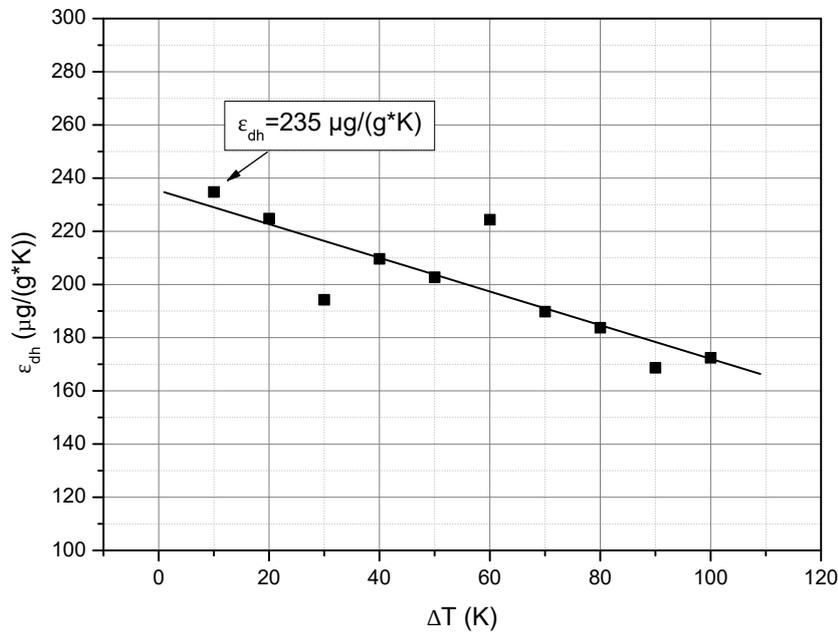


Abbildung 6.1:  $\epsilon_{dh}$  als Funktion der Temperaturstörung  $\Delta T$  für den HLPRK bei 7 kW pV-Leistung und einer Kaltkopftemperatur von 60 K.

Tabelle 6.3: Kritischer Schwellenwert (Term 1) nach Gleichung 6.11 mit  $\epsilon_{dh} = 235 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  bei 7 kW pV-Leistung sowie die Beträge und Summe der dämpfenden Terme 2-4. Zum Vergleich: Schwellenwert bei niedrigeren pV-Leistungen sowie des Kaltkopfes "Antriebsplattform" mit  $\epsilon_{dh} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  aus [93] und des Folienregenerators aus [90] ( $\epsilon_{dh} = 39 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ).

Leistungsdichte ( $\text{W m}^{-3} \text{K}^{-1}$ )	<b>Term 1</b>	Term 2	Term 3	Term 4	$\Sigma$ <b>Terme 2-4</b>	Stabil?	$\epsilon_{dh}$ ( $10^{-6} \text{ K}^{-1}$ )
HLPRK (1 kW)	<b>1309</b>	339	590	1302	<b>2230</b>	ja	30
HLPRK (2 kW)	<b>2874</b>	408	590	1302	<b>2300</b>	nein	60
HLPRK (7 kW)	<b>42566</b>	6654	590	1302	<b>8546</b>	nein	235
Antriebsplattform	<b>18851</b>	130076	3049	3006	<b>136132</b>	ja	30
Folienregenerator	<b>8800</b>	50000	1700	0	<b>51700</b>	ja	39

Kalkkopf stabil. Zum Vergleich sind auch die berechneten Werte für den Folienregenerator aus [90] und den "Antriebsplattform"-Kalkkopf aus [93] dargestellt, wobei die Stabilität des letzteren experimentell verifiziert wurde. Der "Antriebsplattform"-Kalkkopf stellt eine Weiterentwicklung des hier behandelten HLPRK-Kalkkopfes dar, die jedoch nicht im Rahmen dieses Dissertationsprojekts mit der Maßgabe, die DC-Massenfluss Verluste zu minimieren, gebaut wurde.

## 7 Messaufbau

### 7.1 Gesamtaufbau

Der Messaufbau besteht aus einem 10 kW Linearkompressor des Typs 42SM 2S297W der Firma CFIC Inc. aus Troy, NY/USA, auf dem der Kaltkopf wie in Abbildung 7.1 gezeigt montiert ist. Der Nachkühler verbindet den Kompressor mit dem Vakuumflansch. Danach folgt der Regenerator, der kalte Wärmetauscher, das Pulsrohr und der warme Wärmetauscher. Die Inertanceleitung ist im Bild noch nicht angeschlossen. Die Messwerte werden im 19-Zoll-Schrank rechts im Bild erfasst und an den Mess-PC weitergereicht.

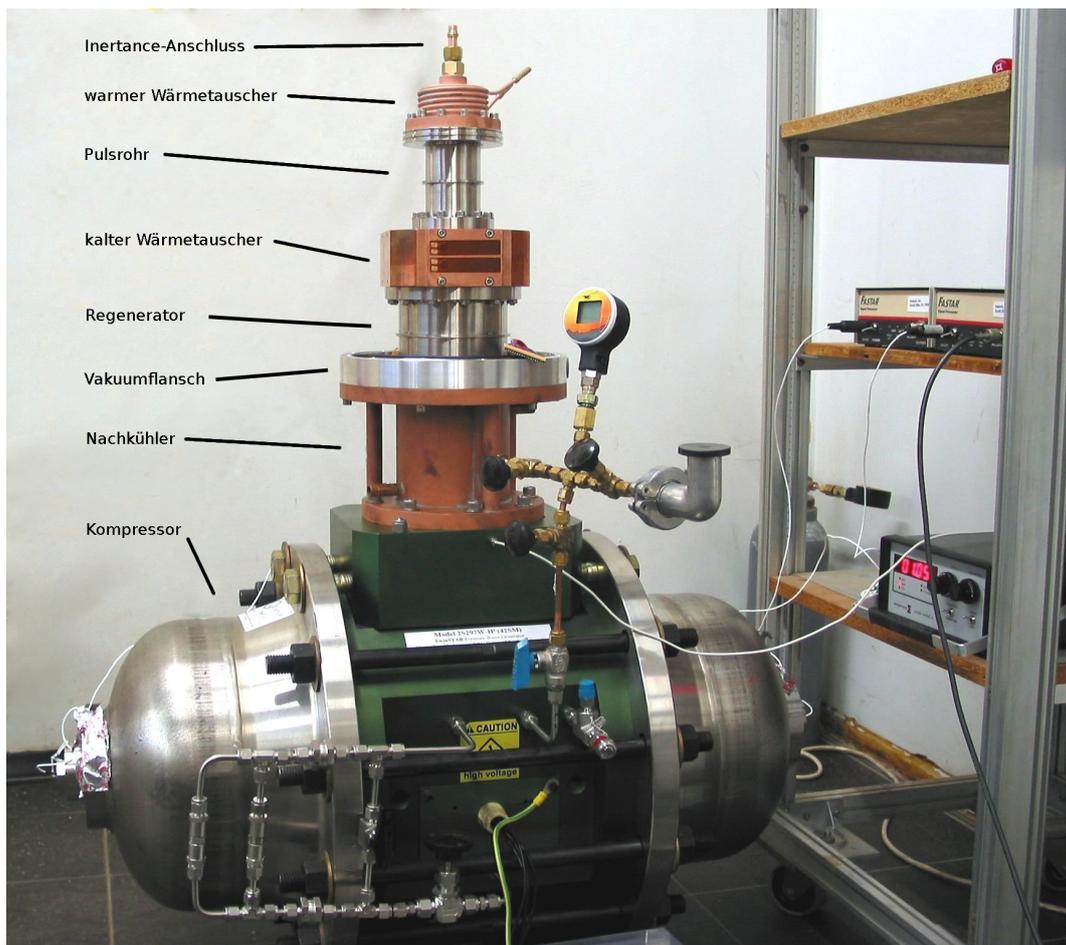


Abbildung 7.1: Foto des Kompressors mit Kaltkopf.

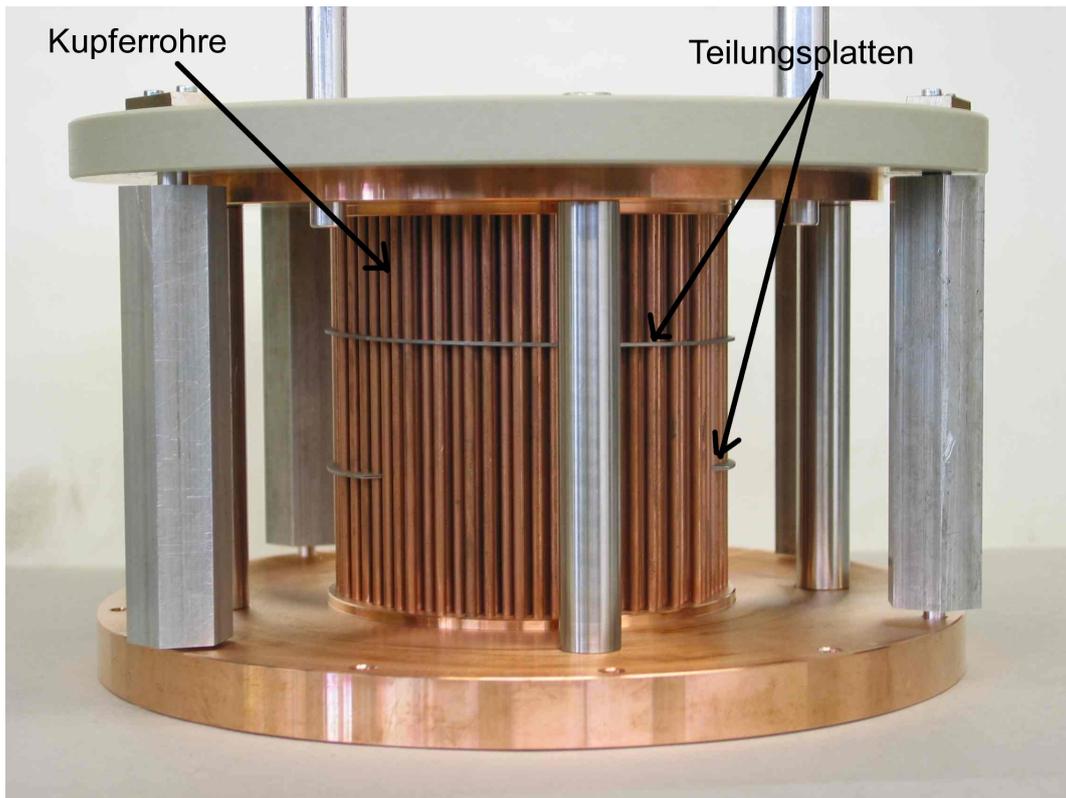


Abbildung 7.2: Seitenansicht auf den Nachkühler vor dem Einbau in sein Gehäuse.

## 7.2 Linearer Pulsrohrkaltkopf

### Nachkühler

In Bild 7.2 ist der in der feinmechanischen Werkstatt hergestellte Nachkühler vor dem Zusammenlöten zu sehen. Er besteht aus 400 Kupferrohren mit 2 mm Innendurchmesser, die hexagonal angeordnet sind. Das Kühlwasser strömt seitlich ein und umfließt diese in einem Z-förmigen Pfad, der durch Teilungsplatten abgegrenzt wird.

### Regenerator und Pulsrohr

Der Regenerator- und der Pulsrohrzylinder bestehen aus dünnwandigen Edelstahlrohren mit 1,5 mm Wandstärke, an deren Enden Flansche angeschweißt wurden. Wie in Abbildung 7.1 zu sehen, befindet sich auf mittlerer Höhe ein Edelstahlring, der für zusätzliche Stabilität bei hohem Innendruck sorgt. Die Länge und der Innendurchmesser des Regeneratorzylinders betragen 80 mm respektive 117 mm, die des Pulsrohrs 100 mm respektive 58 mm.

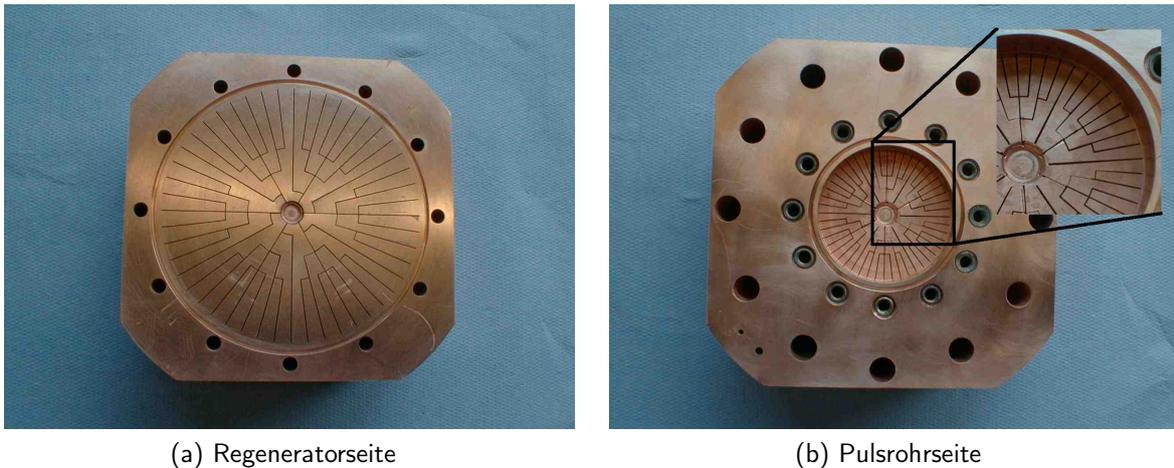


Abbildung 7.3: Foto des geschlitzten kalten Wärmetauschers.

### **kalter Wärmetauscher**

In Abbildung 7.3 ist die Regenerator- und Pulsrohrseite des kalten Wärmetauschers dargestellt. Er ist aus Kupfer-Vollmaterial gefertigt, in das mittels Drahterosion konisch zulaufende, 0,3 mm breite Kanäle geschnitten wurden. Diese sollen eine gute Wärmeübertragung vom Arbeitsgas zum Kupfer ermöglichen. Gleichzeitig dient der Wärmetauscher als Flussbegradiger, um den Durchmesser des Regenerators an den des Pulsrohrs anzupassen. Die Fertigung aus Vollmaterial verbessert im Vergleich zum sonst verwendeten Einschrumpfen den Wärmeübertrag zum äußeren Rand der Kaltfläche.

### **warmer Wärmetauscher**

Der in Abbildung 7.4 gezeigte warme Wärmetauscher ist zwischen Pulsrohr und Phasenschieber eingebaut (vgl. Abbildung 7.1). Er besteht aus einem von Kühlwasser umflossenen Kupferblock, in den ein geschlitzter Wärmetauscher eingeschrumpft ist (Abbildung 7.4a). Zur Flussbegradigung befindet sich zwischen Pulsrohr und geschlitztem Wärmetauscher noch ein 20 mm langer Stapel aus Kupfer Mesh 80 Sieben (Abbildung 7.4b).

### **Inertanceleitung und Puffervolumen**

Abbildung 7.5 zeigt ein Foto des Gesamtsystems im betriebsfähigen Zustand. Der Kaltkopf befindet sich bereits im Vakuumgefäß. Der Phasenschieber ist mit dem warmen Wärmetauscher verbunden und besteht aus drei in Serie geschalteten Kupferleitungen, an deren Ende das Puffervolumen angeschlossen ist. Ein Abzweig kurz hinter dem warmen Wärmetauscher führt zu einem zweiten Puffervolumen, welches mittels eines Ventils (in Abbildung 7.6 mit



(a) Pulsrohrseite (ohne Flussbegradiger)



(b) Pulsrohrseite (mit Flussbegradiger)

Abbildung 7.4: Foto des warmen Wärmetauschers.

“V” gekennzeichnet) parallel zur Inertanceleitung geschaltet werden kann. Dadurch lässt sich der Phasenschieber leichter an eine andere Arbeitsfrequenz anpassen. Die Dimensionen der Inertanceleitung sind aus Tabelle 5.4 ersichtlich.

## 7.3 Datenerfassung

### 7.3.1 Temperatur

Wie aus Abbildung 7.6 ersichtlich ist, sind diverse Sensoren über die Apparatur verteilt. Die Sensoren  $X1$  und  $X2$  sind induktive LVDT Wegaufnehmer (Typ: HS1000, Sentech Inc.), die die Position der Kolben mittels eines Signalprozessors (Typ: SP200A, Sentec Inc.) in Echtzeit liefern. Die Temperatursensoren  $T1$  bis  $T8$  vom Typ Pt-100 werden mittels Vierdraht-Methode von einem Temperaturmonitor Typ 218 (Lakeshore) ausgelesen. Der Cernox-Sensor  $T_c$  am kalten Wärmetauscher wird separat durch ein Multimeter Typ Prema 5017 ebenfalls mittels Vierdraht-Methode gemessen. Die Temperatursensoren  $T2$  bis  $T4$  sind in Höhe der Mitte des Regenerators jeweils  $120^\circ$  versetzt angebracht, um azimuthale Temperaturunterschiede festzustellen. Alle anderen Pt-100 Sensoren befinden sich auf einer axialen Linie, um das Temperaturprofil des Regenerators und des Pulsrohrs zu messen.

### 7.3.2 Druck

Im Kompressionsvolumen befindet sich ein piezoresistiver Drucksensor  $P1$  (Typ: 8510B-500, Endevco) der ebenfalls mittels eines Verstärkers (Typ: 4428A, Endevco) in Echtzeit ausgelesen wird. Weitere Drucksensoren  $P2$  und  $P3$  (Typ: KPY-46R, Infineon) sind am Eingang der

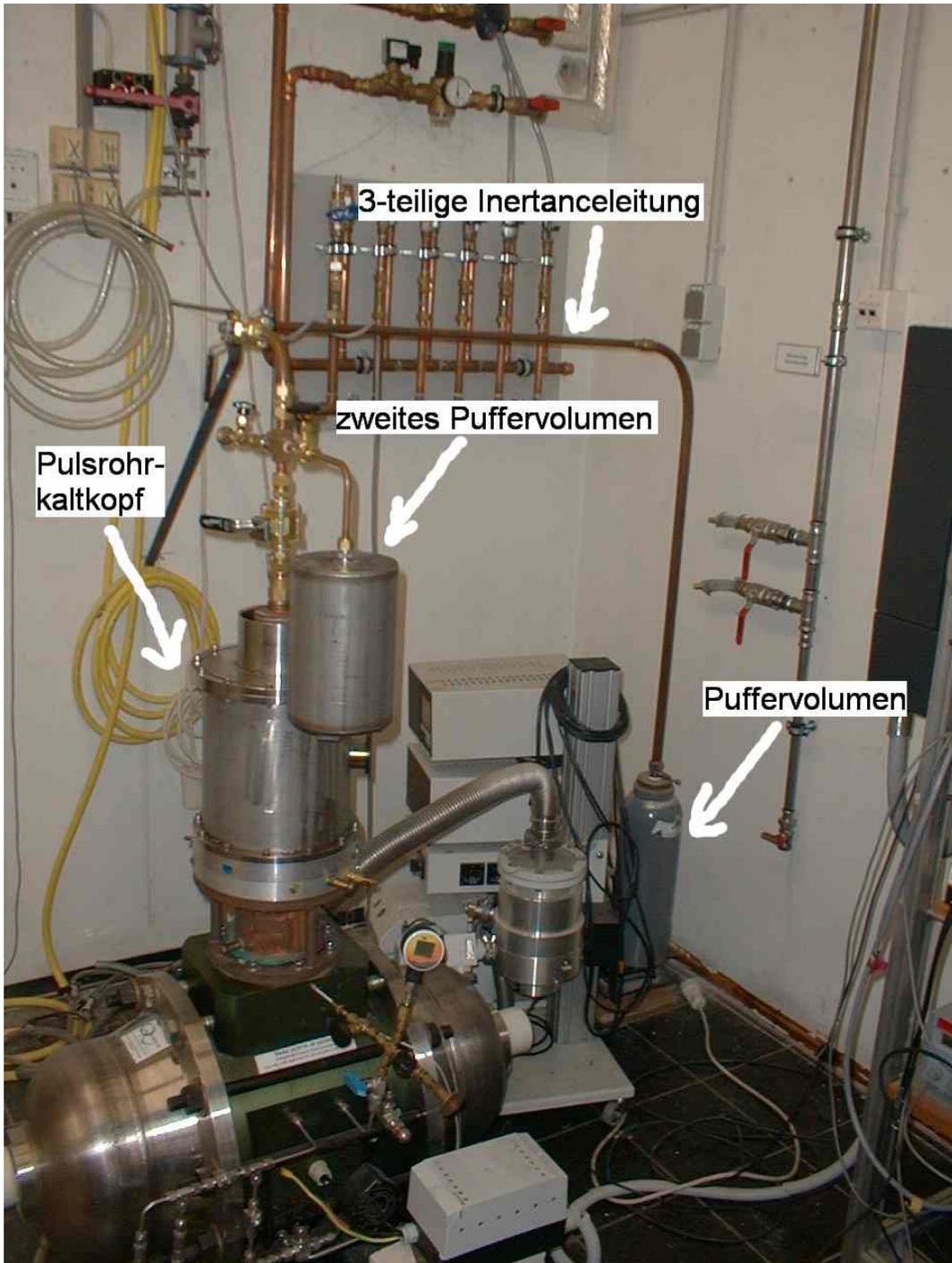


Abbildung 7.5: Foto des Gesamtsystems mit Phasenschieber.

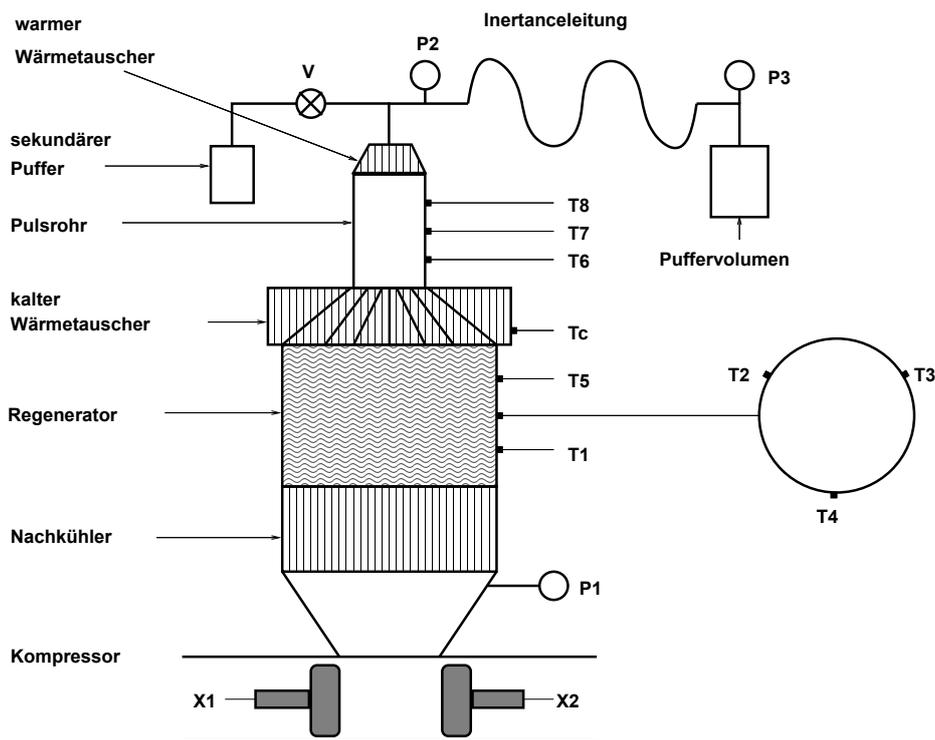


Abbildung 7.6: Positionen der Temperatursensoren  $T1$  bis  $T8$  und  $Tc$ , der Drucksensoren  $P1$  bis  $P3$  und der Wegsensoren  $X1$  und  $X2$ .

Inertance und im Puffervolumen angebracht. Diese werden über eine Verstärkerbox ausgelesen [94].

### 7.3.3 akustische Leistung

Mittels der Positionssensoren an den Kompressorkolben ( $X1$  und  $X2$ ) und dem Drucksensor im Kompressionsvolumen  $P1$  lässt sich über Gleichung 2.1 die akustische Leistung bestimmen. Im Messprogramm wird jedoch eine leicht modifizierte Version verwendet, da die Messgrößen als zeitliche Abfolge von diskreten Werten vorliegen [73, Seite 232, Gl. 8.7]:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{pV} &= \frac{1}{\tau} \oint p dV \\ &= \frac{1}{\tau} \oint p(t) \frac{dV(t)}{dt} dt. \end{aligned}$$

Dabei wird zwischen den diskreten Werten mittels der internen LABVIEW Funktionen numerisch differenziert und integriert.

### 7.3.4 elektrische Leistung

Die Eingangsleistung des Kompressors wird durch phasensensitive Messung der Kompressorspannung und des Stroms ermittelt. Die Spannung wird dabei über einen Transformator zunächst herabgesetzt und dann über einen Spannungsteiler ausgelesen. Der Strom wird über einen Stromwandler, an dem ein 1 Ohm Widerstand angeschlossen ist, gemessen. Im Messprogramm wird dann mittels Integration des Produktes aus Spannung und Strom die Eingangsleistung berechnet.

### 7.3.5 Messwerterfassung am PC

In Abbildung 7.7 ist das Mess- und Steuersystem des Kühlers dargestellt. Die Temperaturwerte werden mittels GPIB-Bus zum Messcomputer übertragen. Die Wellenformen der Druck-, Positions-, Spannungs- und Stromsensoren werden mit Hilfe zweier AD-Wandlerkarten aufgenommen. Um Phasenfehler zu vermeiden, misst die erste Karte nacheinander die Sensoren  $X1, X2, P1, X2, X1, P2, P3$ . Die Positionswertepaare werden jeweils gemittelt, sodass deren Phase mit der von  $P1$  übereinstimmt und somit die pV-Leistung korrekt berechnet werden kann. Die Phasenfehler von  $P2$  und  $P3$  wurden vernachlässigt. Da die Abtastrate der AD-Wandler Karte 200 kS/s beträgt, liegt der maximale Abstand zwischen zwei Datenpunkten bei 5  $\mu$ s. Bei 50 Hz entspricht dies einem Phasenfehler von weniger als 0.5° pro Kanal. Die zweite Karte wird von der ersten über eine Triggerleitung gesteuert, damit die Messungen gleichzeitig starten (Synchronisation). Hier lautet die Messreihenfolge  $x, U, I$ , wobei "x" als leerer Kanal eingefügt wurde, um eine zeitsynchrone Messung der Position und des Stroms zu ermöglichen.  $U$  und  $I$  sind die Kompressorspannung und der Kompressorstrom.

Im Messcomputer nehmen zwei LABVIEW Vi's jeweils die Daten der GPIB (NI AT-GPIB) und AD-Wandler Messkarten (2xNI 6024E) auf. Die Daten der Wandlerkarten werden dabei ständig auf die Überschreitung von Grenzwerten überprüft (maximaler Kompressorstrom, maximale Kolbenauslenkung). Tritt dies ein, wird der Kompressor mittels Not-Aus-Leitungen sofort abgeschaltet. Der Kompressor wird an einem Frequenzumrichter vom Typ Siemens Micromaster 440 über eine serielle Schnittstelle (RS232) betrieben. In der Kompressorzuleitung sind ein Stromwandler und ein Übertrager eingebaut, um die elektrische Aufnahmeleistung des Kühlers zu ermitteln. Details zur Regelung und Steuerung des für den Antrieb des Kompressors verwendeten Frequenzumrichters finden sich in Kapitel 10.6.

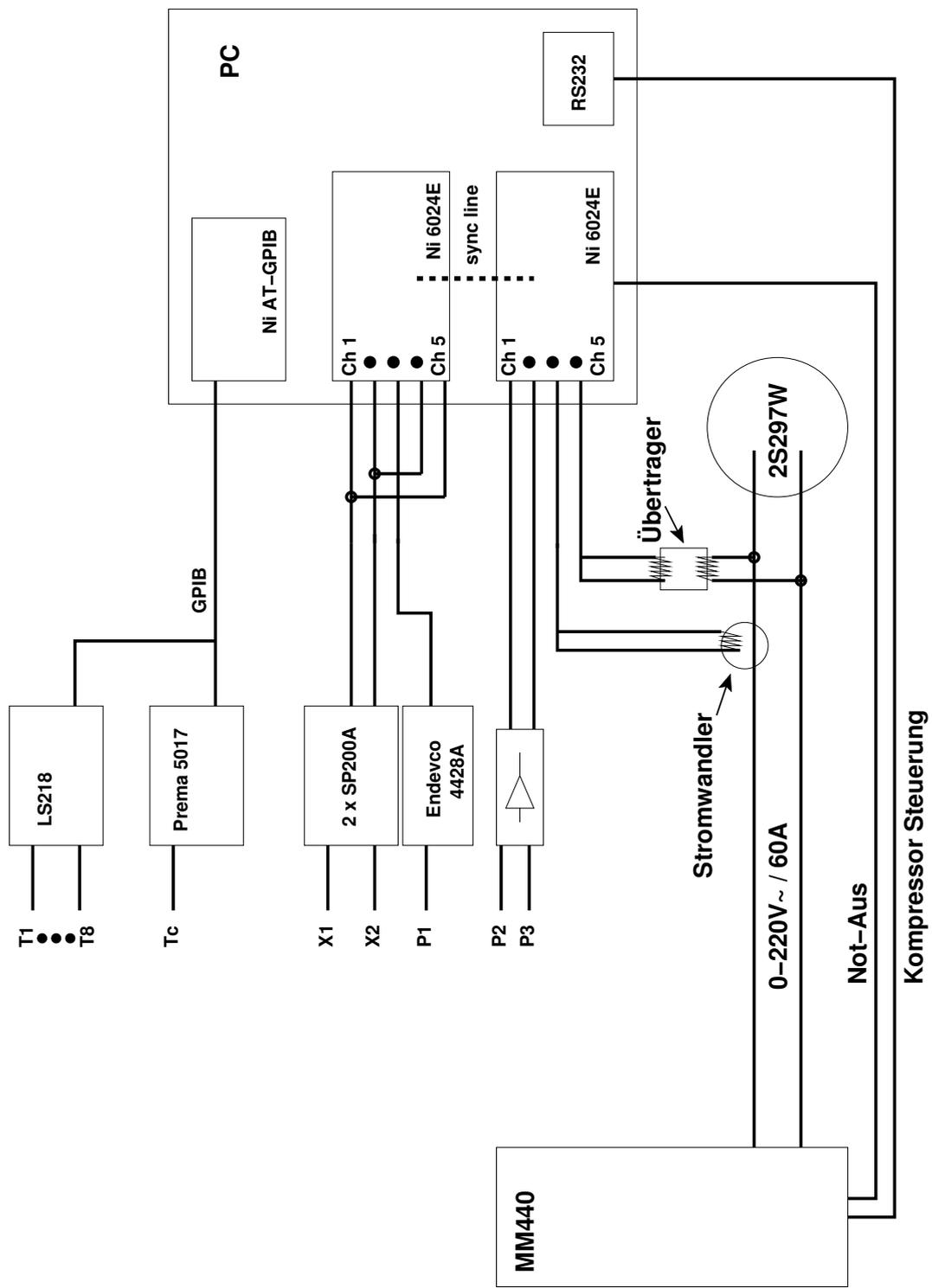


Abbildung 7.7: Aufbau des Mess- und Steuersystems.

## 8 Experimentelle Ergebnisse, Analyse und Diskussion

### 8.1 Verluste durch Zirkularströmung im Regenerator

Während der ersten Abkühlversuchen am HLPRK stellte sich heraus, dass parasitäre Strömungen innerhalb des Regenerators die Leistung des Pulsrohrs erheblich beeinträchtigten. In Abbildung 8.1 ist eine Abkühlkurve zu sehen, die mit einer der ersten Regeneratorversionen (reine Edelstahlsieb-füllung, #400) aufgenommen wurde. Aufgetragen sind die azimutalen Regeneratortemperaturen  $T_2 - T_4$  sowie die Kaltkopftemperatur  $T_c$ . Im oberen Graph erkennt man, dass nach kurzer anfänglicher Abkühlung zwei der drei Regeneratortemperaturen wieder ansteigen, während sich die dritte beschleunigt abkühlt. Beim Erreichen einer Kaltkopftemperatur von 64 K beginnt eine Temperaturoszillation mit einer Zeitkonstante von mehreren Stunden. Dabei schwanken die Regeneratortemperaturen mit  $\pm 50$  K um eine Mittenlage bei 200 K, während die Kaltkopftemperatur mit  $\pm 5$  K um eine Mittenlage von 66 K schwankt. Diese Oszillation trat in späteren Versuchen nicht mehr auf, stattdessen stellte sich jedoch eine zeitlich stabile Temperaturinhomogenität (statische Inhomogenität) ein.

Als Ursache für diese Inhomogenität wurde zunächst eine ungleichmäßige Anströmung des Regenerators vermutet. Am warmen Ende betraf dies den Übergang vom Rohrbündel-Nachkühler zum Regenerator und am kalten Ende den Übergang vom Regenerator zum geschlitzten Wärmetauscher. Zunächst wurde deshalb versucht, mit Hilfe verschiedener Blenden, die zwischen dem Nachkühler und dem Regenerator eingebaut wurden, die Anströmung am warmen Ende zu verbessern. Als Maß für die Größe der Zirkularströmung dient dabei die maximale Differenz der in der Regeneratormitte gelegenen Temperatursensoren  $T_2$  bis  $T_4$ :

$$\Delta T_{reg0.5,max} := \max(T_2, T_3, T_4) - \min(T_2, T_3, T_4).$$

Abbildung 8.2 zeigt die am warmen Ende des Regenerators verwendeten Flussverteiler. In den Abbildungen 8.3 und 8.4 sind die Auswirkungen auf die Kaltkopftemperatur und die Zirkularströmung nach dem Einbau der verschiedenen Flussverteiler dargestellt. Die drei Versionen mit Lochblenden unterscheiden sich bezüglich der Temperaturaufspaltung nur geringfügig. Dies zeigt sich auch in den Kaltkopftemperaturen, bei denen nur eine leichte Variation auftritt und deren Minima annähernd zusammenfallen. Beim Abkühlen mit der Platte

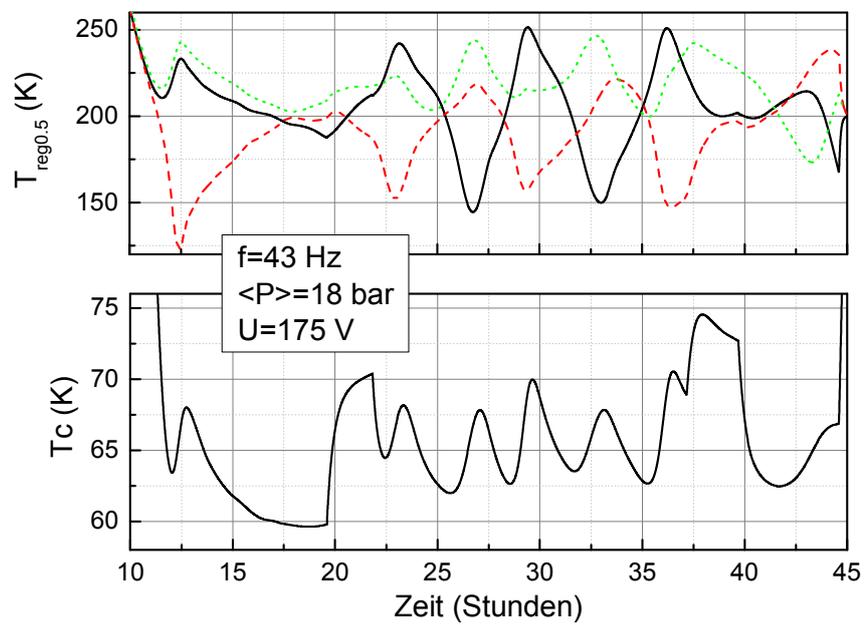
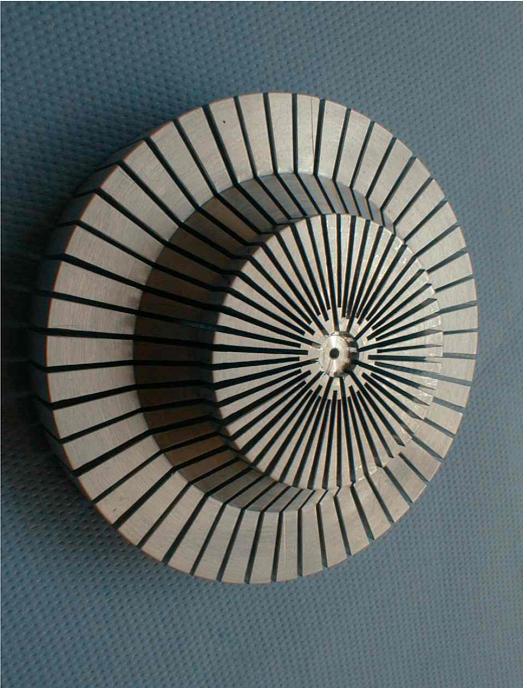


Abbildung 8.1: Abkühlkurve mit deutlich sichtbaren Regenerator- und Kaltkopfoszillationen. Arbeitsfrequenz 43 Hz, Fülldruck 18 bar und Kompressorspannung 175 V. Regenerator: nur Edelstahlsiebe mit Meshzahl 400.



(a) Flussverteiler mit 48 Schlitzten



(b) 60 mm Lochblende (mit Flussverteiler aus Abb a)



(c) 40 mm Lochblende



(d) Platte mit 106 Löchern

Abbildung 8.2: Verwendete Flussbegradiger am warmen Ende des Regenerators.

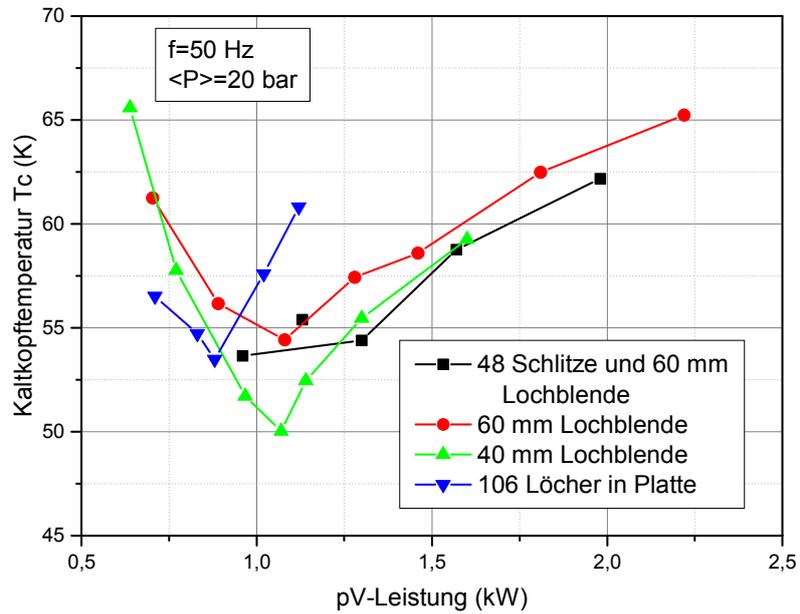


Abbildung 8.3: Einfluss verschiedener Flussbegradiger am warmen Ende des Regenerators auf die Kaltkopftemperatur  $T_c$  ohne Kühllast.

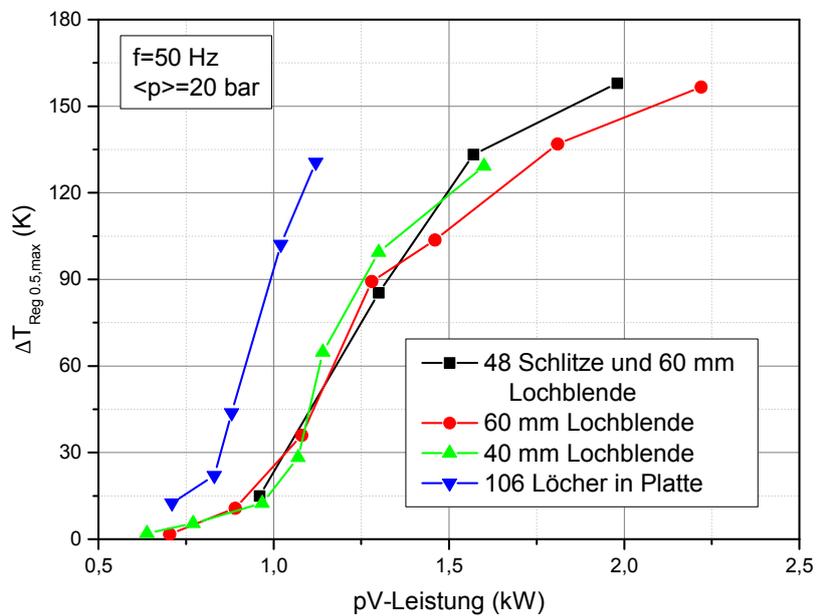


Abbildung 8.4: Einfluss verschiedener Flussbegradiger am warmen Ende des Regenerators auf die maximal Temperaturaufspaltung  $\Delta T_{reg0.5,max}$  in der Mitte des Regenerators.

mit 106 gebohrten Löchern ergibt sich ein früher Anstieg in der Temperaturaufspaltung, was einerseits eine Verschiebung des Kaltkopf Temperaturminimums hin zu kleineren pV-Leistungen und andererseits einen starken Anstieg bei höheren pV-Leistungen bewirkt. Offenbar verschlechtert diese Platte die Anströmung des Regenerators zusätzlich.

Beim kalten Wärmetauscher aus Abbildung 7.3 stellt die Breite der Kanäle einen kritischen Parameter dar, da schon kleinste Abweichungen den Strömungsquerschnitt stark beeinflussen. Im vergrößerten Bildausschnitt in Abbildung 7.3 kann man deutliche Unterschiede in den Kanalbreiten erkennen, die durch den späteren Einbau einer Zentralschraube entstanden sind. Dies ist wahrscheinlich eine der Ursachen des inhomogenen Regeneratorprofils und der damit verbundenen Verluste. Da eine Reparatur unmöglich war und eine Neufertigung aus Kostengründen nicht in Frage kam, wurde versucht, die durch die Anströmung entstanden Temperaturunterschiede auf andere Weise zu kompensieren. Dazu wurde das bereits bestehende Kühlermodell (siehe Abschnitt 5.5) modifiziert, um die Verluste und deren Entstehung näher untersuchen zu können.

## 8.2 Qualitative Beschreibung der Strömungsverluste mittels Sage

Die experimentellen Ergebnisse wurden mit dem im Kapitel 5.5 beschriebenen modifizierten Kühlermodell nachgebildet. Die Abbildungen 8.5 und 8.6 vergleichen den Einfluss der pV-Leistung auf die Kaltkopf Temperatur und die Temperaturaufspaltung im Modell und Experiment, wobei der Kopplungsfaktor  $c_{trans}$  als Modellparameter angenommen wurde. Weitere Modellparameter waren eine Arbeitsfrequenz von 50 Hz und ein Fülldruck von 20 bar. Während die Temperaturaufspaltung mit dem Parameterwert  $c_{trans} = 1,6$  mm gut reproduziert wird, zeigt das Verhalten der Basistemperatur eine leichte Abweichung gegenüber dem Modell.

Allerdings zeigt die Simulation auch, dass eine ungleichmäßige Anströmung zur Ausbildung einer Inhomogenität nicht unbedingt notwendig ist. Das Modell setzt nur ein Vorhandensein eines unterschiedlichen Temperaturprofils in den beiden Regeneratoren voraus. Neben einer ungleichmäßigen Anströmung kann z.B. auch eine ungleichmäßige Verteilung der Porosität der Regeneratormatrix, wie in [89] beschrieben, für einen anfänglichen Temperaturunterschied sorgen. Da ein Temperaturunterschied zu einem DC-Massenfluss führt, der wiederum den Temperaturunterschied erhöht, ergibt sich ein selbstverstärkender Effekt, der nur durch zunehmende Wärmeflüsse entlang des radialen und axialen Temperaturgradienten gedämpft wird.

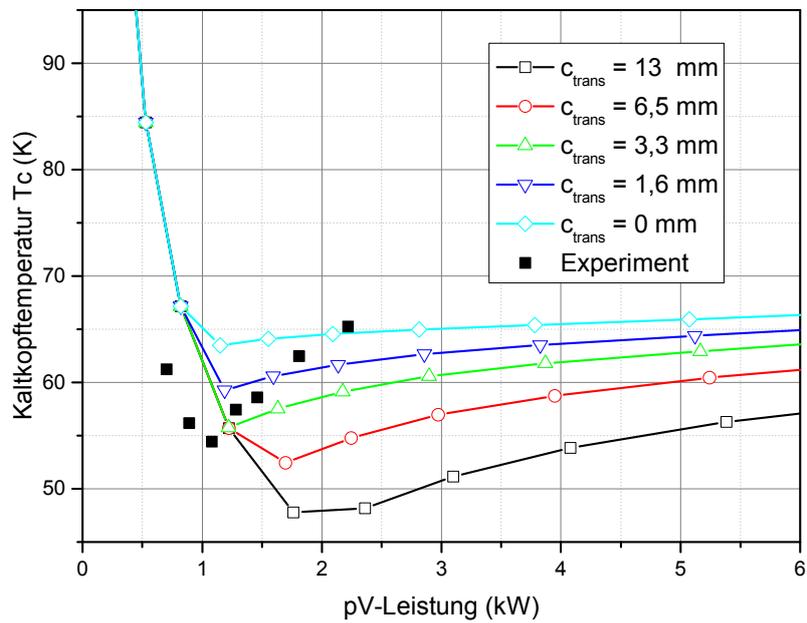


Abbildung 8.5: Vergleich der berechneten und experimentell bestimmten Kaltkopftemperatur mit 60 mm Lochblende.

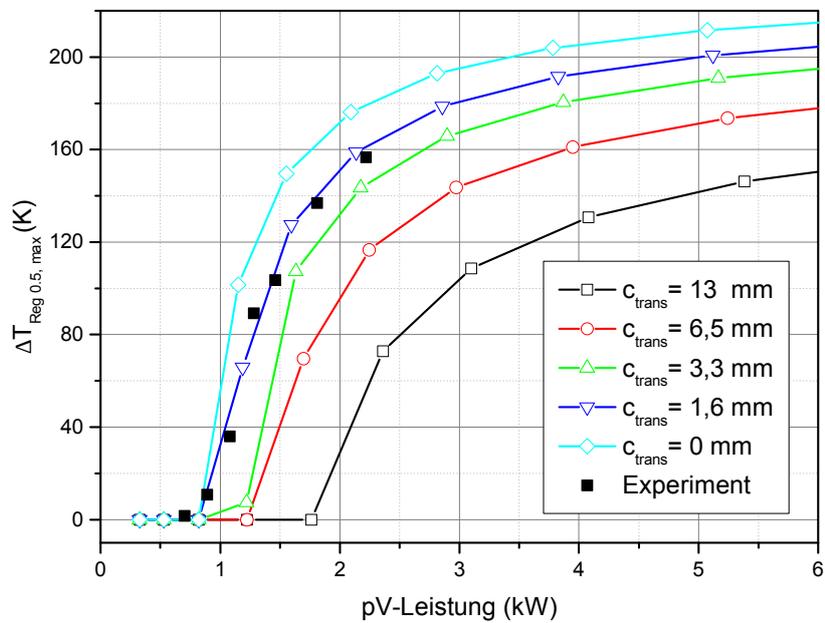


Abbildung 8.6: Vergleich der berechneten und experimentell bestimmten maximalen Temperatureaufspaltung  $\Delta T_{reg0.5,max}$  mit 60 mm Lochblende.

### 8.3 Verbesserung des Regenerators zur Dämpfung zirkularer Strömungen

Da eine Reparatur des kalten Wärmetauschers nicht in Frage kam, wurde versucht den oben beschriebenen, selbstverstärkenden Effekt durch eine Erhöhung der radialen Wärmeleitfähigkeit des Regeneratormaterials zu dämpfen. Im Modell entspricht dies einer Vergrößerung des Kopplungsfaktors  $c_{trans}$ , was die Ausbildung einer parasitären Strömung unterdrückt. Um eine gleichzeitige Erhöhung der axialen Wärmeleitung zu vermeiden, wurde der Regenerator aus einem alternierenden Stapel aus thermisch schlecht leitenden Edelstahl-Sieben und thermisch gut leitenden Sieben oder Scheiben aus Messing oder Kupfer aufgebaut. In Analogie zur Elektrotechnik entspricht dies in axialer Richtung einer Reihenschaltung von Leitfähigkeiten, was zu einer Dominanz des schlecht leitenden Materials führt. In radialer Richtung hingegen dominiert wegen der Parallelschaltung die Leitfähigkeit des gut leitenden Materials. Bei einer angenommenen homogenen Verteilung des gut und schlecht leitenden Material ergeben sich die Gesamtleitfähigkeiten zu:

$$\frac{1}{k_{axial,gesamt}} = \frac{\beta}{k_{axial,1}} + \frac{1 - \beta}{k_{axial,2}}$$

$$k_{radial,gesamt} = \beta k_{radial,1} + (1 - \beta) k_{radial,2}$$

mit  $k_{axial,(1,2)}$  und  $k_{radial,(1,2)}$  als die axiale und radiale Leitfähigkeit des gut (Index 1) bzw. schlecht (Index 2) leitenden Materials und  $\beta$  der volumetrische Anteil des gut leitenden Materials. Die effektiven axialen und radialen Leitfähigkeiten von Sieben sind in Kapitel 3.4 angegeben. Abbildung 8.7 zeigt die thermischen Leitfähigkeiten des Bulkmaterials von Edelstahl, Messing und Kupfer mit einem Restwiderstandsverhältnis von 50. Man erkennt, dass bei 100 K Messing im Vergleich zu Edelstahl eine 7-mal so hohe thermische Leitfähigkeit, Kupfer (RRR50) sogar eine 50-mal so hohe thermische Leitfähigkeit besitzt.

In Tabelle 8.1 sind die untersuchten Regeneratorfüllungen und deren Leitfähigkeiten zusammengestellt. Füllung Nr. 5 ist nicht homogen verteilt, sondern die Lochplatten und die Messingsiebe befinden sich nur im Bereich mittlerer Höhe des Regenerators, weshalb sich die angegebene Leitfähigkeit nur auf diesen Bereich bezieht und deshalb in Klammern gesetzt ist. Aus der Tabelle erkennt man, dass sich die absolute axiale Wärmeleitfähigkeit nur geringfügig erhöht, jedoch durch Zusatz von Materialien guter Leitfähigkeit eine deutliche Erhöhung der radialen Wärmeleitung eintritt.

Abbildungen 8.8 und 8.9 zeigen die Auswirkungen der in Tabelle 5 angegebenen Rege-

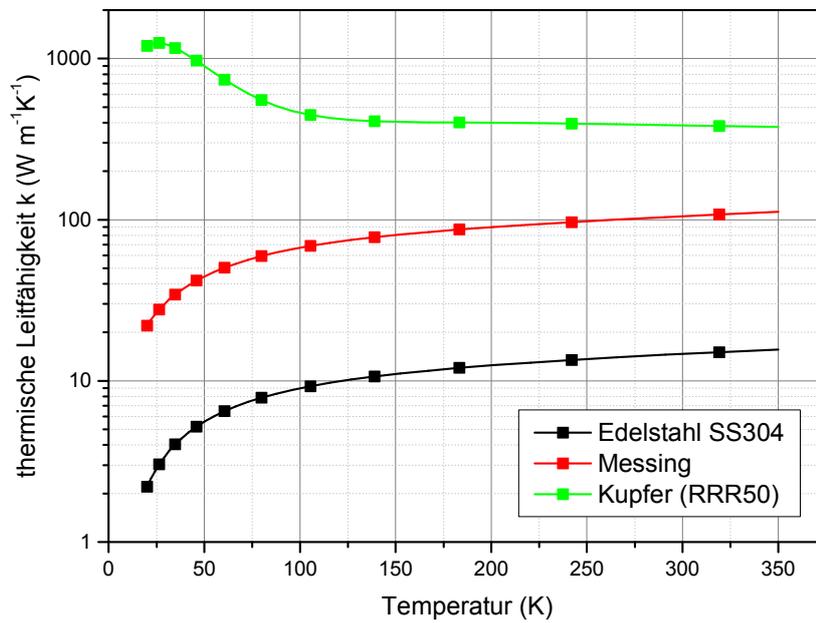


Abbildung 8.7: Thermische Leitfähigkeiten von Edelmetall, Messing und Kupfer zwischen 20 und 350 Kelvin.

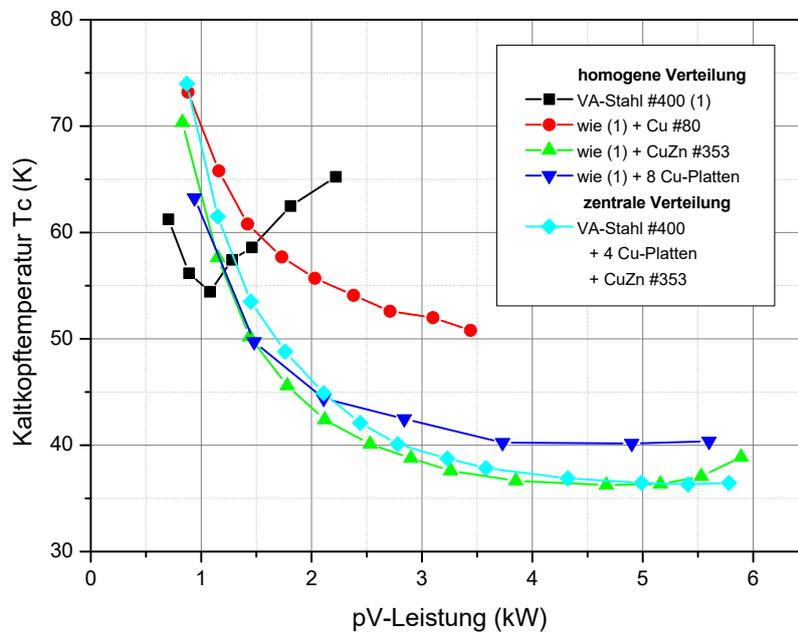


Abbildung 8.8: Einfluss der unterschiedlichen Sandwichfüllungen im Regenerator auf die Kaltkopf Temperatur bei Nulllast.

Tabelle 8.1: Wichtige physikalische Daten der untersuchten Regeneratorfüllungen. VA: Edelstahl siebe, GLM: Kupfer oder Messing.

Regenerator Nr.	1	2	3	4	5
Kupfer bzw. Messung (GLM)/ Edelstahl-Siebe (VA)	-	Cu #80	CuZn #353	Lochplatten aus Cu	Lochplatten aus Kupfer und CuZn #353
Porosität VA/GLM	0.64 (VA)	0.62	0.62	0.20	0.62 + 0.20
volumetrischer Anteil VA/GLM	100 (VA)	50%	45%	4%	(100%)
hydraulischer Durchmesser GLM [ $\mu\text{m}$ ]	53.3 (VA)	228	52.2	1200	52.2 / 1200
Oberfläche VA/GLM [ $\text{m}^2/\text{m}^3$ ]	48000 (VA)	10800	47500	670	47500 / 670
Leitfähigkeit Bulk VA/GLM bei 100 K [ $\text{W}/\text{m}^*\text{K}$ ]	9 (VA)	460	67	460	460 + 67
$k_{\text{radial,gesamt}}$ bei 100 K [ $\text{W}/\text{m}^*\text{K}$ ]	1.44	38	6	16	(82)
$k_{\text{axial,gesamt}}$ bei 100 K [ $\text{W}/\text{m}^*\text{K}$ ]	0.63	1.2	1.1	0.65	(5.5)

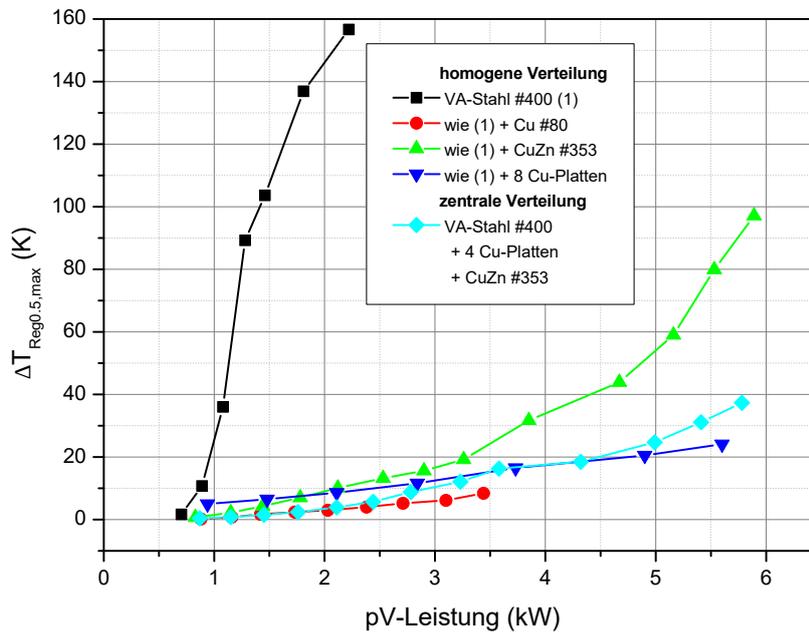


Abbildung 8.9: Einfluss der unterschiedlichen Sandwichfüllungen auf die maximale azimuthale Temperaturdifferenz.

neratorfüllungen auf die Basistemperatur und die Temperaturaufspaltung. Im Vergleich zur reinen Edelstahl-Sieb Füllung fällt zunächst auf, dass die Basistemperatur auch bei hohen pV-Leistungen nicht oder nur kaum ansteigt. Dies korreliert mit der in Abbildung 8.9 gezeigten Temperaturaufspaltung in der Regeneratormitte. Gleichzeitig sinkt die Basistemperatur deutlich ab. So wurde mit Füllung Nr. 3 eine Minimaltemperatur von 36.3 K erreicht (reine Edelstahl-Sieb Füllung: 53 K).

Neben der Temperaturaufspaltung beeinflusst der Druckhubabfall über dem Regenerator, die Oberfläche der Matrix sowie der hydraulische Durchmesser im Vergleich zur Eindringtiefe die Regeneratoreffizienz und somit die Basistemperatur. Die geringe Matrixoberfläche ist der Grund, weshalb die Kupferfüllung (Füllung Nr. 2) trotz der guten Strömungsunterdrückung keine tiefe Temperatur erreichen kann. Auf der anderen Seite wurde die tiefste Temperatur mit Messingsieben (Füllung Nr. 3) erzielt, obwohl hier die Temperaturaufspaltung den höchsten Wert aller gut leitenden Füllungen besitzt. Diese Füllung stellt offenbar einen guten Kompromiss zwischen hoher Leitfähigkeit und großer Oberfläche dar.

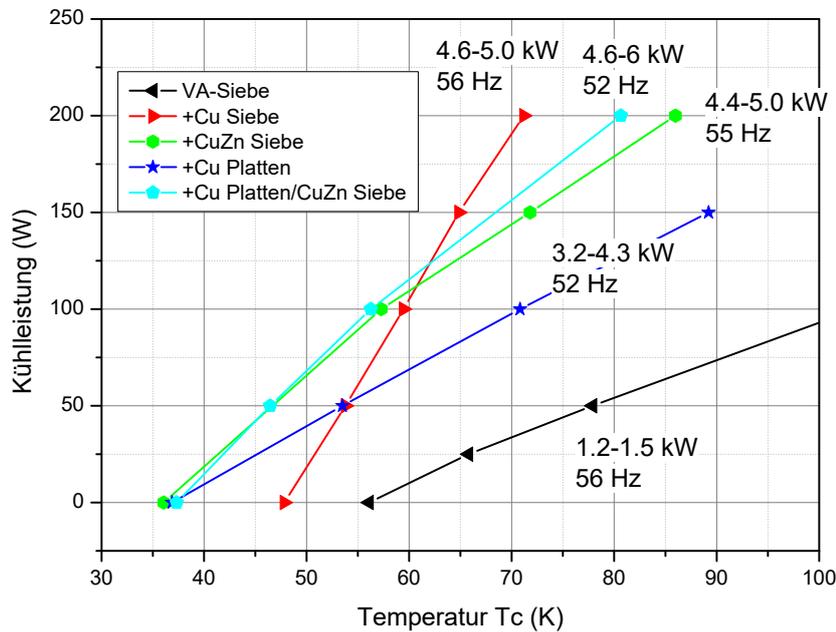


Abbildung 8.10: Kühlleistungen mit verschiedenen Regeneratorfüllungen (vgl. Tabelle 8.1).

## 8.4 Kühlleistungsmessungen

Wie bereits im letzten Kapitel erwähnt, besitzen die untersuchten Regeneratorfüllungen verschiedene Effizienzen. Ein erhöhter Strömungswiderstand reduziert die Bruttokühlleistung und damit die Steigung der Kühlleistungsgeraden. Eine zu geringe Oberfläche dagegen vergrößert die thermischen Verluste im Regenerator, was zu einer erhöhten Basistemperatur führt. Falls nicht anders angegeben, sind die folgenden Messungen bei einem Fülldruck von 20 bar durchgeführt worden. Abbildung 8.10 zeigt die Kühlleistungen mit den verschiedenen Regeneratorfüllungen (vgl. Tabelle 8.1). Da die pV-Leistungen durch die wechselnde Flussimpedanz des Kaltkopfs mit der Temperatur bzw. der Arbeitsfrequenz schwanken, sind diese in dem Graphen mit angegeben. Aufgrund der unterschiedlichen Betriebsparameter sind die Kühlleistungsmessungen nur schwer untereinander vergleichbar. Deshalb wird im Folgenden als Vergleichskriterium die Effizienz bezüglich Carnotwirkungsgrad und pV-Leistung gemäß Abschnitt 2.5 herangezogen. Abbildung 8.11 zeigt, dass diese sich auch bei unterschiedlichen Eingangsleistungen nur geringfügig ändert, und deshalb für eine Gegenüberstellung geeigneter ist. Ebenfalls sind die Auswirkungen der Regeneratorströmung auf die Basistemperatur und Kühlleistung zu erkennen. So erreicht die Messung mit der kleinsten Eingangsleistung die niedrigste Basistemperatur.

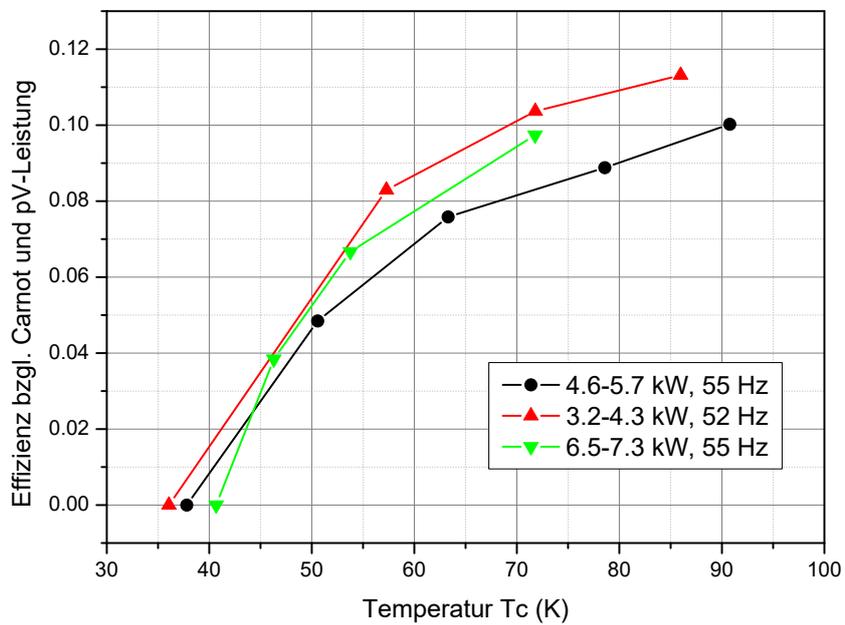


Abbildung 8.11: Kaltkopfeffizienz bzgl. Carnotwirkungsgrad und pV-Leistung für die Regeneratorfüllung mit Messing als gut leitendes Material bei unterschiedlichen Eingangsleistungen und Betriebsfrequenzen.

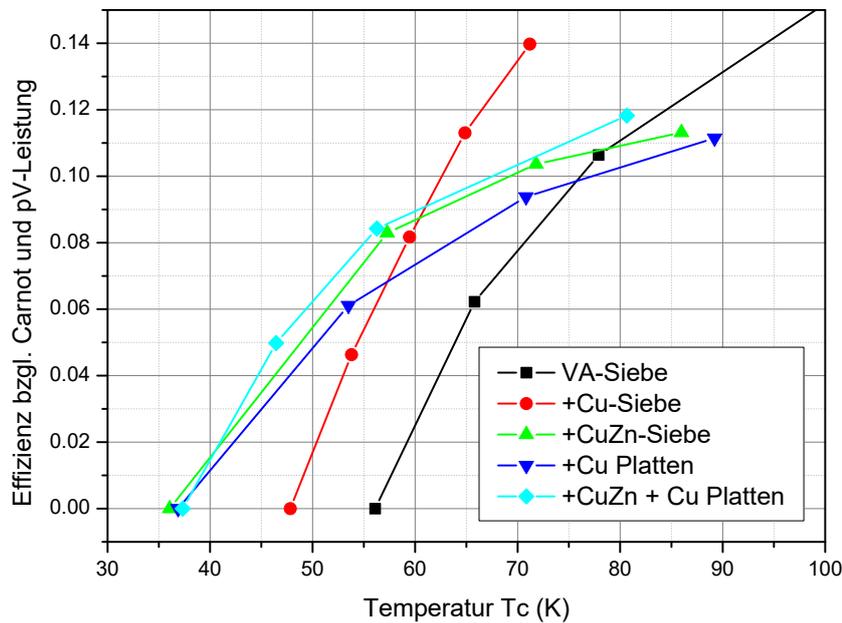


Abbildung 8.12: Effizienzen mit verschiedenen Regeneratorfüllungen. Die Betriebsbedingungen entsprechen denen aus Abbildung 8.10.

In Abbildung 8.12 sind die Kaltkopfeffizienzen bezogen auf den Carnotwirkungsgrad und die pV-Leistung für verschiedene Regeneratorfüllungen aufgetragen. Die Betriebsparameter entsprechen denen aus Abbildung 8.10. Die Füllung mit Kupferzusatz stellt einen klaren Fortschritt gegenüber der reinen Edelstahl-Sieb-füllung dar. Neben dem Absenken der Basistemperatur steigt auch die Effizienz durchweg an (z.B. von 8% auf 14% bei 70 K). Die Füllungen mit Messing und Kupferplatten zeigen nochmals eine deutliche Reduzierung der Basistemperatur, allerdings auch einen im Vergleich zu der Kupfersieb-füllung niedrigeren Wirkungsgrad bei Temperaturen oberhalb von 55 K.

## 8.5 Modifizierter Kaltkopfaufbau für den Betrieb bei 80 Kelvin

### 8.5.1 Optimieren der Regeneratorlänge für 80 Kelvin mit Sage

Neben dem Erreichen einer möglichst tiefen Temperatur sollte auch die Möglichkeit überprüft werden, ob der Kaltkopf mittels einfacher Modifikationen eine Kühlleistung von über 300 W bei 80 Kelvin erreichen kann. Dazu wurde auf Basis des vorhandenen SAGE-Modells die Regeneratorlänge optimiert, da die Neudimensionierung der restlichen Komponenten größere Umbauten erfordert hätten. Abbildung 8.13 zeigt die Kühlleistung und die Effizienz

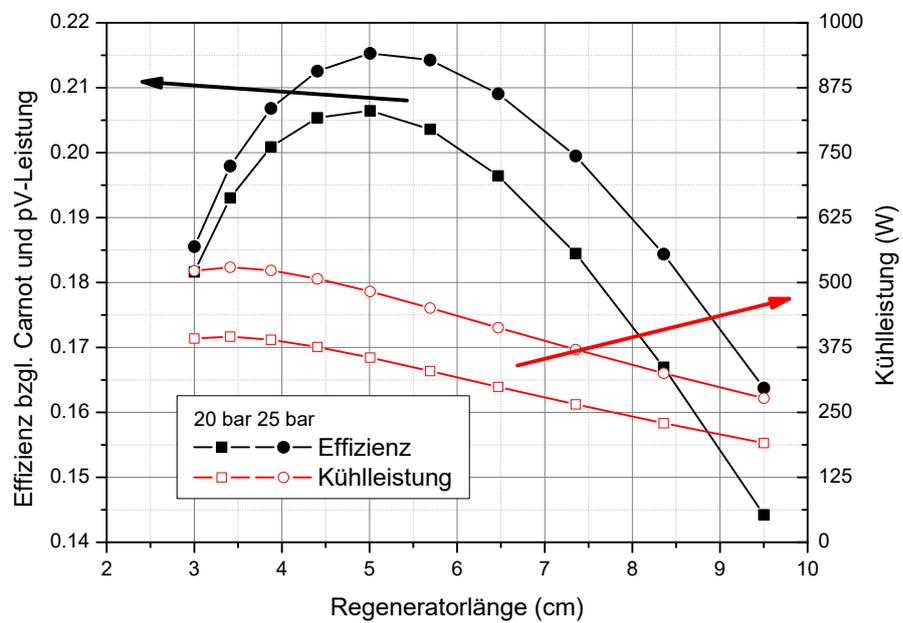


Abbildung 8.13: Einfluss der Regeneratorlänge auf die Effizienz und die Kühlleistung bei 54 Hz, 80 K und konstantem Kolbenhub, viereckige Symbole: 20 bar Fülldruck, runde Symbole: 25 bar Fülldruck. Ergebnis der Simulation mit SAGE.

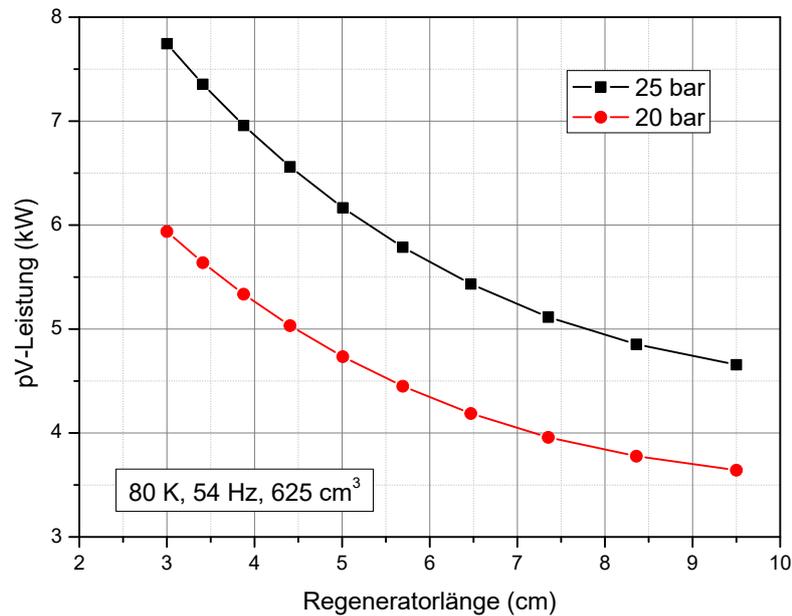


Abbildung 8.14: Einfluss der Regeneratorlänge auf die pV-Leistung bei konstantem Kolbenhub, Arbeitsfrequenz: 54 Hz,  $T_c$ : 80 K für 20 und 25 bar Fülldruck,  $625 \text{ cm}^3$  Kompressionsvolumen. Ergebnis der Simulation mit SAGE.

bei verschiedenen Regeneratorlängen. Die Berechnungen wurden unter der Annahme einer konstanten Kolbenamplitude von 14.6 mm (Kompressionsvolumen:  $625 \text{ cm}^3$ ) bei 20 bzw. 25 bar Fülldruck und einer Arbeitsfrequenz von 54 Hz durchgeführt. Es ist zu erkennen, dass bei beiden Fülldrücken das Effizienzmaximum bei ca. 50 mm Regeneratorlänge liegt, wobei ein Fülldruck von 25 bar günstiger ist als ein Fülldruck von 20 bar. Gleichzeitig zeigt sich ein Maximum in der Kühlleistung bei einer deutlich geringeren Regeneratorlänge von 35 mm. Dies lässt sich durch die stark von der Regeneratorlänge abhängige Flussimpedanz des Kaltkopfes erklären, die dazu führt, dass der Kaltkopf bei kurzen Regeneratorlängen deutlich mehr pV-Leistung aufnimmt, wie in Abbildung 8.14 zu erkennen ist. Die pV-Leistung des Kompressors wird durch seine maximale Stromaufnahme begrenzt, sodass Regeneratorlängen unterhalb von 40 mm mit dem verwendeten Kompressor nicht realisierbar sind. Da auch noch eine gewisse Flussbegradigung im Regenerator mit berücksichtigt werden muss, wurde für die Regeneratorlänge der für die Effizienz optimale Wert von 50 mm verwendet.

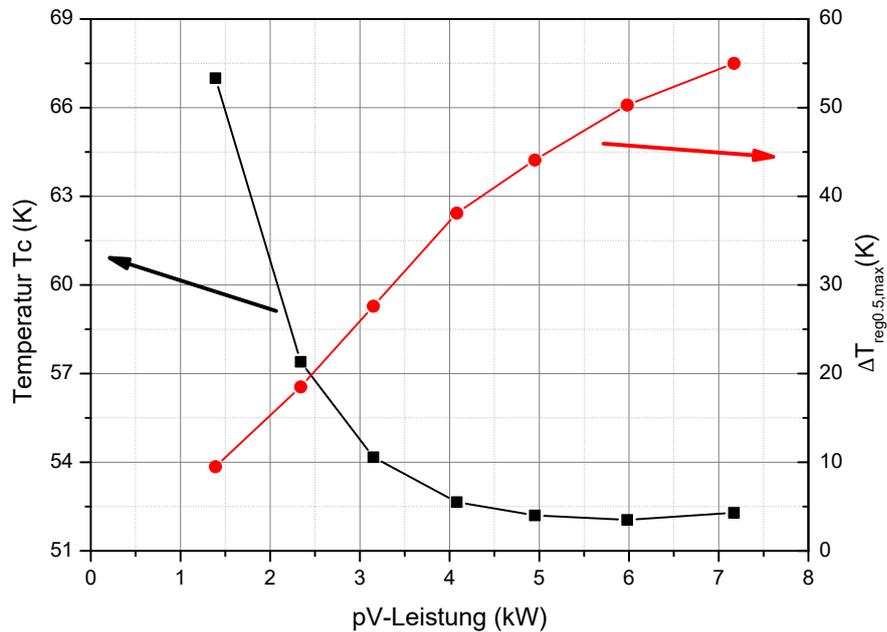


Abbildung 8.15: Kaltkopf­temperatur und Temperatur­aufspaltung in Ab­hän­gig­keit der pV-Leistung bei 54 Hz Arbeits­fre­quenz und 18 bar Füll­druck.

### 8.5.2 Experimentelle Testergebnisse mit verkürztem Regenerator

Zur Erhöhung der radialen Wärmeleitfähigkeit wurde der Regenerator neben Edelstahl #400 Sieben im mittleren Drittel mit einem alternierenden Stapel aus jeweils einem Kupfer #80 und fünf Edelstahl #400 Sieben gefüllt. Die Gesamtfüllhöhe betrug 50 mm, was einem Länge-zu-Durchmesser­verhältnis von ca. 0,4 entspricht. Die Inertance 1 wurde entsprechend der neuen Konfiguration optimiert und besteht nun aus einer einzelnen Leitung von 90 cm Länge und 10 mm Innendurchmesser. Es wurden Messreihen mit unterschiedlichen Frequenzen, Füll­drücken und Eingangsleistungen durchgeführt. Abbildung 8.15 zeigt die Kaltkopf­temperatur und die maximale Temperatur­aufspaltung in der Regenerator­mitte in Ab­hän­gig­keit der pV-Leistung. Im Vergleich zu den Messungen mit langem Regenerator (siehe Abbildung 8.9) erkennt man einen kontinuierlichen Anstieg der Aufspaltung. Bei höheren Eingangsleistungen flacht dieser leicht ab, was vermutlich durch den ansteigenden Energiefluss in axialer Richtung verursacht wird. Ein Anstieg der Basistemperatur ist nur bei hohen pV-Leistungen (> 6 kW) erkennbar (vgl. Abbildung 8.8).

Die Abbildungen 8.16 und 8.17 zeigen die Kühlleistungen bei 4 kW (Arbeits­fre­quenz: 51 Hz, Füll­druck: 20 bar) und 8 kW (Arbeits­fre­quenz: 60 Hz, Füll­druck: 23 bar) pV-Leistung. Bei der niedrigeren Eingangsleistung wurde auch die Wirksamkeit einer Superisolationssummantelung

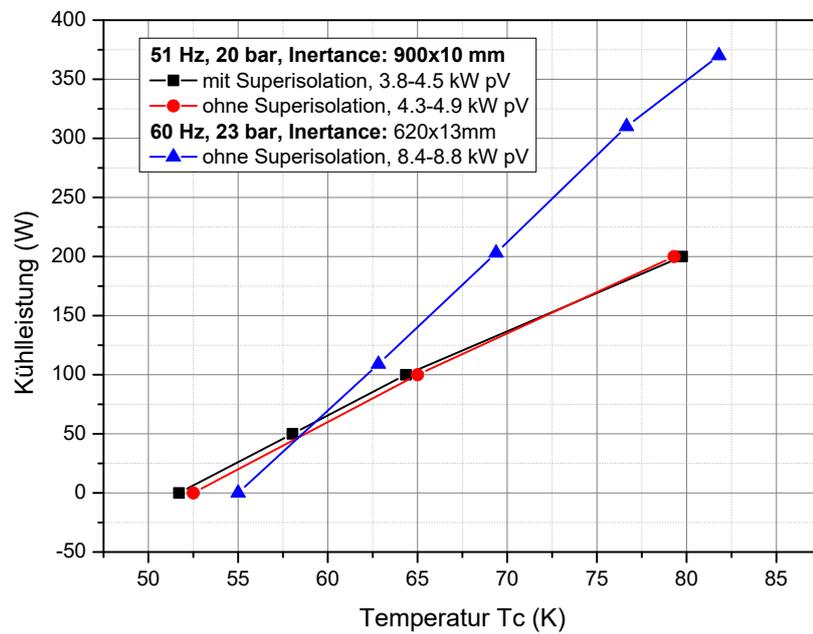


Abbildung 8.16: Kühlleistung bei einer pV-Leistung von 4 kW (Arbeitsfrequenz: 51 Hz, Fülldruck: 20 bar) bzw. 8 kW pV-Leistung (Arbeitsfrequenz: 60 Hz, Fülldruck: 23 bar).

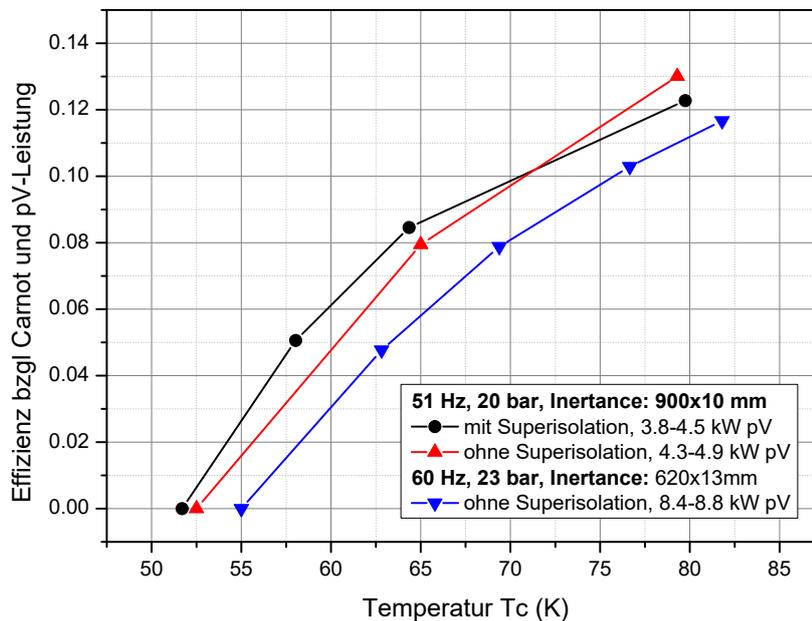


Abbildung 8.17: Effizienzen bei 4 kW (51 Hz, 20 bar) und 8 kW pV-Leistung (60 Hz, 23 bar).

untersucht. Wie in den Abbildungen zu sehen, bewirkt diese eine leichte Absenkung der Basistemperatur, bei 80 K spielt sie jedoch kaum noch eine Rolle. Mit einer pV-Leistung von 4 kW wurde eine Kühlleistung von 200 W bei 80 K erreicht und bei einer pV-Leistung von 8,4 kW eine Kühlleistung von 350 W erreicht. In Abbildung 8.17 sind die Effizienzen bezüglich des Carnotwirkungsgrads und pV-Leistung aufgetragen. Man erkennt, dass bei hohen Eingangsleistungen die Effizienz kleiner ist als bei niedrigen, was durch die Zunahme der parasitären Strömung im Regenerator zur erklären ist. In Vergleich zu Abbildung 8.13 liegt die Effizienz jedoch deutlich unter dem durch die SAGE-Simulation erwarteten Wert. Angesichts der Tatsache, dass der Kaltkopf für einen Temperaturbereich unter 30 K ausgelegt ist und nur durch geringe Modifikationen an den Betrieb bei 80 K angepasst wurde, ist eine Effizienz von über 11% zufriedenstellend. So erreichte z.B. Tanchon eine Effizienz von (Kaltkopf optimiert für 65 K) 12% [86] und Willems eine Effizienz von 18% [32] bei 77 K bzgl. Carnotwirkungsgrad und pV-Leistung.

Nach Beendigung des in dieser Arbeit behandelten Projektvorhabens konnte durch Optimierung der Regeneratorfüllungen, der Arbeitsfrequenz und des Fülldrucks, die Leistung des HLPRK bei 72 K von 240 W auf 300 W gesteigert werden (ca. 400 W bei 80 K extrapoliert) [95]. Die Regeneratormatrix bestand dabei aus Mesh 400 Edelstahlsieben wobei in der Rege-

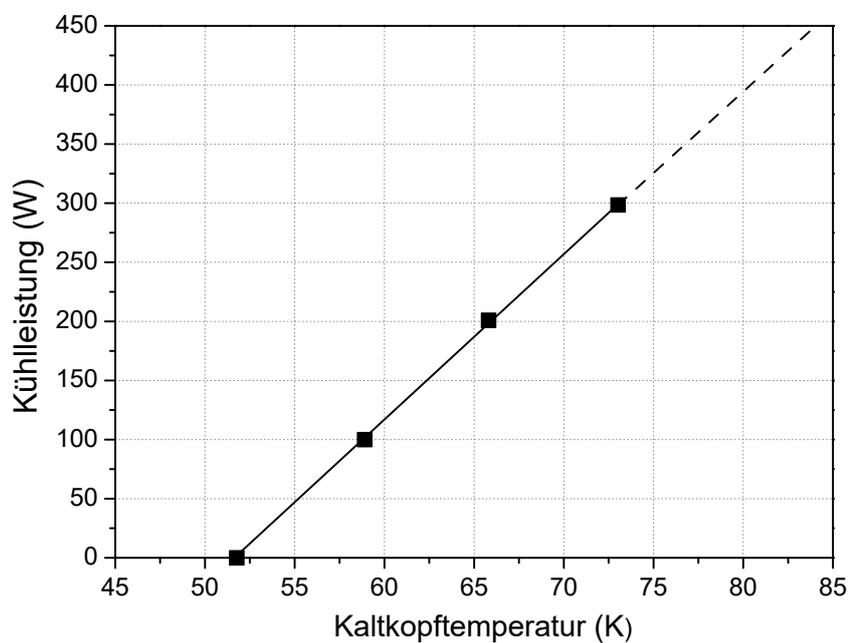


Abbildung 8.18: Kühlleistung bei 80 K des HLPRK nach Optimierungen durch J. C. Sun bei einer Arbeitsfrequenz von 56 Hz, einer elektrischen von Eingangsleistung von 8,9 kW und einem Fülldruck von 20 bar [95]. Die Kühlleistung bei 80 K wurde aus den Messdaten extrapoliert.

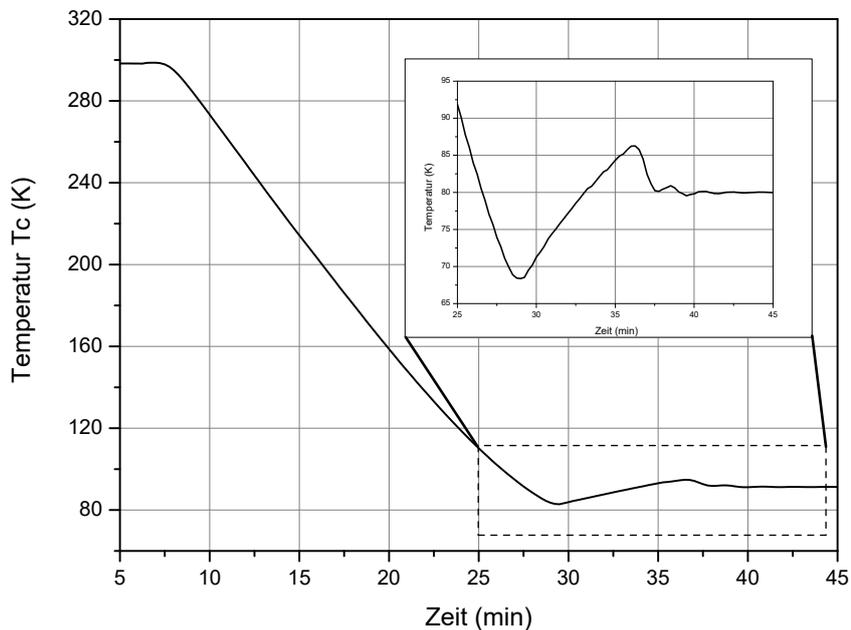


Abbildung 8.19: Kaltkopftemperatur  $T_c$  während eines Abkühlvorgangs mit PID-Regler.

neratormitte zusätzliche Kupfersiebe im Verhältnis 5:1 (Anzahl Edelstahl- zu Kupfersieben) eingebaut wurden (siehe Abbildung 8.18). Die zentrale Anordnung der Kupfersiebe hat den Vorteil, dass bei gegebener Regeneratorlänge mehr Siebfläche am warmen und kalten Ende zur Verfügung steht. Die dämpfende Wirkung der gut leitenden Siebe ist dadurch nur geringfügig verringert, da der radiale Temperaturunterschied an den Regeneratorenenden nur sehr klein ist.

### 8.5.3 Effiziente Regelung der Arbeitstemperatur mittels PID-Regler

Um einen effizienten Betrieb als Rekondensierer für kryogene Gase, wie z.B. Stickstoff, auch unter wechselnden Betriebsbedingungen, wie sie u.a. unterschiedliche Kühllasten darstellen, zu ermöglichen, wurde eine Temperaturregelung programmiert, die die Kompressorleistung so anpasst, dass eine konstante Kaltkopftemperatur gehalten wird. Diese Aufgabe wird in der Technik normalerweise durch einen sogenannten PID-Regler [96] geleistet. Abbildung 10.1 im Anhang zeigt die verwendete Implementierung in LABVIEW. Dort wird auch detailliert auf die Softwaresteuerung des Micromaster-Umrichters eingegangen.

Abbildung 8.19 zeigt den Einschwingvorgang nach einer Abkühlung von Raumtemperatur. Aufgrund der hohen Totzeit der Temperaturmessung von 15 Sekunden und der Begrenzung der Kompressorspannungsänderung auf 5 Volt/Sekunde dauert der Einschwingvorgang über

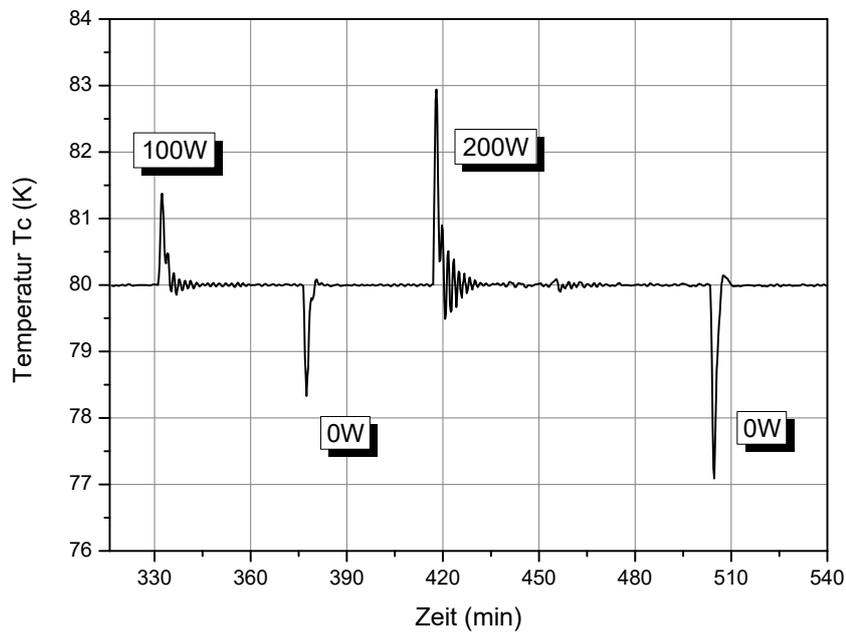


Abbildung 8.20: Kaltkopfverhalten bei plötzlicher Laständerung und aktivierter PID-Regelung.

15 Minuten. Ein schnelleres Auslesen der Temperatursensoren konnte jedoch nicht mehr rechtzeitig implementiert werden. Das relativ langsame Einschwingverhalten zeigt sich auch bei der Reaktion auf plötzliche Laständerungen, die in Abbildung 8.20 dargestellt sind. Hier wurde während der Messungen kurzzeitig eine Heizlast (100 W und 200 W) ein- und wieder ausgeschaltet.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Für die Kühlung von hochtemperatursupraleitenden 4 MVA Maschinen (Motor oder Generator) wurde ein einstufiger Stirling-Typ-Pulsrohrkühler aufgebaut. Die Kühlleistung des Kryokühlers sollte bei einer elektrischen Eingangsleistung von 10 kW (8 kW pV-Leistung) etwa 80 - 100 W bei 30 K betragen. Die Vorteile dieses Kühlerstyps gegenüber klassischen Kühlkonzepten liegen in einer erhöhten Zuverlässigkeit und langen Wartungsintervallen. Während einstufige Stirling-Typ Pulsrohrkühler für den Temperaturbereich des flüssigen Stickstoffs (77 K) kommerziell bereits erhältlich sind, gibt es gegenwärtig noch keine kommerziellen Systeme für den für Anwendungen der Hochtemperatursupraleitung wichtigen Temperaturbereich nahe 30 K.

Der Versuchsaufbau besteht aus einem 10 kW Linearkompressor vom Typ 2S297W der Firma CFIC Inc. aus Troy, USA der zur Druckwellenerzeugung genutzt wird. Der Betrieb des Kompressors erfolgte über einen Micromaster 440 Umrichter der Firma Siemens, der über ein selbst entwickeltes Computerprogramm gesteuert wurde. Der Kaltkopf wurde in linearer Bauweise gefertigt, um Umlenkverluste zu vermeiden.

Während der ersten Abkühlversuche trat im Regenerator bei tiefen Temperaturen und hoher pV-Leistung eine Temperaturinhomogenität auf, die auf einen konstanten Massenstrom (zirkularer DC-Massenfluss) innerhalb des Regenerators zurückgeführt werden konnte. Dieser hier erstmals beobachtete DC-Massenfluss erzeugt einen Nettoenergiefluss vom warmen zum kalten Ende des Regenerators, wodurch die Kühlleistung in erheblichem Maße reduziert und damit auch die erreichbare Minimaltemperatur (Basistemperatur) stark erhöht wird.

Für die Auslegung und Optimierung des Kaltkopfes wurde zunächst ein Kühlermodell auf Basis der kommerziellen Simulationssoftware SAGE erstellt, welches die im Experiment auftretende Temperaturinhomogenität im Regenerator nicht mit einbezog. Zur Modellierung der im Experiment beobachteten Inhomogenität wurde der Regenerator dieses SAGE-Modells durch zwei identische parallele Regeneratoren mit einstellbarer transversaler Wärmekopplung ersetzt. Im homogenen Fall (ohne DC-Massenfluss) verhält sich das erweiterte Modell wie das ursprüngliche. Wurde jedoch im erweiterten Modell als Startbedingung ein Regenerator mit nicht-linearem Temperaturprofil gewählt, so trat auch hier ein zeitlich konstanter DC-Massenfluss auf. Mit Hilfe dieses Modells konnten nun die Bedingungen für das Auftreten dieses neuen Verlustmechanismus näher untersucht werden, wobei sich die transversale Wärmeleitung in der Regeneratormatrix sowie der Massenfluss (pV-Leistung) als wichtige

Parameter zeigten. Die Erkenntnisse aus dem numerischen Modell wurden dann für die Entwicklung eines neuen analytischen Modells genutzt, das den im Experiment beobachteten DC-Massenfluss quantitativ beschreiben kann.

Nach dem Auftreten der Regeneratorströmung im Experiment wurde zunächst versucht mittels geeigneter Blenden eine gleichmäßigere Anströmung des Regenerators zu erreichen. Als dies aber nicht den gewünschten Erfolg brachte, wurde der Regenerator mit einer Sandwich-Struktur aus thermisch gut und schlecht leitenden Materialien (Edelstahl-, Kupfer- und Bronze-Drahtgewebe) gefüllt, um die transversale Wärmeleitung der Matrix zu erhöhen. Durch diese Maßnahmen konnte der azimutale Temperaturgradient deutlich abgesenkt werden, was zu einer Reduktion der Strömung führte.

Die anfängliche Basistemperatur des Kaltkopfes von 65 K konnte so durch Verbesserung der Regeneratormatrix auf 34 K gesenkt werden. Die Kühlleistung bei 40 K beträgt 20 W bei einer pV-Leistung von 6 kW. Dies entspricht einem Carnot-Wirkungsgrad bezüglich der pV-Leistung von 1,5%. Aufgrund der Ausbildung einer Regeneratorströmung bei hohen Eingangsleistungen konnte jedoch keine Basistemperatur unterhalb von 30 K erreicht werden. Da die Verluste durch die Regeneratorströmung bei höheren Temperaturen geringer ausfallen, wurde der Kaltkopf durch Verkürzung des Regenerators für einen Betrieb bei 80 K angepasst. Die damit realisierte Kühlleistung von 350 W bei einer pV-Leistung von 8,4 kW entspricht 11% des Carnot-Wirkungsgrades bezüglich der pV-Leistung.

Die beim Entstehen dieser Arbeit gesammelten Erfahrungen flossen in die Konstruktion neuer Kaltköpfe für den Betrieb bei 30 K ein. So wurde zunächst versucht mittels Vorkühlung durch eine weitere Pulsrohrstufe die Regeneratorverluste zu verringern. So konnten wir erstmals mit 27,1 K eine Basistemperatur unter 30 K erreichen; allerdings war die Kühlleistung bei 30 K nur gering [97]. Erst mittels einer vollständigen Neuentwicklung eines zweistufigen gasgekoppelten Pulsrohrkaltkopfes mit geringer Eingangsleistung (pV-Leistung: ca. 4 kW) wurden erstmals eine Basistemperatur von 13,7 K und eine Kühlleistung von 18 W bei 30 K erzielt [93]. Durch weitere Optimierung des Kryokühlers sowie den Parallelbetrieb mehrerer Kaltköpfe an einem Kompressor erscheint die ursprünglich angestrebte Kühlleistung von 80 - 100 W bei 30 K für zukünftige Entwicklungen realistisch.

Neuere Entwicklungen im Bereich der Supraleiter ermöglichen Betriebstemperaturen von über 30 K. Sogenannte Kabel der zweiten Generation (2G-wire) aus YBCO-Dünnschichten können hohe Stromdichten und Feldstärken, wie sie in Motoren/Generatoren benötigt werden, schon bei 65 K bereitstellen [98, 99]. Diese Entwicklungen verringern den Aufwand und die Kosten für die benötigte Kryotechnik signifikant, sodass zukünftig neue Anwendungen der Supraleitung möglich werden.

## Summary and Outlook

For the cooling of high temperature superconducting 4 MVA machines (motors or generators), a single-stage Stirling-type pulse-tube cryocooler was built. The cooling power, which the cryocooler was aimed for, is 80 - 100 W at 30 K with an electrical input power of 10 kW (8 kW pV-power). The advantages of this cooler type compared to traditional cooling concepts are an increased reliability and long maintenance intervals. While single-stage Stirling-type pulse-tube cryocoolers for the temperature range of liquid nitrogen (77 K) are already commercially available, there exist currently no commercial systems for the temperature range near 30 K, which is the important range for applications of high-temperature superconductivity.

The experimental setup consisted of a 10 kW linear compressor, type 2S297W, from CFIC Inc. which was used as the pressure wave generator. The compressor was operated by a Micromaster 440 frequency inverter from Siemens, which was controlled by a custom-made computer program. The cold head was made in inline configuration, in order to avoid deflection losses.

During the first cool-downs tests a temperature inhomogeneity occurred in the regenerator at low temperature and high pV-power, which was attributed to a constant mass flow (circular dc-flow) within the regenerator. This firstly observed dc-flow, generates a net energy flow from the hot end to the cold end of the regenerator, which reduces the cooling capacity considerably and hence the minimum attainable temperature is severely increased.

For the design and optimization of the cold-head, a cryocooler model was initially created using the commercial simulation software *SAGE*, which did not include the regenerator inhomogeneity seen in the experiment. For the modeling of the observed streaming inhomogeneity caused by the dc-flow, the regenerator was replaced by two identical parallel regenerators with variable transverse thermal coupling. In the inhomogeneous case (without dc-flow) the extended model showed the same results as the original model. When choosing a regenerator with non-linear temperature profile as initial condition, a dc-flow also occurred in the extended model. With the help of this model, the conditions for the appearance of this new loss mechanism can be analyzed. It turned out that the transverse heat conductance in the regenerator matrix as well as the mass flow (pV-power) are important parameters. The insights from the numerical model were used for the development of a new analytical model, which is able to reproduce the observed dc-flow in the experiment quantitatively.

After the occurrence of the regenerator streaming in the experiment, it was first tried to uniform the flow at the aftercooler by using appropriate bezels. As this did not shown the desired effect, a sandwich structured regenerator made of good and bad thermal conducting screens (stainless steel-, copper-, and brass mesh) was used in order to increase the transverse

heat conduction. By these measures the azimuthal temperature gradient was considerably decreased, resulting in a reduction of the streaming flow.

By optimization of the sandwich structure, the initial base temperature of the cold head of 65 K was reduced to 34 K. The cooling capacity at 40 K was 20 W with a pV-power of 6 kW. This represents a Carnot efficiency with respect to the pV-power of 1.5%. Due to the formation of a regenerator streaming at high input power, a base temperature below 30 K could not be achieved. Since the losses by the regenerator streaming flow at higher temperatures are lower, the cold head was adjusted by shortening the regenerator to operate at 80 K. The realized cooling capacity in this case was 350 W with a pV-power of 8.4 kW, corresponding to 11% of the Carnot efficiency with respect to the pV-power.

The experiences collected in this work were used for the construction of new cold heads operating at 30 K. Initially it was tried to lower the regenerator losses by using an additional pre-cooling stage. Thus we were able to achieve a base temperature of 27.1 K for the first time, however, the cooling power at 30 K was very low [97]. By starting a complete redevelopment of a two-stage gas-coupled pulse-tube cold head with a relative low input power (pV-power: 4 kW), a base temperature of 13.7 K and a cooling power of 18 W at 30 K was achieved for the first time [93]. Further optimization of that cryocooler and the parallel operation of multiple cold heads with a single compressor make the original target cooling power of 80 - 100 W at 30 K a realistic goal for future developments.

New developments in the field of superconductors enable operating temperatures higher than 30 K. So called second generation wires (2G-wires) made of YBCO-thin films can achieve high current- and field densities, which are required in superconducting motors and generators, already at 65 K [98, 99]. These developments reduce the complexity and costs of the cryogenic system, enabling new applications of superconductivity.

## Literaturverzeichnis

- [1] ONNES, H. K.: *The liquefaction of helium*. Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden, XI(108):168–185, 1908.
- [2] ONNES, H. K.: *Further experiments with liquid helium, B. On the change of resistance of pure metals at very low temperatures, etc.* Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden, XII(119):1107–1113, 1911.
- [3] MEISSNER, W. und R. OCHSENFELD: *Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit*. Naturwissenschaften, 21(44):787–788, 1933.
- [4] BARDEEN, J., L. N. COOPER und J. R. SCHRIEFFER: *Microscopic Theory of Superconductivity*. Physical Review, 106(1):162 – 164, 1957.
- [5] BEDNORZ, J. G. und K. A. MÜLLER: *Possible high  $T_c$  superconductivity in the Ba-La-Cu-O system*. Zeitschrift für Physik B Condensed Matter, 64(2):189–193, 1986.
- [6] YNTEMA, G. B.: *Superconducting winding for electromagnets*. Physical Review, 98:1197, 1955.
- [7] KUNZLER, J. E., E. BUEHLER, F. S. L. HSU und J. H. WERNICK: *Superconductivity in  $Nb_3Sn$  at High Current Density in a Magnetic Field of 88 kgauss*. Phys. Rev. Lett., 6:89–91, Feb 1961.
- [8] WU, M. K., J. R. ASHBURN, C. J. TORNG, P. H. HOR, R. L. MENG, L. GAO, Z. J. HUANG, Y. Q. WANG und C. W. CHU: *Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Y-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure*. Physical Review Letters, 58(9):908–910, 1987.
- [9] MAEDA, H., Y. TANAKA, M. FUKUTOMI und T. ASANO: *A New High- $T_c$  Oxide Superconductor without a Rare Earth Element*. Japanese Journal of Applied Physics, 27(2A):L209, 1988.
- [10] GROMOLL, B., N. HUBER, M. DIETRICH, L. W. YANG und G. THUMMES: *Development of a 25 K Pulse Tube Refrigerator for Future HTS-Series Products in Power Engineering*. AIP Conference Proceedings, 823(1):643–652, 2006.

- [11] WANG, C. und P. E. GIFFORD: *A small-scale liquid helium plant by using a 4 K pulse tube cryorefrigerator*. In: *presented at the Cryogenic Engineering Conference*, Montreal, 1999.
- [12] DAUGERT, P., G. M. GISTAU-BAGUER, P. BRIEND, B. HILBERT, E. MONNERET, J. C. VILLARD, G. MAROT, F. DELCAYRE, C. MANTILERI, F. HAMBER, J. C. COURTY, P. HIREL, A. COHU und H. MOUSSAVI: *Air Liquide's Contribution to the CERN LHC Refrigeration System*. In: *Advances in Cryogenic Engineering*, Band 53, Seiten 557–563, 2008.
- [13] CAILLAUD, A., S. CRISPEL, V. GARABIÉ, F. DELCAYRE und G. AIGOUY: *Evolution of the Standard Helium Liquifier and Refrigerator Range Designed by Air Liquide DTA, France*. In: *Advances in Cryogenic Engineering*, Band 53B, Seiten 830–837, 2008.
- [14] SCIVER, S. W. VAN: *Cryogenic systems for superconducting devices*. *Physica C*, 354:129–135, 2001.
- [15] MCWILLIAMS, A.: *Superconductors: Technologies and Global Markets*. Technischer Bericht AVM066A, bcc Research, 2008.
- [16] AUBERT, G.: *High Magnetic Fields: Physical Limits in Magnet Design*. *Physica Scripta*, T35:168–171, 1991.
- [17] GOYAL, A., S. KANG, K. J. LEONARD, P. M. MARTIN und A. A. GAPUD: *Irradiation-free, columnar defects comprised of self-assembled nonodots and nanorods resulting in strongly enhanced flux-pinning in  $YBa_2Cu_3O_{3-\delta}$  films*. *Superconducting Science and Technology*, 18:1533–1538, 2005.
- [18] SNITCHLER, G., B. GAMBLE und S. KALSI: *The Performance of a 5 MW High Temperature Superconductor Ship Propulsion Motor*. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Band 15, Seiten 2206–2209, June 2005.
- [19] FRAUENHOFER, J., J. GRUNDMANN, G. KLAUS und W. NICK: *Basic concepts, status, opportunities, and challenges of electrical machines utilizing high-temperature superconducting (HTS) windings*. *Journal of Physics: Conference Series*, 97:012189 (10pp), 2008.
- [20] NICK, W., G. NEROWSKI, H. W. NEUMÜLLER, M. FRANK, P. VAN HASSELT, J. FRAUENHOFER und F. STEINMEYER: *380 kW synchronous machine with HTS*

- rotor windings - development at Siemens and first test results.* Physica C, 372-376:1506–1512, 2002.
- [21] NEUMULLER, H. W., W. NICK, B. WACKER, M. FRANK, G. NEROWSKI, J. FRAUENHOFER, W. RZADKI und R. HARTIG: *Advances in and prospects for development of high-temperature superconductor rotating machines at Siemens.* Superconductor Science and Technology, 19:S114–S117, 2006.
- [22] FRANK, M., J. FRAUENHOFER, B. GROMOLL, P. VAN HASSELT, W. NICK, G. NEROWSKI, H. W. NEUMÜLLER, H. U. HÄFNER und G. THUMMES: *Thermosiphon cooling system for the Siemens 400 kW HTS synchronous machine.* In: *Advances in Cryogenic Engineering*, Band 49, Seiten 859–866. AIP, New York, 2004.
- [23] GROMOLL, B., N. HUBER, M. DIETRICH, L. W. YANG und G. THUMMES: *Development of a 25 K Pulse Tube Refrigerator for Future HTS-Series Products in Power Engineering.* Presentation held at the CEC/ICMC Conference in Keystone, Co, USA, 2005.
- [24] GIFFORD, W. E. und R. C. LONGSWORTH: *Pulse Tube Refrigeration.* Trans. ASME Journal of Engineering for Industry, 63:264–268, 1964.
- [25] GIFFORD, W. E. und R. C. LONGSWORTH: *Surface Heat Pumping.* In: *Advances in Cryogenic Engineering*, Band 11, Seite 171, 1966.
- [26] MIKULIN, E. I., A. A. TARASOV and M. P. SHKREBYONOCK: *Low-Temperature Expansion Pulse Tubes.* In FAST, R.W. (editor): *Advances in Cryogenic Engineering*, volume 29 of *Advances in Cryogenic Engineering*, pages 629–637. Springer US, 1984.
- [27] ZHU, S., P. WU and Z. CHEN: *Double inlet pulse tube refrigerators: an important improvement.* Cryogenics, 30:514, 1990.
- [28] CHAN, C.K., C.B. JACO, J. RAAB, E. TWARD and M. WATERMAN: *Miniature pulse tube cooler.* In *Proceedings of the 7th International Cryocooler Conference*, pages 113–124, 1993.
- [29] GAO, J. L. and Y. MATSUBARA: *Experimental investigation of 4 K pulse tube refrigerator.* Cryogenics, 34:25–30, 1994.
- [30] WANG, C., G. THUMMES and C. HEIDEN: *A two-stage pulse tube cooler operating below 4 K.* Cryogenics, 37:159–164, 1997.

- [31] RADEBAUGH, R.: *Development of the Pulse Tube Refrigerator as an Efficient and Reliable Cryocooler*. In *Proceedings of the Institute of Refrigeration*, volume 96, pages 11–31, London, 1999-2000. IIR.
- [32] WILLEMS, D. W. J.: *High-Power Cryocooling*. PhD thesis, University of Eindhoven, 2007.
- [33] NGUYEN, C., A. YECKLEY, A. CULLER, M. HABERBUSCH and R. RADEBAUGH: *Hydrogen/Oxygen Propellant Densifier Using a Two-Stage Pulse Tube Cryocooler*. In *Advances in Cryogenic Engineering*, volume 710, pages 1703–1712. American Institute of Physics, 2004.
- [34] STIRLING CRYOGENICS B.V.: *Electrial power consumption and cold production graphs of STC-1 cryocooler*. Technical Report, Stirling Cryogenics and Refrigeration BV, 2008.
- [35] CRYOMECH INC.: *AL600 with CP1014*. Cryorefrigerator Specification Sheet, Cryomech Inc., 2007.
- [36] IKEDA, K.: *Development of a Cooling System for High-Temperature Superconducting Traction Transformer for Railway Rolling Stocks*. *Railway Technology Avalanche*, 26:153, 2009.
- [37] ZIA, J. H.: *A commercial pulse tube cryocooler with 200 W refrigeration at 80 K*. In *Cryocoolers 13*, pages 165–171, New York, 2005. Springer.
- [38] ZIA, J. H.: *A Pulse Tube Cryocooler with 300 W Refrigeration at 80K and an Operating Efficiency of 19% Carnot*. In MILLER, S. D. and JR. R. G. ROSS (editors): *Cryocoolers 14*, 2007.
- [39] CRYOMECH INC.: *PT810 Capaciity Curve (w/ CP980)*. Technical Report, Cryomech Inc., [http://www.cryomech.com/CRYOREFRIGERATORS/PT810\\_SPECS.htm](http://www.cryomech.com/CRYOREFRIGERATORS/PT810_SPECS.htm), 2007.
- [40] CRYOMECH INC.: *AL330 with CP970*. Cryorefrigerator Specification Sheet, Cryomech Inc., 2007.
- [41] HÄFNER, H. U., F. GIEBELER and G. THUMMES: *Einstufiger 25 K Pulsrohrkuehler fuer HTS-Energie-Applikationen*. In *DKV-Tagungsbericht 2003*, volume 1, pages 173–183. Deutscher Kälte- und Klimatechnischer Verein, Stuttgart, 2003. (in German).

- [42] STIRLING CRYOGENICS B.V.: *Power Coolers - The ultimate way of cooling power*. Technical Report, Stirling Cryogenics and Refrigeration BV, <http://www.stirlingcryogenics.com/~uploads/products/file/Familysheet Powercooler - DL.pdf>, November 2009.
- [43] OLSON, J. R. and G. W. SWIFT: *Acoustic streaming in pulse tube refrigerators : tapered pulse tubes*. *Cryogenics*, 37(12):769–776, 1997.
- [44] KLUNDT, K.: *Optimierung eines Pulsröhrenkühler-Systems für die Sensorkühlung bei 80 K*. Dissertation, Institut für Angewandte Physik, Universität Gießen, 2002.
- [45] ZHU, S. W., S. L. ZHOU, N. YOSHIMURA and Y. MATSUBARA: *Phase shift effect of the long neck tube for the pulse tube refrigerator*. In *Cryocoolers 9*, pages 269–278, 1997.
- [46] MITCHELL, M. P.: *Pulse tube refrigerator*. US Patent 5966943, 1997.
- [47] TANIDA, K., J. GAO, N. YOSHIMURA and Y. MATSUBARA: *Three-staged pulse tube refrigerator controlled by four-valved method*. In *Advances in Cryogenic Engineering*, volume 41, pages 1503–1509, 1996.
- [48] ZHU, S., Y. KAKIMI and Y. MATSUBARA: *Investigation of active-buffer pulse tube refrigerator*. *Cryogenics*, 38(8):461–471, 1997.
- [49] BRITO, M. C. and G. D. PESKETT: *Experimental analysis of free warm expander pulse tube*. *Cryogenics*, 41(10):757–762, 2001.
- [50] MASUYAMAA, S., Y. H. KIMB, S. J. PARKB, Y. J. HONGB, H. B. KIMB and S. H. LEEC: *Experimental research of Stirling type pulse tube refrigerator with an active phase control*. *Cryogenics*, 46(5):385–390, 2006.
- [51] SWIFT, G. W., D. L. GARDNER and S. BACKHAUS: *Acoustic recovery of lost power in pulse tube refrigerators*. *Journal of the Acoustic Society of America*, 105(2):711–724, 1999.
- [52] KOETTIG, T., S. MOLDENHAUER, M. PATZE, M. THÜRCK and P. SEIDEL: *Investigation on the internal thermal link of pulse tube refrigerators*. *Cryogenics*, 47:137–142, 2007.
- [53] YANG, L. W., M. DIETRICH and G. THUMMES: *Ein- und zweistufige Pulsrohrkühler mit Linearkompressoren für die HTS-Kryoelektronik*. Poster auf der Kryo, 2004.

- [54] GEDEON, D.: *Sage: Object orientated software for stirling-type machine design*. In *Proc. of the 29th Intersociety Energy Conversion and Engineering Conference*, volume 4, pages 1902–1907. American Institute for Aeronautics and Astronautics, Monterey CA, 1994.
- [55] RENNERT, P. and H. SCHMIEDEL (editors): *Physik*. BI-Wissenschaftsverlag, 1995.
- [56] STEIJAERT, P. P.: *Thermodynamical aspect of pulse-tube refrigerators*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1999.
- [57] RAZANI, A., B. FLAKE and S. YARBROUGH: *Exergy Flow in Pulse Tube Refrigerators and their Performance Evaluation based on Exergy Analysis*. In WAYNERT, J. (editor): *Advances in Cryogenic Engineering: Transactions of the Cryogenic Engineering Conference - CEC*, volume 49, pages 1508–1518. American Institute of Physics, 2004.
- [58] REDLICH, O. and J. N. S. KWONG: *On the Thermodynamics of Solutions. V. An Equation of State. Fugacities of Gaseous Solutions*. *Chemical Reviews*, 44(1):233–244, 1949.
- [59] GEDEON, D.: *Sage: Stirling-Cycle, Model-Class Reference Guide*. Gedeon Associates, Athens, OH, 1999.
- [60] SWIFT, G. W.: *Thermoacoustics - A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators*. Acoustical Society of America, 2002.
- [61] YANG, L. W. and G. THUMMES: *Development of Stirling-Type Coaxial Pulse Tube Cryocoolers*. In ROSS, R. G. (editor): *Cryocoolers 13*, volume 13, pages 141–148. International Cryocooler Conference, Springer, 2005.
- [62] KOH, J. C. Y.: *Thermal Conductivity and Electrical Resistivity of Porous Material*. Technical Report CR-120854, NASA, 1971.
- [63] LEWIS, M. A. and R. RADEBAUGH: *Measurement of Heat Conduction through Metal Spheres*. In *Cryocoolers 11*, pages 419–425, 2001.
- [64] LEWIS, M. A. and R. RADEBAUGH: *Measurement of Heat Conduction through Bonded Regenerator Matrix Materials*. In *Cryocoolers 12*, pages 517–522, 2002.
- [65] THUMMES, G., M. SCHREIBER, R. LANDGRAF and C. HEIDEN: *Convective Heat Losses in Pulse Tube Coolers: Effect of Pulse Tube Inclination*. In R.G. ROSS, JR. (editor): *Cryocooler 9*, New York, 1997. Plenum Press.

- [66] COLLINS, S. A., D. L. JOHNSON, G. T. SMEDLEY and JR. R. G. ROSS: *Performance Characterisation of the TRW 35K Pulse Tube Cooler*. In KITTEL, P. (editor): *Advances in Cryogenic Engineering*, volume 41B, pages 1471–1478, New York, 1996. Plenum Press.
- [67] WALKER, G.: *Cryocoolers*, volume 2. Plenum Press, New York and London, 1983.
- [68] RÜHLICH, I.: *Strömungstechnische Optimierung von Regeneratoren für Gaskältemaschinen*. PhD thesis, TU-Dresden, 1999.
- [69] FREY, H. and R. HAEFER: *Tieftemperaturtechnologie*. VDI-Verlag, 1981.
- [70] ÇENGEL, Y. A. and R. H. TURNER: *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*. McGraw-Hill Science, 2004.
- [71] ASSAEL, M. J., J. P. MARTIN TRUSLER and T. F. TSOLAKIS: *Thermophysical Properties of Fluids: An Introduction to their Prediction*. Imerial College Press, 1996.
- [72] ROTT, N.: *Damped and Thermally Driven Acoustic Oscillations in Wide and Narrow Tubes*. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 20:230–243, 1969.
- [73] BRONŠTEJN, I. N.: *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch, 1995.
- [74] PELZ, F. M.: *Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro-Techniker*, volume III, chapter Berechnungen elektromagnetischer Felder nach der Maxwellschen Theorie, pages 231–244. Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik GmbH, Berlin, 1954.
- [75] HUANG, B. J. and M. D. CHUANG: *System design of orifice pulse-tube refrigerators using linear flow network analysis*. *Cryogenics*, 36:889–902, 1996.
- [76] SCHUNK, L. O., J. M. PFOTENHAUER, G. F. NELLIS, R. RADEBAUGH and E. LUO: *Inertance Tube Optimization for kW-Class Pulse Tubes*. In *AIP Conference Proceedings*, volume 710, pages 1269–1276, 2004.
- [77] RADEBAUGH, R., M. LEWIS, E. LUO, J. M. PFOTENHAUER, G. F. NELLIS and L. A. SCHUNK: *Inertance Tube Optimization for Pulse Tube Refrigerators*. In II, J. G. WEISEND (editor): *Advances in Cryogenic Engineering: Transaction of the Cryogenic Engineering Conference - CSC*, volume 51, pages 59–67. American Institute of Physics, 2006.

- [78] ROACH, P. R., A. KASHANI and J. M. LEE: *Theoretical Analysis of a Pulse Tube Regenerator*. In KITTEL, P. (editor): *Advances in Cryogenic Engineering*, volume 41, pages 1357–1363, New York, 1996. Plenum Press.
- [79] BAEK, S. H., E. S. JEONG and S. JEONG: *Two-dimensional model for tapered pulse tubes. Part 1: theoretical modeling and net enthalpy flow*. *Cryogenics*, 40:379–385, 2000.
- [80] VESELY, F. J.: *Computational physics: Einführung in die computative Physik*. Wiener Universitäts Verlag, Wien, 1993.
- [81] GEDEON, D.: *A Globally-Implicit Stirling Cycle Simulation*. In *Proceedings of the 21st Intersociety Energy Conversion Engineering Conference*, volume 1, pages 550–554, 1986.
- [82] MARQUARDT, E. and R. RADEBAUGH: *Design Equations and Scaling Laws for Linear Compressors with Flexure Springs*. In *Cryocoolers 7*, page 783, 1992.
- [83] HEUN, M. K., S. A. COLLINS, D. L. JOHNSON and JR. R. G. ROSS: *Investigations of Gas Effects on Cryocooler Resonance Characteristics*. In R. G. ROSS, JR. (editor): *Cryocoolers 9*, pages 421–430, New York, 1997. Plenum Press.
- [84] DIETRICH, M.: *Neuartiger Linearkompressor für Kleinkältemaschinen zum Einsatz on der Kryoelektronik*. Master's thesis, IAP Universität Giessen, 2002.
- [85] ORGAN, A. J.: *The Regenerator and the Stirling Engine*. Wiley, 1997.
- [86] TANCHON, J., E. ERCOLANI, T. TROLLIER, A. RAVEX and J. M. PONCET: *Design of a very large pulse tube cryocooler for HTS cable applications*. In *Advances in Cryogenic Engineering*, volume 51, pages 661–668. AIP, New York, 2006.
- [87] YANG, L. W., S. BIAN, J. T. LIANG and Y. ZHOU: *Code simulation and verification of pulse tube refrigerator*. *Chinese Journal of Cryogenics*, 99:1–7, 1997.
- [88] ANDERSEN, S. K., M. DIETRICH and G. THUMMES: *Numerical study on transverse asymmetry in the temperature profile of a regenerator in a pulse tube cooler*. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:2795–2804, 2007.
- [89] SO, J. H., G. W. SWIFT and S. BACKHAUS: *An internal streaming instability in regenerators*. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(4):1898–1909, 2006.

- [90] GEDEON, D.: *Flow Circulations in Foil-Type Regenerators Produced by Non-Uniform Layer Spacing*. In R. G. ROSS, JR. (editor): *Cryocoolers 13*, pages 421–430, New York, 2005. Springer US.
- [91] GEDEON, D.: *Intra-Regenerator Flow Streaming Theory*. Unveröffentlichtes Memorandum, Gedeon Associates, Athens, OH, 2004. Auf Anfrage vom Autor beziehbar (Datei: Csuintraregenstreamingtheory.Pdf).
- [92] DIETRICH, M., L. W. YANG and G. THUMMES: *High-power Stirling-type pulse tube cryocooler: Observation and reduction of regenerator temperature-inhomogeneities*. *Cryogenics*, 47(5-6):306 – 314, 2007.
- [93] DIETRICH, M. and G. THUMMES: *Two-stage high frequency pulse tube cooler for refrigeration at 25 K*. *Cryogenics*, 50(4):281 – 286, 2010.
- [94] KLUNDT, K.: *Untersuchung zum Betriebsverhalten eines Miniaturpulsröhrenkühlers*. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Physik, Universität Gießen, 1995.
- [95] SUN, J., M. DIETRICH, L. M. QIU and G. THUMMES: *Operating characteristics of a single-stage Stirling-type pulse tube cryocooler with high cooling power at liquid nitrogen temperatures*. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 16(7):577–585, 2015.
- [96] TIETZE, U., C. SCHENK and E. GAMM: *Halbleiter-Schaltungstechnik*. Springer, 12 edition, 2002.
- [97] SUN, D. M., M. DIETRICH and G. THUMMES: *High-power Stirling-type pulse tube cooler working below 30 K*. *Cryogenics*, 49(9):457 – 462, 2009.
- [98] RUPICH, M. W., D. T. VEREBELYI, W. ZHANG, T. KODENKANDATH and X LI: *Metalorganic Deposition of YBCO Films for Second-Generation High-Temperature Superconductor Wires*. *MRS Bulletin*, 29(08):572–578, 8 2004.
- [99] ZHANG, Y., T.F. LEHNER, T. FUKUSHIMA, H. SAKAMOTO and D.W. HAZELTON: *Progress in Production and Performance of Second Generation (2G) HTS Wire for Practical Applications*. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 24(5):1–5, 10 2014.
- [100] MANN, H., H. SIFFELGEN and R. FRORIEP: *Einführung in der Regelungstechnik: analoge und digitale Regelung, Fuzzy-Regler, Regler-Realisierung, Software*. Hanser, 7 edition, 1997.



## Abbildungsverzeichnis

2.1	Temperaturabhängigkeit des kritischen Feldes von Aluminium, Indium, Quecksilber und Blei. . . . .	4
2.2	Feldfreie Sprungtemperaturen für verschiedene Elemente und Verbindungen. . . . .	4
2.3	Abhängigkeit des kritischen Stroms eines kommerziellen BSCCO-2223 Bandes vom äußeren Magnetfeld bei 77 und 20 K (magnetische Feldlinien verlaufen parallel zur den Kristallschichten) [10]. . . . .	5
2.4	Schematische Darstellung einer rekuperativen und einer regenerativen Kältemaschine. . . . .	6
2.5	Schematische Darstellung des Thermosiphons zur Anbindung des HLPRK-Kaltkopfes an die HTS-Maschine (nach [22]). . . . .	10
2.6	4 MVA Generator im Testbetrieb bei Siemens mit zwei 1-stufigen GM-Kühlern [23]. . . . .	11
2.7	Druckwellenerzeugung bei GM- und Stirling-Typ-Pulsrohrkühlern. . . . .	14
3.1	Schematische Darstellung verschiedener Pulsrohrkühlertypen. . . . .	17
3.2	Entstehung des Oberflächenwärmepumpeffektes im Pulsrohr. . . . .	18
3.3	Temperaturoszillation und Phasenverschiebung im Pulsrohr und der Randschicht. . . . .	19
3.4	Abhängigkeit der Viskosität von Temperatur und Druck für Helium. . . . .	20
3.5	Zeigerdiagramme wichtiger Druckwellen und Massenflüsse für verschiedene Pulsrohrkühlertypen. $\dot{m}_w$ , $\dot{m}_k$ und $\dot{m}_{WWT}$ bezeichnen die Massenflüsse am warmen bzw. kalten Ende des Regenerators sowie am warmen Wärmetauscher. $P_w$ und $P_{PR}$ bezeichnen die Druckhubamplituden am warmen Ende des Regenerators und im Pulsrohr. . . . .	23
3.6	Unterschiedliche Bauformen von Pulsrohrkühlern. . . . .	25
3.7	Bilder einiger am Institut für Angewandte Physik entwickelter Pulsrohrkaltköpfe. . . . .	26
3.8	Kälteleistungen der Pulsrohrkühler aus Abbildung 3.7 im Orifice-Modus bei unterschiedlichen Eingangsleistungen (nach [53]). . . . .	26
3.9	Ein- und ausgehende Energieflüsse eines Volumenelementes. . . . .	28
3.10	Entropiebilanz innerhalb eines Kontrollvolumens. . . . .	28

3.11	Mit SAGE berechnete Energieflüsse im idealen (oben) und realen (unten) Pulsrohrkühler. Für $T_w$ wurden 300 K (Reject-Temperatur) gewählt. Die akustische Leistung des Kompressors beträgt 45 W und die Kaltkopftemperatur 80 K. . . . .	32
3.12	Entropieerzeugung $T_{ref} * \dot{S}_{gen}$ im PT-08 Regenerator nach Gleichungen 3.18 und 3.19 für $T_{ref}=300$ K. . . . .	36
3.13	Wärmeleitung entlang eines Vierkantstabes. . . . .	37
3.14	Illustration zur Berechnung der Anzahl der Übertragungseinheiten $NTU$ . . . . .	40
4.1	Elektrisches Ersatzschaltbild für ein infinitesimal kleines Stück einer Inertance-Leitung. . . . .	45
4.2	Vergleich der mit SAGE berechneten maximal möglichen Phasenverschiebung einer einzelnen Inertance-Leitung mit 1 m <sup>3</sup> Puffervolumen und der bei gleicher Geometrie nach Gleichung 4.12 berechneten Phasenverschiebung. Mitteldruck: 25 bar, Frequenz: 60 Hz, Druckverhältnis: 1.2. Akustische Leistung am Eingang der Inertance. . . . .	47
4.3	Längen der mit SAGE optimierten Inertance-Leitungen in Abhängigkeit der akustischen Leistung am Eingang der Inertance. (a) entspricht der Inertancelänge an der Pulsrohrseite und (b) der Intertancelänge an der Pufferseite. . . . .	48
4.4	Durchmesser der mit SAGE optimierten Intertanceleitungen. (a) entspricht dem Durchmesser an der Pulsrohrseite und (b) dem Durchmesser an der Pufferseite. . . . .	49
4.5	Maximal mögliche Phasenverschiebung für verschiedene Inertance-Typen (mit SAGE berechnet). . . . .	50
4.6	Unterteilung eines Volumens in kleine Kontrollvolumina. Die Gitterpunkte besitzen in jede Raumrichtung einen festen Abstand ( $h$ und $g$ ). Der Druck $p(i, j)$ wird an den Gitterpunkten berechnet. . . . .	52
4.7	Eine einfache Formfunktion (Hütchenfunktion). . . . .	55
5.1	Modell des Hochleistungspulsrohrkühlers in SAGE 3. . . . .	58
5.2	SAGE Modell eines Linearkompressors (nur ein Kolben gezeigt) und Schemazeichnung eines Doppelkolben-Linearkompressors. . . . .	59
5.3	Schema eines wärmeleitenden Festkörpers in SAGE (siehe Text). . . . .	60
5.4	Wärmekapazitäten für typische Regeneratormaterialien im Vergleich zu Helium bei einem Druck von 25 bar. . . . .	63
5.5	Eindringtiefen in 25 bar Helium bei 2 Hz und 60 Hz für Temperaturen zwischen 3 und 300 K. . . . .	63

5.6	Pulsrohrverluste im SAGE-Modell des HLPRK-Kaltkopfes. . . . .	65
5.7	Pulsrohrverluste im SAGE-Modell des "PT-07" Kaltkopfes. . . . .	65
5.8	Exergieverluste der einzelnen Kaltkopfkomponenten für die verschiedenen Modellgenerationen. . . . .	75
5.9	Schematische Darstellung der Energiebilanz des Kaltkopfmodells Nr. 7 aus Abschnitt 5.3 bei einer Kaltkopf­temperatur von 40 K. . . . .	76
5.10	Enthalpie, akustische Leistung und Entropie im Kaltkopfmodell Nr. 7 aus Abschnitt 5.3 bei 40 K. . . . .	77
5.11	Darstellung der Regeneratorkenngrößen $NTU/Länge$ , $NPH/Länge$ und $NPH/NTU$ des Kaltkopfmodells #7 aus Abschnitt 5.3. . . . .	78
5.12	Mögliche Verläufe zirkularer Regeneratorströmungen. Die Abmessungen entsprechen denen des Regenerators im HLPRK. . . . .	79
5.13	Schematisches Regeneratormodell mit parallelen Regeneratoren. . . . .	80
5.14	Temperaturprofile beider Regeneratorhälften ohne radiale Wärmeleitungsbrücken ( $c_{trans} = 0$ ). . . . .	81
5.15	Enthalpieflüsse im gesplitteten und im einzelnen Regenerator. . . . .	82
5.16	Mit SAGE simulierte Temperaturprofile im Regenerator bei unterschiedlichen Kopplungsfaktoren $c_{trans}$ bei einer pV-Leistung von 7 kW und einer Kaltkopf­temperatur $T_c$ von 60 K. . . . .	83
5.17	DC-Massenfluss im Regenerator in Abhängigkeit von $c_{trans}$ bei einer pV-Leistung von 7 kW und einer Kaltkopf­temperatur $T_c$ von 60 K. . . . .	84
5.18	Summe der Enthalpieflüsse in beiden Regeneratoren in Abhängigkeit von $c_{trans}$ bei einer pV-Leistung von 7 kW und einer Kaltkopf­temperatur $T_c$ von 60 K. . . . .	85
5.19	Transversale Temperaturdifferenz zwischen den Regeneratormitten in Abhängigkeit von $c_{trans}$ bei einer pV-Leistung von 7 kW und einer Kaltkopf­temperatur von 60 K. . . . .	86
5.20	DC-Massenfluss in Abhängigkeit des AC-Massenflusses bei einer pV-Leistung zwischen 0,6 und 7 kW, einer Kaltkopf­temperatur von 60 K und $c_{trans} = 0$ . . . . .	87
6.1	$\varepsilon_{dh}$ als Funktion der Temperaturstörung $\Delta T$ für den HLPRK bei 7 kW pV-Leistung und einer Kaltkopf­temperatur von 60 K. . . . .	98
7.1	Foto des Kompressors mit Kaltkopf. . . . .	100
7.2	Seitenansicht auf den Nachkühler vor dem Einbau in sein Gehäuse. . . . .	101
7.3	Foto des geschlitzten kalten Wärmetauschers. . . . .	102
7.4	Foto des warmen Wärmetauschers. . . . .	103

7.5	Foto des Gesamtsystems mit Phasenschieber. . . . .	104
7.6	Positionen der Temperatursensoren $T1$ bis $T8$ und $T_c$ , der Drucksensoren $P1$ bis $P3$ und der Wegsensoren $X1$ und $X2$ . . . . .	105
7.7	Aufbau des Mess- und Steuersystems. . . . .	107
8.1	Abkühlkurve mit deutlich sichtbaren Regenerator- und Kaltkopfoszillationen. Arbeitsfrequenz 43 Hz, Fülldruck 18 bar und Kompressorspannung 175 V. Regenerator: nur Edelstahlsiebe mit Meshzahl 400. . . . .	109
8.2	Verwendete Flussbegradiger am warmen Ende des Regenerators. . . . .	110
8.3	Einfluss verschiedener Flussbegradiger am warmen Ende des Regenerators auf die Kaltkopftemperatur $T_c$ ohne Kühllast. . . . .	111
8.4	Einfluss verschiedener Flussbegradiger am warmen Ende des Regenerators auf die maximal Temperaturaufspaltung $\Delta T_{reg0.5,max}$ in der Mitte des Regenerators. . . . .	111
8.5	Vergleich der berechneten und experimentell bestimmten Kaltkopftemperatur mit 60 mm Lochblende. . . . .	113
8.6	Vergleich der berechneten und experimentell bestimmten maximalen Temperaturaufspaltung $\Delta T_{reg0.5,max}$ mit 60 mm Lochblende. . . . .	113
8.7	Thermische Leitfähigkeiten von Edelstahl, Messing und Kupfer zwischen 20 und 350 Kelvin. . . . .	115
8.8	Einfluss der unterschiedlichen Sandwichfüllungen im Regenerator auf die Kaltkopftemperatur bei Nulllast. . . . .	115
8.9	Einfluss der unterschiedlichen Sandwichfüllungen auf die maximale azimuthale Temperaturdifferenz. . . . .	117
8.10	Kühlleistungen mit verschiedenen Regeneratorfüllungen (vgl. Tabelle 8.1). . . . .	118
8.11	Kaltkopfeffizienz bzgl. Carnotwirkungsgrad und pV-Leistung für die Regeneratorfüllung mit Messing als gut leitendes Material bei unterschiedlichen Eingangsleistungen und Betriebsfrequenzen. . . . .	119
8.12	Effizienzen mit verschiedenen Regeneratorfüllungen. Die Betriebsbedingungen entsprechen denen aus Abbildung 8.10. . . . .	120
8.13	Einfluss der Regeneratorlänge auf die Effizienz und die Kühlleistung bei 54 Hz, 80 K und konstantem Kolbenhub, viereckige Symbole: 20 bar Fülldruck, runde Symbole: 25 bar Fülldruck. Ergebnis der Simulation mit SAGE. . . . .	121
8.14	Einfluss der Regeneratorlänge auf die pV-Leistung bei konstantem Kolbenhub, Arbeitsfrequenz: 54 Hz, $T_c$ : 80 K für 20 und 25 bar Fülldruck, 625 cm <sup>3</sup> Kompressionsvolumen. Ergebnis der Simulation mit SAGE. . . . .	122

8.15	Kaltkopf­temperatur und Temperatur­aufspaltung in Ab­hän­gig­keit der pV-Leistung bei 54 Hz Arbeits­fre­quenz und 18 bar Füll­druck. . . . .	123
8.16	Kühlleistung bei einer pV-Leistung von 4 kW (Arbeits­fre­quenz: 51 Hz, Füll­druck: 20 bar) bzw. 8 kW pV-Leistung (Arbeits­fre­quenz: 60 Hz, Füll­druck: 23 bar). . . . .	124
8.17	Effizienzen bei 4 kW (51 Hz, 20 bar) und 8 kW pV-Leistung (60 Hz, 23 bar).	125
8.18	Kühlleistung bei 80 K des HLPRK nach Opti­mie­rungen durch J. C. Sun bei einer Arbeits­fre­quenz von 56 Hz, einer elek­tri­schen von Ein­gangsleistung von 8,9 kW und einem Füll­druck von 20 bar [95]. Die Kühlleistung bei 80 K wurde aus den Mess­daten extrapoliert. . . . .	126
8.19	Kaltkopf­temperatur $T_c$ wäh­rend eines Ab­kühlvorgangs mit PID-Regler. . .	127
8.20	Kaltkopf­verhalten bei plötzlicher Last­än­de­rung und aktiver PID-Regelung.	128
10.1	Implementierung des PID-Reglers in LABVIEW. . . . .	183



## Tabellenverzeichnis

2.1	Leistungsdaten einiger Kryokühler mit unterschiedlichen Kühltechniken und Kühlleistungen. %Carnot bzgl. $T_{warm} = 300$ K. . . . .	14
3.1	Pulsrohrkühler Baugruppen und ihre thermodynamischen Eigenschaften. . .	33
3.2	Energieflüsse an den Baugruppengrenzen des PT-08 Modells. . . . .	34
5.1	Energieflüsse im HLPRK mit idealisierten Wärmetauschern (Modell Nr. 1). . .	68
5.2	Vor- und Nachteile verschiedener Wärmetauscherkonfigurationen. . . . .	70
5.4	Vergleich der Dimensionen und Kühlleistungen bei 30 K der verschiedenen Modellgenerationen. . . . .	71
6.1	Terme und Summe von Gleichung 6.10 auf Seite 93 bei einer Störung des hydraulischen Durchmessers um +2.2% bzw. des Temperaturprofils um +10 K im Falle eines Kryokühlers. . . . .	95
6.2	Daten der simulierten Regeneratoren aus Gedeon [91] und dieser Arbeit (HLPRK). . . . .	96
6.3	Kritischer Schwellenwert (Term 1) nach Gleichung 6.11 mit $\varepsilon_{dh} = 235 * 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ bei 7 kW pV-Leistung sowie die Beträge und Summe der dämpfenden Terme 2-4. Zum Vergleich: Schwellenwert bei niedrigeren pV-Leistungen sowie des Kaltkopfes "Antriebsplattform" mit $\varepsilon_{dh} = 30 * 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ aus [93] und des Folienregenerators aus [90] ( $\varepsilon_{dh} = 39 * 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ). . . . .	98
8.1	Wichtige physikalische Daten der untersuchten Regeneratorfüllungen. VA: Edeltahlsiebe, GLM: Kupfer oder Messing. . . . .	116
10.1	Parameter für die Motoreigenschaften. . . . .	181
10.2	Parameter für die Notabschaltung. . . . .	182
10.3	Parameter für die Spannungssteuerung. . . . .	182



# Nomenklatur

## Symbole

$\alpha$	Wärmeübertragungskoeffizient ( $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ )
$\beta$	Porosität
$\delta_\mu$	viskose Eindringtiefe (m)
$\delta_k$	thermische Eindringtiefe (m)
$\dot{m}$	Massenfluss ( $\text{kg s}^{-1}$ )
$\dot{V}$	Volumenfluss ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
$\gamma$	Adiabatenkoeffizient ( $\gamma=5/3$ für Helium)
$\lambda$	Wellenlänge im Arbeitsgas (m)
$\mu$	dynamische Viskosität (Pa s)
$\nu$	Molvolumen ( $\text{m}^3 \text{mol}^{-1}$ )
$\omega$	Kreisfrequenz ( $= 2\pi f$ ) ( $\text{s}^{-1}$ )
$\rho$	Dichte ( $\text{kg/m}^3$ )
$\tau$	Periodendauer (s)
$\varepsilon$	massenspezifische innere Energie ( $\text{J kg}^{-1}$ )
$\varphi$	diverse Winkel
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$\Xi$	Exergie (J)
$c_p$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$c_v$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )

$d_h$	hydraulischer Durchmesser (m)
$d_w$	Drahtdurchmesser (m)
$e$	massenspezifische Gesamtenergie eines kompressiblen Gases ( $\text{J kg}^{-1}$ )
$f$	Frequenz ( $\text{s}^{-1}$ )
$H$	Enthalpie (J)
$i$	imaginäre Zahl: $i^2 = -1$
$k$	spezifische Wärmeleitfähigkeit ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$M_z$	Meshzahl (1/Zoll)
$p$	Druck (Pa)
$Q$	Wärme (J)
$R$	universelle Gaskonstante ( $=8,314472 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$R_{He}$	spezifische Gaskonstante von Helium ( $= R/M_{He} \approx 2070 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$S$	Entropie ( $\text{J K}^{-1}$ )
$T$	Temperatur (K)
$U$	innere Energie (J)
$u$	Gasgeschwindigkeit (eindimensional) ( $\text{m s}^{-1}$ )
$V$	Volumen ( $\text{m}^3$ )
$W$	Arbeit (J)

### Indizes

1	Amplitude der Fundamentalwelle in der akustischen Näherung
<i>ein</i>	Energiefluss am Eingang des Kaltkopfes
<i>k</i>	bezeichnet die Position am kalten Ende des Kaltkopfes
<i>m</i>	Mittelwert der Fundamentalwelle in der akustischen Näherung
<i>pt</i>	Größe im Pulsrohr

*reg* Größe im Regenerator

*w* bezeichnet die Position am warmen Ende (von Regenerator oder Pulsrohr)



## 10 Anhang

### 10.1 Herleitung der Regeneratorströmung

#### 10.1.1 Druckhubabfall über dem Regenerator

Darcy-Law:  $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{f}{d_h} \frac{\rho |u| u}{2}$

	Reibungskoeffizient	Gasgeschwindigkeit
Folienregenerator	$f = \frac{96}{Re}$	$u = -\frac{d_h^2}{48\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$
Siebmatrix $Re \gg 1$	$f = \frac{c_1}{Re} + c_2$	$u = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \frac{c_1 \mu}{2c_2 d_h \rho} - \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \frac{\sqrt{c_1^2 \mu^2 + \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) 8c_2 d_h^3 \rho \frac{\partial P}{\partial x}}}{2c_2 d_h \rho}$ $= \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \frac{c_1 \mu}{2c_2 d_h \rho} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8c_2 d_h^3 \rho}{c_1^2 \mu^2} \left \frac{\partial P}{\partial x}\right }\right)$
Siebmatrix $Re \ll 1$	$f = \frac{c_1}{Re}$	$u = -\frac{2d_h^2}{c_1 \mu} \frac{\partial P}{\partial x}$

#### 10.1.2 Approximation für Reynoldszahlen $\gg 1$

$$\begin{aligned}
 u &= \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \frac{c_1 \mu}{2c_2 d_h \rho} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8c_2 d_h^3 \rho}{c_1^2 \mu^2} \left|\frac{\partial P}{\partial x}\right|}\right) \\
 &= \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \frac{c_1 \mu}{2c_2 d_h \rho} \left(1 - \sqrt{1 + \chi \left|\frac{\partial P}{\partial x}\right|}\right)
 \end{aligned}$$

mit

$$\chi \equiv \frac{8c_2 d_h^3 \rho}{c_1^2 \mu^2}.$$

Annäherung mittels Polynom:  $1 - \sqrt{1+x} \simeq -\frac{a}{2}x - \frac{b}{2}x^2 - \frac{c}{2}x^3$ ,  $\operatorname{sgn}(x)|x| = x$

$$\begin{aligned}
u &= -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \frac{c_1 \mu}{4c_2 d_h \rho} \left( a \chi \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| + b \chi^2 \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^2 + c \chi^3 \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^3 \right) \\
&= -\frac{c_1 \mu}{4c_2 d_h \rho} \frac{\partial P}{\partial x} \left( a \chi + b \chi^2 \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| + c \chi^3 \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^2 \right) \\
&= -\frac{2d_h^2}{c_1 \mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left( a + b \chi \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| + c \chi^2 \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^2 \right) \\
&= -\frac{2d_h^2}{c_1 \mu} \frac{\partial P}{\partial x} F_1^+. \tag{10.1}
\end{aligned}$$

Koeffizienten für  $0 < \chi \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| < 20$ :  $a = 0.726720$ ,  $b = -0.0333582$ ,  $c = 0.000756881$

(für Folien Regenerator:  $a = 1$ ,  $b = c = 0$ ,  $c_1 = 96$ ,  $d_h = 2 \text{ g}$ )

Da für eine inkompressible Strömung  $\frac{\partial P}{\partial x}$  und  $u$  in Phase liegen, ist  $F_1^+$  eine reelle Zahl.

## DC-Fluss

$$\begin{aligned}
(\rho u)_{dc} &= \rho_m u_m + \frac{1}{2} \Re[\rho_1 u_1^*] \\
&= \rho_m u_m + \frac{1}{2} \rho_1 \cdot u_1 \\
&= -\frac{2 \rho_m d_h^2}{c_1 \mu} \frac{\partial p_m}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{2 \rho_1 d_h^2}{c_1 \mu} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x} F_1^+.
\end{aligned}$$

Punkt  $x_c$  (nahe der Mitte des Regenerators, Index "c", inkompressibler Druckverlust Index "i"):

$$\left( \frac{\partial p_1}{\partial x} \right)_c = \frac{\Delta p_{1i}}{L}, \quad \left( \frac{\partial p_m}{\partial x} \right)_c = \frac{\Delta p_m}{L}$$

$$\begin{aligned}
(\rho u)_{dc}|_c &= -\frac{2 \rho_c d_h^2}{c_1 \mu_c L} \Delta p_m - \frac{1}{2} \frac{2 \rho_{1c} d_h^2}{c_1 \mu_c} \frac{\Delta p_{1i}}{L} \left( a + b \chi_c \left| \frac{\Delta p_{1i}}{L} \right| + c \chi_c^2 \left| \frac{\Delta p_{1i}}{L} \right|^2 \right) \\
&= -\frac{2 \rho_c d_h^2}{c_1 \mu_c L} \Delta p_m - \frac{1}{2} \frac{2 \rho_{1c} d_h^2}{c_1 \mu_c} \frac{\Delta p_{1i}}{L} F_1 \tag{10.2}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{c_1 L} \left( \frac{d_h^2 \rho_c}{\mu_c} \Delta p_m - \frac{1}{2} \frac{d_h^2 \rho_{1c}}{\mu_c} \Delta p_{1i} F_1 \right) \tag{10.3}$$

$$= -\frac{2}{c_1 L} \left( C \Delta p_m + \frac{1}{2} D \right) \tag{10.4}$$

$$C \equiv \frac{d_h^2 \rho_c}{\mu_c}$$

$$D \equiv \frac{d_h^2 \rho_{1c}}{\mu_c} \cdot \Delta p_{1i} F_1.$$

Anwenden auf Regeneratorhälften A+B und addieren:

$$(\rho u)_{dc,A+B} = (C_A + C_B) \Delta p_m + \frac{1}{2} (D_A + D_B) \stackrel{!}{=} 0 \quad (10.5)$$

10.5 nach  $\Delta p_m$  ( $= -\frac{1}{2} \frac{D_A + D_B}{C_A + C_B}$ ) umstellen und in 10.4 (für Regenerator A) einsetzen ergibt

$$(\rho u)_{dc|A} = -\frac{2}{c_1 L} \left( C_A \Delta p_m + \frac{1}{2} D_A \right)$$

$$= \frac{2}{c_1 L} \left( \frac{1}{2} \frac{C_A (D_A + D_B)}{C_A + C_B} - \frac{1}{2} D_A \right) \quad (10.6)$$

$$= \frac{C_A (D_A + D_B) - D_A (C_A + C_B)}{c_1 L (C_A + C_B)} \quad (10.7)$$

$$= \frac{C_A D_B - C_B D_A}{c_1 L (C_A + C_B)}. \quad (10.8)$$

Normalisieren auf akustischen Massenfluss (erster Ordnung, an der Stelle " $x_c$ "):

$$|\rho u|_0 = |\rho_c u_1|_0$$

$$= \frac{2}{c_1 L} \frac{\rho_c d_h^2}{\mu_c} |\Delta p_{1i} F_1|_0$$

$$= \frac{2}{c_1 L} C_0 |\Delta p_{1i} F_1|_0. \quad (10.9)$$

Dividieren von 10.8 durch 10.9 und mit  $A_f/A_f$  multiplizieren (ergibt den Massenfluss  $\dot{m}$ ):

$$\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} = \frac{C_A D_B - C_B D_A}{2 C_0 |\Delta p_{1i} F_1|_0 (C_A + C_B)}$$

$$= \frac{C_A C_B (D_B/C_B - D_A/C_A)}{2 C_0 |\Delta p_{1i} F_1|_0 (C_A + C_B)}.$$

Vereinfachung:  $C_A C_B \sim C_0^2$ ,  $C_A + C_B \sim 2 C_0$

$$\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} = \frac{D_B/C_B - D_A/C_A}{4 |\Delta p_{1i} F_1|_0}$$

Vereinfachung  $D/C = \frac{\rho_{1c}}{\rho_c} \cdot \Delta p_{1i} F_1$ :

$$\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} = \frac{1}{4} \frac{\left[ \frac{\rho_{1c}}{\rho_c} \cdot \Delta p_{1i} F_1 \right]_A^B}{|\Delta p_{1i} F_1|_0} \quad (10.10)$$

### 10.1.3 Dichteapproximation

Gasgleichung:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$$

Näherung für kleine Amplituden:

$$\frac{\rho_1}{\rho_m} = \frac{p_1}{p_m} - \frac{T_1}{T_m} \quad (10.11)$$

Energiegleichung (siehe Gl. 4.4 auf Seite 43):

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_p T \vec{v}) = -\nabla \cdot (-k \nabla T - \vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

Ersetze  $\rho c_p i \omega T_1 - i \omega p_1$  in Gl. 4.4 durch  $c_v / R i \omega p_1$ , und  $-\nabla \cdot (-k \nabla T - \vec{v} \cdot \boldsymbol{\sigma})$  durch  $-Q = -h s (T_m + T_1 - T_s) = -h s T_1$ :

$$\begin{aligned} i \omega \frac{c_v}{R} p_1 + \rho_m c_p v_1 \frac{\partial T_m}{\partial x} + c_p T_m \frac{\partial v \rho}{\partial x} &= -h s T_1 \\ i \omega \frac{c_v}{R} p_1 + \rho_m c_p v_1 \frac{\partial T_m}{\partial x} - i \omega \rho_1 c_p T_m &= -h s T_1. \end{aligned}$$

Nach  $T_1$  auflösen und in 10.11 einsetzen:

$$\frac{\rho_1}{\rho_m} = \frac{p_1}{p_m} + \frac{1}{h s T_m} \left( i \omega \frac{c_v}{R} p_1 + \rho_m c_p v_1 \frac{\partial T_m}{\partial x} - i \omega \rho_1 c_p T_m \right)$$

ersetze:  $h = Nu k / d_h$ ,  $s = 4 / d_h$ ,  $v_1 = -\frac{2 d_h^2}{c_1 \mu_c} \frac{\Delta p_{1i}}{L} F_1$  an der Stelle "c":

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_1}{\rho_m} &= \frac{p_1}{p_m} + \frac{d_h^2}{Nu k 4 T_m} \left( i \omega \frac{c_v}{R} p_1 + \rho_m c_p v_1 \frac{\partial T_m}{\partial x} - i \omega \rho_1 c_p T_m \right) \\
 &= \frac{p_1}{p_m} + \left( i \frac{\gamma \omega d_h^2 p_m}{(\gamma - 1) Nu k_c 4 T_c \gamma p_m} \frac{p_1}{p_m} - \frac{\gamma d_h^4 \rho_m R}{2(\gamma - 1) Nu k_c c_1 \mu_c L} \Delta p_{1i} F_1 \frac{1}{T_c} \frac{\partial T_m}{\partial x} \Big|_c - i \frac{\gamma d_h^2 \omega p_m}{(\gamma - 1) Nu k_c 4 T_c \rho_m} \frac{\rho_1}{\rho_m} \right) \\
 &= \frac{p_1}{p_m} + i \frac{\gamma \omega d_h^2 p_m}{(\gamma - 1) Nu k_c 4 T_c \gamma p_m} \frac{p_1}{p_m} \\
 &\quad - \frac{\gamma d_h^4 p_m^2}{2(\gamma - 1) Nu k_c c_1 \mu_c L} \frac{\Delta p_{1i}}{p_m} F_1 \frac{1}{T_m^2} \frac{\partial T_m}{\partial x} \Big|_c \\
 &\quad - i \frac{\gamma d_h^2 \omega p_m}{(\gamma - 1) Nu k_c 4 T_c \rho_m} \frac{\rho_1}{\rho_m} \\
 &= \frac{p_1}{p_m} + i E_1 \frac{p_1}{\gamma p_m} - E_2 \frac{\Delta p_{1i}}{p_m} F_1 - i E_1 \frac{\rho_1}{\rho_m}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\omega d_h^2 p_m}{Nu k_c 4 T_c} \\
 E_2 &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{d_h^4 p_m^2}{2 Nu k_c c_1 \mu_c L} \frac{1}{T_c^2} \frac{\partial T_m}{\partial x} \Big|_c.
 \end{aligned}$$

Nach Faktoren von  $\frac{\rho_1}{\rho_m}$ ,  $\frac{p_1}{p_m}$  und  $\frac{\Delta p_{1i}}{p_m}$  ordnen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_1}{\rho_m} (1 + i E_1) &= (1 + i E_1 / \gamma) \frac{p_1}{p_m} - E_2 \frac{\Delta p_{1i}}{p_m} F_1 \\
 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_m} &= \frac{(1 + i E_1 / \gamma)}{(1 + i E_1)} \frac{p_1}{p_m} - \frac{E_2}{(1 + i E_1)} \frac{\Delta p_{1i}}{p_m} F_1 \\
 \frac{\rho_1}{\rho_m} &= \frac{\rho_{1p}}{\rho_m} + \frac{\rho_{1u}}{\rho_m}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_{1p}}{\rho_m} &= \frac{(1 + i E_1 / \gamma)}{(1 + i E_1)} \frac{p_1}{p_m} \\
 \frac{\rho_{1u}}{\rho_m} &= -\frac{E_2}{(1 + i E_1)} \frac{\Delta p_{1i}}{p_m} F_1.
 \end{aligned}$$

Vereinfachung:  $1/(1 + ix) \approx 1 - ix - x^2 + ix^3 - \dots$  und Weglassen der höheren Terme von

$E_1$  (ist klein)

$$\frac{\rho_{1p}}{\rho_m} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} i E_1\right) \frac{p_1}{p_m}$$

$$\frac{\rho_{1u}}{\rho_m} = -E_2 (1 - i E_1) \frac{\Delta p_{1i}}{p_m} F_1.$$

### 10.1.4 Inkompressibler Druckabfall

Der Druckabfall  $\Delta p_{1i}$  ist nur der inkompressible Druckabfall (ignoriert Totvolumen). Bestimmung des realen Druckhubabfalls  $\Delta p = \Delta p_{1i} + \Delta p_{1c}$  mit Hilfe des inkompressiblen und kompressiblen Massenflusses  $\rho u = \rho u_i + \rho u_c$ .

**inkompressibler Druckabfall und Bestimmung von "x<sub>c</sub>" (ohne Totvolumen,  $\rho u_i = \text{const.}$ )**

$$\rho u_i = \frac{p}{RT} u_i \Rightarrow u_i = \frac{R(\rho u_i)}{p} T$$

Darcy mit nicht-linearem Reibungskoeffizienten:

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{u_i}{2d_h^2} (c_1 \mu + c_2 d_h \rho |u_i|)$$

$$= -\frac{R(\rho u_i) T}{2d_h^2 p_m} (c_1 \mu + c_2 d_h |\rho u_i|)$$

$$\mu = \mu_a \left(\frac{T}{T_a}\right)^{0.7}, (\rho u_i) \text{ ist konstant}$$

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{R(\rho u_i) T_a c_1 \mu_a}{2 d_h^2 p_m} \left( \left(\frac{T(x)}{T_a}\right)^{1.7} + \frac{T(x) c_2 d_h}{T_a c_1 \mu_a} |\rho u_i| \right) \quad (10.12)$$

$$\frac{\Delta p_i}{L} = -\frac{R(\rho u_i) T_a c_1 \mu_a}{2 p_m d_h^2 L} \int_0^L \left( \left(\frac{T(x)}{T_a}\right)^{1.7} + \frac{T(x) c_2 d_h}{T_a c_1 \mu_a} |\rho u_i| \right) dx \quad (10.13)$$

am Punkt "x<sub>c</sub>" ist 10.12=10.13 und  $T(x) = T_c$

$$-\frac{R(\rho u_i) T_a c_1 \mu_a}{d_h^2 p_m} \left( \left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{1.7} + \frac{T_c c_2 d_h}{T_a c_1 \mu_a} |\rho u_i| \right) = -\frac{R(\rho u_i) T_a c_1 \mu_a}{d_h^2 p_m L} \int_0^L \left( \left(\frac{T(x)}{T_a}\right)^{1.7} + \frac{T(x) c_2 d_h}{T_a c_1 \mu_a} |\rho u_i| \right) dx$$

$$\xi = x/L, dx = L d\xi$$

$$\left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{1.7} + \frac{T_c}{T_a} \frac{c_2 d_h}{c_1 \mu_a} |\rho u_i| = \int_0^1 \left( \left(\frac{T(\xi)}{T_a}\right)^{1.7} + \frac{T(\xi)}{T_a} \frac{c_2 d_h}{c_1 \mu_a} |\rho u_i| \right) d\xi$$

$$\left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{1.7} + \frac{T_c}{T_a} \Gamma = \int_0^1 \left( \left(\frac{T(\xi)}{T_a}\right)^{1.7} + \frac{T(\xi)}{T_a} \Gamma \right) d\xi.$$

Der Faktor  $\Gamma = \frac{c_2 d_h}{c_1 \mu_a} |\rho u_i|$  liegt in der Regel im Bereich zwischen 0 und 1 und kann mit Hilfe von Gl. 10.1 berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{c_2 d_h}{c_1 \mu_a} \left| -\rho_c \frac{2d_h^2}{c_1 \mu_c} \frac{\Delta p_{1i}}{L} F_1 \right| \\ &= \frac{2 c_2 d_h^3 \rho_c}{L c_1^2 \mu_a \mu_c} |\Delta p_{1i} F_1| \\ &= \frac{2 c_2 d_h^3 p_m}{L R T_a c_1^2 \mu_a^2 \left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{1.7}} |\Delta p_{1i} F_1| \\ &= \frac{2 c_2 d_h^3 p_m}{L R T_a c_1^2 \mu_a^2 \left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{1.7}} \left| \Delta p_{1i} \left( a + b \chi_c \left| \frac{\Delta p_{1i}}{L} \right| + c \chi_c^2 \left| \frac{\Delta p_{1i}}{L} \right|^2 \right) \right|, \end{aligned}$$

mit  $\chi_c = \frac{8c_2 d_h^3 \rho}{c_1^2 \mu^2} \Big|_{x_c} = \frac{8c_2 d_h^3 p_m}{T_c R c_1^2 \mu_a^2 \left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{1.4}} = \frac{8c_2 d_h^3 p_m}{T_a R c_1^2 \mu_a^2 \left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{2.4}}$ . Ist  $c_2 = 0$  (linearer Reibungskoeffizient), ist auch  $\Gamma = 0$ , sodass sich bei gegebener Regeneratorgeometrie, Druckabfall und einem Temperaturprofil  $T(\xi)$  ein Wert für  $T_c$  direkt bestimmen lässt. Bei nicht-linearem Reibungskoeffizient  $c_2$  und  $\Gamma \neq 0$  kann  $T_c$  jedoch nur iterativ mittels der Ersetzung  $\Delta p_{1i} = \Delta p - \Delta p_c$  aus dem nächsten Abschnitt bestimmt werden. Aus der Bedingung  $T(x_c) = T_c$  lässt sich dann  $x_c$  bestimmen.

### Bestimmung des inkompressiblen Druckabfalls mittels des kompressiblen Druckabfalls (mit Totvolumen)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}, \quad \rho = \frac{p}{RT}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\frac{\dot{p}}{RT}$$

$$\rho u = -\frac{1}{R} \int \frac{\dot{p}}{T} dx$$

$$\Rightarrow u_c = -\frac{T}{p_m} \int \frac{\dot{p}}{T} dx.$$

Bei Gedeon ist  $\dot{p}$  konstant, da der Druckhubverlust über dem Folienregenerator vernachlässigbar ist. Bei Siebregeneratoren ist dies jedoch nicht gegeben. Der Druckverlauf  $p(x)$  kann näherungsweise durch den Druck am warmen Ende  $p_{1a} = p_1(0)$  und dem Integral über den Druckhubverlust bestimmt werden. Dabei wird der kompressible Teil des Druckhubverlustes ( $\frac{\partial p_i}{\partial x} \gg \frac{\partial p_c}{\partial x}$ ) sowie der nicht-lineare Anteil ( $c_2 = 0$ ) vernachlässigt:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= p_1(0) + \int_0^x \frac{\partial p_{1i}(x)}{\partial x} dx \\ \frac{\partial p_{1i}(x)}{\partial x} &\approx -\frac{c_1 \mu}{2 d_h^2 \rho} (\rho u)_i \\ &= -\frac{R T_a c_1 \mu_a}{2 d_h^2 p_m} (\rho u)_i \left(\frac{T}{T_a}\right)^{1.7} \\ &= \frac{\Delta p}{N} \left(\frac{T}{T_a}\right)^{1.7} \end{aligned}$$

mit der Normierung  $N = \int_0^L \left(\frac{T_m(x)}{T_a}\right)^{1.7} dx$ .

Entwicklung um den Punkt " $x_c$ ", in Darcy einsetzen:

$$\begin{aligned} (\rho u)(x) &= \rho u_i - \frac{1}{R} \int_{x_c}^x \frac{\dot{p}}{T} dx' \\ \Rightarrow \frac{\partial p_c}{\partial x} &= -\frac{c_1 \mu}{2 d_h^2} u_c \\ &= \frac{c_1 \mu}{2 d_h^2 p} T \int_{x_c}^x \frac{\dot{p}}{T} dx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p_c &= \frac{c_1 \mu}{2 d_h^2 p} T \int_0^L \int_{x_c}^x \frac{\dot{p}}{T} dx' dx \\ &= \frac{i \omega c_1 \mu T_m}{2 d_h^2 p_m} \int_0^L \int_{x_c}^x \frac{p_1}{T_m} dx' dx \end{aligned}$$

$$\mu = \mu_a \left(\frac{T}{T_a}\right)^{0.7}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p_c &= \frac{i \omega c_1 \mu_a T_m}{2 d_h^2 p_m} \int_0^L \left(\frac{T_m}{T_a}\right)^{0.7} \int_{x_c}^x \frac{p_1}{T_m} dx' dx \\ &= \frac{i \omega c_1 \mu_a}{2 d_h^2 p_m} \int_0^L \left(\frac{T_m}{T_a}\right)^{1.7} \int_{x_c}^x \frac{T_a}{T_m} p_1 dx' dx \end{aligned}$$

$\xi = x/L$ ,  $dx = L d\xi$ :

$$\Rightarrow \Delta p_c = i\omega \frac{1}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} \int_0^1 \left( \frac{T_m}{T_a} \right) \int_{\xi_c}^{\xi} \frac{T_a}{T_m} p_1 d\xi' d\xi.$$

Mit  $p_1 = p_{1a} + \frac{\Delta p}{N} \int_0^{\xi'} \left( \frac{T_m(\xi'')}{T_a} \right)^{1.7} d\xi'' = p_{1a} + \frac{\Delta p}{N} I_0$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p_c &= i\omega \frac{p_{1a}}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} \int_0^1 \left( \left( \frac{T_m}{T_a} \right)^{1.7} \int_{\xi_c}^{\xi} \frac{T_a}{T_m} d\xi' \right) d\xi \\ &\quad + i\omega \frac{\Delta p}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2 N} \int_0^1 \left( \left( \frac{T_m}{T_a} \right)^{1.7} \int_{\xi_c}^{\xi} \frac{T_a}{T_m} I_0 d\xi' \right) d\xi \\ &= i\omega \frac{p_{1a}}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} \left( F_2 + \frac{\Delta p}{p_{1a}} F_3 \right) \\ F_2 &= \int_0^1 \left( \left( \frac{T_m}{T_a} \right)^{1.7} \int_{\xi_c}^{\xi} \frac{T_a}{T_m} d\xi' \right) d\xi \\ F_3 &= \frac{1}{N} \int_0^1 \left( \left( \frac{T_m}{T_a} \right)^{1.7} \int_{\xi_c}^{\xi} \frac{T_a}{T_m} I_0 d\xi' \right) d\xi. \end{aligned}$$

Mit  $\Delta p_c$  lässt sich schließlich  $\Delta p_i = \Delta p - \Delta p_c$  berechnen.

### 10.1.5 DC-Flusskoeffizient

Gleichung 10.10:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} &= \frac{1}{4} \frac{\left[ \frac{\rho_1}{\rho_c} \cdot \Delta p_{1i} F_1 \right]_A^B}{|\Delta p_{1i} F_1|_0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\left[ \frac{\rho_1}{\rho_c} \cdot \Delta p_{1i} F_1 \right]_0^A}{|\Delta p_{1i} F_1|_0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\left[ \left( \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} i E_1 \right) \frac{p_1}{p_m} - E_2 (1 - i E_1) \frac{\Delta p_{1i}}{p_m} F_1 \right) \cdot \Delta p_{1i} F_1 \right]_0^A}{|\Delta p_{1i} F_1|_0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\left[ \left( \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} i E_1 \right) \frac{p_1}{p_m} - E_2 (1 - i E_1) \left( \frac{\Delta p}{p_m} - i\omega \frac{p_1}{p_m^2} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} F_2 \right) F_1 \right) \cdot (\Delta p - i\omega \frac{p_1}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} F_2) F_1 \right]_0^A}{\left| \left( \Delta p - i\omega \frac{p_1}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} F_2 \right) F_1 \right|_0} \end{aligned} \tag{10.14}$$

Mit

$$F_1 = a + b \frac{\chi}{L} |\Delta p_{1i}| + c \left( \frac{\chi}{L} |\Delta p_{1i}| \right)^2$$

$$= a + b \frac{\chi}{L} \left| \Delta p - i\omega \frac{p_1}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} F_2 \right| + c \left( \frac{\chi}{L} \left| \Delta p - i\omega \frac{p_1}{p_m} \frac{L^2 \mu_a c_1}{2d_h^2} F_2 \right| \right)^2.$$

Mittels eines symbolischen Mathematikprogramms (z.B. MATHEMATICA) lässt sich diese Gleichung für  $F_1 = 1$  und  $c_2 = 0$  (linearer Reibungskoeffizient) vereinfachen und in Terme aufspalten, die von  $\Delta p$ ,  $p_1$  und  $i p_1 \cdot \Delta p$  abhängen (siehe Anhang):

$$\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} = C_2 |\Delta p|^2 [d_h^4 \tau_2]_0^A + C_3 (i p_1 \cdot \Delta p) [d_h^2 \tau_3]_0^A + C_4 |p_1|^2 [\tau_4]_0^A \quad (10.15)$$

mit

$$\tau_1 = \frac{T_a^{1.7}}{T_c^{1.7}}$$

$$\tau_2 = \frac{T_a^{2.4} T_\xi}{T_c^{3.4}}$$

$$\tau_3 = (\gamma + 1) \tau_1 + 2\gamma \tau_2 F_2$$

$$\tau_4 = F_2 ((\gamma + 1) \tau_1 + \gamma \tau_2 F_2)$$

$$C_1 = \frac{1}{16 (\gamma - 1) N_u k_a T_a p_m |\Delta p_{1i}|_0}$$

$$C_2 = 4 C_1 \frac{\gamma p_m^2}{c_1 \mu_a L^2}$$

$$C_3 = 2 C_1 \omega p_m$$

$$C_4 = C_1 c_1 \omega^2 L^2 \mu_a.$$

Im Fall des nicht-linearen Reibungskoeffizienten ( $F_1$  reell,  $F_2$  komplex,  $c_2 > 0$ ), wird Gl. 10.15 um drei Terme erweitert. Die Konstanten  $C_x$  und die Temperaturabhängigkeiten  $\tau_x$  werden zusätzlich angepasst. Man beachte, dass der lineare Fall ( $F_1 = 1$ ,  $F_2 = reel$ ,  $c_2 = 0$ ) einen Spezialfall von Gl. 10.16 darstellt:

$$\frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0} = \frac{\dot{m}_{dc}|_A}{|\dot{m}_1|_0 \text{ linear}} + C_4 |\Delta p|^2 [\tau_5]_0^A - C_5 (i p_1 \cdot \Delta p) \left[ \frac{\tau_6}{d_h^2} \right]_0^A + (p_1 \cdot \Delta p) \left( C_4 [\tau_8]_0^A - C_6 [\tau_7]_0^A \right) \quad (10.16)$$

mit

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{T_a^{1.7}}{T_c^{1.7}} \\
\tau_2 &= F_1^2 \frac{T_a^{2.4} T_\xi}{T_c^{3.4}} \\
\tau_3 &= F_1 (\gamma + 1) \tau_1 + 2 \gamma \tau_2 F_2 \\
\tau_4 &= F_1 (\gamma + 1) F_2 \tau_1 + \gamma \tau_2 F_2^2 \\
\tau_5 &= F_3^2 \gamma \tau_2 \\
\tau_6 &= F_1 F_3 T_a \\
\tau_7 &= F_1 T_a \\
\tau_8 &= F_1 F_3 \tau_1 (\gamma + 1) + 2 F_2 F_3 \tau_2 \gamma \\
C_1 &= \frac{1}{16 (\gamma - 1) N_u k_a T_a p_m |\Delta p_{1i} F_1|_0} \\
C_2 &= 4 C_1 \frac{\gamma p_m^2}{c_1 \mu_a L^2} \\
C_3 &= 2 C_1 \omega p_m \\
C_4 &= C_1 c_1 \omega^2 L^2 \mu_a \\
C_5 &= 4 C_1 c_1 k_a (\gamma - 1) N_u L^2 \mu_a \omega / p_m \\
C_6 &= 8 C_1 (\gamma - 1) k_a N_u.
\end{aligned}$$

## 10.2 Kritischer Massenfluss

### Stabilitätskriterium

$$c_p \dot{m}_{dc} \frac{\partial T}{\partial x} + \beta A_c \frac{\partial q_h}{\partial x} + \beta A_c \frac{\partial q_k}{\partial x} + (1 - \beta) A_c \frac{\partial q_s}{\partial x} + A_c \frac{q_y}{D} = 0 \quad (10.17)$$

Auswertung an der Stelle  $x_c$  nahe der Mitte des Regenerators:  $\dot{m}_{dc} = |\dot{m}_{1c}|_0 (\varepsilon_{dh} dT + \varepsilon_T dd_h)$   
mit

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{dh} &= \frac{(\dot{m}_{dc})_A / |\dot{m}_{1c}|_0}{dT} \\
\varepsilon_T &= \frac{(\dot{m}_{dc})_A / |\dot{m}_{1c}|_0}{dd_h}
\end{aligned}$$

und  $|\dot{m}_{1c}|_0 = (\rho u)_{1c} \beta A_c$  ergibt für den ersten Term:

$$c_p \dot{m}_{dc} \frac{dT}{dx} = c_p (\rho u)_{1c} \beta A_c (\varepsilon_{dh} dT + \varepsilon_T dd_h) \frac{dT_m}{dx}.$$

$dT$  und  $dd_h$  bezeichnet die Temperaturstörung und die Störung im hydraulischen Durchmesser im Regenerator A.

### Axiale Wärmeleitung

$$q_k = k_g \frac{dT_m}{dx}$$

$$q_s = k_{sx} \frac{dT_m}{dx}$$

### Radiale Wärmeleitung

$$q_y = k_{sy} \frac{2dT}{D}$$

### Zeitlich gemittelter Enthalpiefluss

Zeitlich gemittelter Enthalpiefluss mit  $q_h = c_p \rho_m \beta A_c \langle u_1 T_1 \rangle$  mit  $T_1 = T_m - T_s \sim \frac{c_p \rho_m u_1}{h_s} \frac{dT_m}{dx}$  und  $h_s = 4 N_u k_a / d_h^2$  (siehe Abschnitt 10.1.3),

$$q_h = \frac{c_p^2 d_h^2}{4 N_u k_a} \frac{dT_m}{dx} \langle (\rho_m u_1)^2 \rangle \beta A_c$$

$$= \frac{c_p^2 d_h^2}{8 N_u k_a} \frac{dT_m}{dx} (\rho u)_1^2 \beta A_c.$$

$T_m$  kann durch ein vorgegebenes Temperaturprofil wie z.B.  $T_m(x) = T_a - x/L(T_a - T_e) + 4 dT (x/L - x^2/L^2)$ , bzw.  $\frac{dT_m^2}{dx^2}$  durch  $-8 dT/L^2$  ersetzt werden. Gleichung 10.17 lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$c_p \beta (\rho u)_1 \frac{\partial T_m}{\partial x} (\varepsilon_{dh} dT + \varepsilon_T dd_h) + \left( \frac{\beta k_a}{N_u} \left( \frac{c_p d_h (\rho u)_1}{k_a L} \right)^2 + \frac{8}{L^2} (\beta k_g + (1 - \beta) k_{sx}) + \frac{2 k_{sy}}{D^2} \right) dT = 0.$$

### 10.3 Umformung von Gleichung 10.14 mit Mathematica

```
(*
** Auflösen der DC-Massenflussgleichung
   und ordnen nach Faktoren
   Index c bezeichnet Variable am Ort xc
   Index A bezeichnet Variablen im Regenerator A
   Index 0 bezeichnet Variablen im ungestörtem Regenerator 0
*)

(*
** Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitung und der Viskosität
*)
kcA = k * (TcA / Ta) ^ (7 / 10); kc0 = k * (Tc0 / Ta) ^ (7 / 10);
mucA = mu * (TcA / Ta) ^ (7 / 10); muc0 = mu * (Tc0 / Ta) ^ (7 / 10);

(* kompressibler Druckhubverlust *)
dpcA = Iwp1 / pm L ^ 2 mu c1 / (2 dhA ^ 2) (F2A + dp / p1 F3A);
dpc0 = Iwp1 / pm L ^ 2 mu c1 / (2 dh0 ^ 2) (F20 + dp / p1 F30);
dp1iA = dp - dpcA;
dp1i0 = .;

(* Terme E1 und E2 *)
E1A = g / (g - 1) w dhA ^ 2 pm / (Nu kcA ^ 4 TcA);
E10 = g / (g - 1) w dh0 ^ 2 pm / (Nu kc0 ^ 4 Tc0);
E2A = g / (g - 1) dhA ^ 4 pm ^ 2 / (2 Nu kcA c1 mucA L) 1 / TcA ^ (2 / 1) dTmdxcA;
E20 = g / (g - 1) dh0 ^ 4 pm ^ 2 / (2 Nu kc0 c1 muc0 L) 1 / Tc0 ^ (2 / 1) dTmdxc0;
dev0 = Abs [dp1i0 F10];
q1A = (1 - (g - 1) / g I E1A) p1 / pm;
q10 = (1 - (g - 1) / g I E10) p1 / pm;
q2A = -E2A (1 - I E1A) dp1iA / pm F1A;
q20 = -E20 (1 - I E10) dp1i0 / pm F10;

sdot [comp1_ , comp2_ ] := Re [comp1 ] Re [comp2 ] + Im [comp1 ] Im [comp2 ]

Assu = {TcA > 0, Tc0 > 0, Ta > 0, pm > 0, dh > 0, rho > 0, mu > 0, R > 0, L > 0, w > 0,
Element [{mu , Nu, pm , g, gap, k, L, w, c1, c2, dhA,
dTmdxcA , F1A, F10, R, Ta, TcA, Tc0, F2A, F20, F30, F3A}, Reals],
Element [{p1, dp, dp1i0}, Complexes ]};

(* Gleichung für Regenerator A *)
(* x.y = Re[x*y*] *)
dcflow1 = ExpandAll [
FullSimplify [
ComplexExpand [
-Re [(q1A + q2A) Conjugate [dp1iA F1A]] / (2 dev0), {p1, dp, dp1i0}],
Assumptions -> Assu

```

```

]
];

(* Temperaturgradient am Punkt  $x_c$  *)
(* dTmdxcA entspricht  $T_x = T_\xi / L$ ,
der Ableitung des Temperaturprofils  $T(x)$ , Einheit K/m *)
(* dTmdxicA entspricht  $T_\xi$ ,
der normierten Ableitung des Temperaturprofils  $T(\xi)$ , Einheit K *)
dcflow2 = dcflow1 /. {dTmdxcA → dTmdxicA / L};

(* komplexe Ersetzungen *)
(*  $p_{1A} * p_{1A}^* = \text{Abs}[p1]^2$  *)
dcflow3 =
  Simplify[dcflow2 /. {Conjugate[dp] dp → Abs[dp]^2, Conjugate[p1] p1 → Abs[p1]^2},
    Assumptions → Assu];

```

```

(* Kontrollrechnung für Debugging *)
On[Assert]
IplaDOTdp=.; p1aDOTdp=.;
CommonInputsNonLin = {R→2070, dh0→54.3*10^-6, w→2 Pi50, Ta→300, Te→60,
  pm→20*10^5, p1→3.42*10^5, dp→1.64*10^5*Exp[I(-143*Pi/180)],
  L→.075, k→0.157, Nu→4.57, mu→20*10^-6, c1→120, c2→2, g→5/3,
  dp1i0→dp-dpc0, p1aDOTdp→sdot[p1, dp], IplaDOTdp→sdot[I p1, dp]};

InputsNonLinDT= Join[CommonInputsNonLin , {dhA→dh0, dT→10}];
CalcsNonLinDT= {TcA→192.175, Tc0→185.551, F10→0.47646613181514474`,
  F1A→0.4921744456964173`, F20→-0.07495153915339978`,
  F2A→-0.0832632490931319`, F30→-0.07593606948895194`,
  F3A→-0.07669928623321075`, dTmdxic0→-240, dTmdxicA→-239.27361409484`};

InputsNonLinDDH= Join[CommonInputsNonLin , {dhA→1.022222 dh0, dT→0}];
CalcsNonLinDDH=
  {TcA→185.458745759004`, Tc0→185.55205121691185`, F10→0.47646613181514474`,
  F1A→0.464004591682755`, F20→-0.07495153915339978`,
  F2A→-0.07523884152335938`, F30→-0.07593606948895194`,
  F3A→-0.07622714573603127`, dTmdxic0→-240, dTmdxicA→-240};

(* Gedeon *)
CommonInputsLin =
  {R→2070, dh0→2*90*10^-6, w→2 Pi100, Ta→300, Te→100, pm→27*10^5,
  p1→2.72*10^5, dp→0.071*10^5*Exp[I(-193*Pi/180)], L→.1,
  k→0.157, Nu→8.23, mu→20*10^-6, c1→96, c2→0, g→5/3,
  dp1i0→dp-dpc0, p1aDOTdp→sdot[p1, dp], IplaDOTdp→sdot[I p1, dp]};

InputsLinDT= Join[CommonInputsLin , {dhA→dh0, dT→10}];
CalcsLinDT= {TcA→212.323, Tc0→205.804, F10→1, F1A→1, dTmdxicA→-199.069,
  dTmdxic0→-200, F20→-0.05227168278879177`, F2A→-0.06411577082923897`,
  F30→-0.05510960102765396`, F3A→-0.04929035971373862`};

InputsLinDDH= Join[CommonInputsLin , {dhA→2*92*10^-6, dT→0}];
CalcsLinDDH= {TcA→205.804, Tc0→205.804, F10→1, F1A→1, dTmdxicA→-200,
  dTmdxic0→-200, F20→-0.05227168278879645`, F2A→-0.05227168278879645`,
  F30→-0.05510960102765396`, F3A→-0.05510960102765396`};

A0 = {dhA→dh0, F1A→F10, F2A→F20, F3A→F30, TcA→Tc0, dTmdxicA→dTmdxic0};

Print["total dcflow Linear DDH      : ",
  (dcflow3 - (dcflow3 /. A0)) /. InputsLinDDH /. InputsLinDDH /. CalcsLinDDH];
Print["total dcflow Non-Linear DDH: ",
  (dcflow3 - (dcflow3 /. A0)) /. InputsNonLinDDH /. InputsNonLinDDH /.
  CalcsNonLinDDH];
Print["total dcflow Linear DT      : ",
  (dcflow3 - (dcflow3 /. A0)) /. InputsLinDT /. InputsLinDT /. CalcsLinDT];
Print["total dcflow Non-Linear DT : ",
  (dcflow3 - (dcflow3 /. A0)) /. InputsNonLinDT /. InputsNonLinDT /. CalcsNonLinDT];

```

```

total dcflow Linear DDH      : -0.000338475+0.i
total dcflow Non-Linear DDH: -0.00180592+0.i
total dcflow Linear DT       : 0.000392509+0.i
total dcflow Non-Linear DT  : 0.00234848+0.i

```

```

(* Aufspalten in Terme ~p1^2, ~dp^2 und den Rest *)
term1 = Coefficient[Expand[PowerExpand[dcflow3]], Abs[dp]^2]*Abs[dp]^2;
term3 = Coefficient[Expand[PowerExpand[dcflow3]], Abs[p1]^2]*Abs[p1]^2;
term2 = Simplify[PowerExpand[dcflow3-term1-term3], Assumptions->Assu];

(* Term2 (Rest) zusätzlich aufspalten um Skalarprodukte zu erhalten *)
term2a =
  Coefficient[term2, i F2A dhA^2 dTmdxicA F1A^2 g Ta^7/5 w]*i F2A dhA^2 dTmdxicA F1A^2 g Ta^7/5 w
term2c = Simplify[Coefficient[Simplify[term2-term2a],
  -F1A (i dhA^2 (1+g) pm Ta^7/10 w)]* -F1A (i dhA^2 (1+g) pm Ta^7/10 w)]
term2d = FullSimplify[Coefficient[Simplify[term2-term2a-term2c], F3A] F3A]
term2b = Simplify[term2-term2a-term2c-term2d]

(* Kontrolle, muss Null sein *)
Simplify[PowerExpand[dcflow3-term1-term3-term2a-term2b-term2c-term2d]]
Assert[%==0]

(i dhA^2 dTmdxicA F1A^2 F2A g Ta^7/5 w (-p1 Conjugate[dp]+dp Conjugate[p1]))/
(8 (-1+g) kNu TcA^17/5 Abs[dp1i0] Abs[F10])

(i dhA^2 F1A (1+g) Ta^7/10 w (p1 Conjugate[dp]-dp Conjugate[p1]))/
(16 (-1+g) kNu TcA^17/10 Abs[dp1i0] Abs[F10])

(c1 F1A F3A L^2 mu w (p1 (-4 i (-1+g) kNu TcA^17/5 +
  dhA^2 pm Ta^7/10 (2 dTmdxicA F1A F2A g Ta^7/10 - (-1+g) TcA^17/10) w)
  Conjugate[dp]+dp (4 i (-1+g) kNu TcA^17/5 + dhA^2 pm Ta^7/10
  (2 dTmdxicA F1A F2A g Ta^7/10 - (-1+g) TcA^17/10) w) Conjugate[p1]))/
(32 dhA^2 (-1+g) kNu pm^2 TcA^17/5 Abs[dp1i0] Abs[F10])

-((F1A (p1 (2 (-1+g) kNu TcA^17/10 + i dhA^2 pm Ta^7/10 w) Conjugate[dp]+
  dp (2 (-1+g) kNu TcA^17/10 - i dhA^2 pm Ta^7/10 w) Conjugate[p1]))/
(8 (-1+g) kNu pm TcA^17/10 Abs[dp1i0] Abs[F10]))

0

Simplify[Expand[term2d]/. p1 Conjugate[dp]->xxxx /. dp Conjugate[p1]->yyyy];
term2d = % /. xxxx-yyy->-2 I Ip1aDOTdp /. xxxx+yyy->2 p1aDOTdp
Simplify[Expand[term2b]/. p1 Conjugate[dp]->xxxx /. dp Conjugate[p1]->yyyy];
term2b = % /. xxxx-yyy->-2 I Ip1aDOTdp /. xxxx+yyy->2 p1aDOTdp

(c1 F1A F3A L^2 mu w (-8 (-1+g) Ip1aDOTdp kNu TcA^17/5 +
  2 dhA^2 p1aDOTdppm Ta^7/10 (2 dTmdxicA F1A F2A g Ta^7/10 - (-1+g) TcA^17/10) w))/
(32 dhA^2 (-1+g) kNu pm^2 TcA^17/5 Abs[dp1i0] Abs[F10])

-((F1A (4 (-1+g) kNu p1aDOTdp TcA^17/10 + 2 dhA^2 Ip1aDOTdppm Ta^7/10 w))/
(8 (-1+g) kNu pm TcA^17/10 Abs[dp1i0] Abs[F10]))

```

```

(* Skalarprodukte ersetzen, F1 ≠ 1, nicht-linearer Reibungskoeffizient*)
term2a = term2a /. -p1 Conjugate[dp] + dp Conjugate[p1] -> 2 I Ip1aDOTdp
term2b = term2b /. p1 Conjugate[dp] + dp Conjugate[p1] -> 2 p1aDOTdp
term2c = term2c /. p1 Conjugate[dp] - dp Conjugate[p1] -> -2 I Ip1aDOTdp
term2d


$$\frac{dhA^2 dTmdxicA F1A^2 F2Ag Ip1aDOTdp Ta^{7/5} w}{4 (-1+g) kNu TcA^{17/5} Abs[dp1i0] Abs[F10]}$$

- ((F1A (4 (-1+g) kNu p1aDOTdp TcA^{17/10} + 2 dhA^2 Ip1aDOTdppm Ta^{7/10} w)) /
  (8 (-1+g) kNu pm TcA^{17/10} Abs[dp1i0] Abs[F10]))

$$\frac{dhA^2 F1A (1+g) Ip1aDOTdp Ta^{7/10} w}{8 (-1+g) kNu TcA^{17/10} Abs[dp1i0] Abs[F10]}$$

(c1 F1A F3A L^2 mu w (-8 (-1+g) Ip1aDOTdp kNu TcA^{17/5} +
  2 dhA^2 p1aDOTdppm Ta^{7/10} (2 dTmdxicA F1A F2Ag Ta^{7/10} - (-1+g) TcA^{17/10} w)) /
  (32 dhA^2 (-1+g) kNu pm^2 TcA^{17/5} Abs[dp1i0] Abs[F10]))

(* Kontrolle Term 2 *)
Simplify[ComplexExpand[Simplify[term2 - (term2a + term2b + term2c + term2d),
  Assumptions -> Assu] /. Ip1aDOTdp -> sdot[Ip1, dp] /.
  p1aDOTdp -> sdot[p1, dp], {dp, p1, dp1i0}], Assumptions -> Assu]
Assert[
  % ==
  0]
Simplify::time:
  Time spent on a transformation exceeded 300.` seconds, and the transformation was aborted.
  Increasing the value of TimeConstraint option may improve the result of simplification . >>
0

term2 = term2a + term2b + term2c + term2d ;

```

```

(* Nochmals Skalarprodukte in Term2 abspalten *)
term2A = Simplify[Coefficient[term2 , Ip1aDOTdp] * Ip1aDOTdp]
term2B = Coefficient[term2 , p1aDOTdp * dhA^2] * p1aDOTdp * dhA^2
term2C = Simplify[term2 - term2A - term2B];
Assert[term2C == 0]
(* Term 3 aufspalten *)
term3B = Simplify[term3]
term5 = term2B;
Simplify[term1]
- ((F1A Ip1aDOTdp (2 c1 F3A (-1+g) k L^2 mu Nu TcA^17/5 +
      dhA^4 pm^2 Ta^7/10 (2 dTmdxicA F1A F2A g Ta^7/10 - (-1+g) TcA^17/10)) w) /
  (8 dhA^2 (-1+g) k Nu pm^2 TcA^17/5 Abs[dp1i0] Abs[F10]))
(p1aDOTdp (8 F1A k Nu TcA^17/5 - 8 F1A g k Nu TcA^17/5 + 2 c1 dTmdxicA F1A^2 F2A F3A g L^2 mu Ta^7/5 w^2 +
  c1 F1A F3A L^2 mu Ta^7/10 TcA^17/10 w^2 - c1 F1A F3A g L^2 mu Ta^7/10 TcA^17/10 w^2)) /
  (16 (-1+g) k Nu pm TcA^17/5 Abs[dp1i0] Abs[F10]))
(c1 F1A F2A L^2 mu Ta^7/10 (dTmdxicA F1A F2A g Ta^7/10 - (-1+g) TcA^17/10) w^2 Abs[p1]^2) /
  (16 (-1+g) k Nu pm TcA^17/5 Abs[dp1i0] Abs[F10]))
(dTmdxicA F1A^2 g Ta^7/5 (4 dhA^4 pm^2 + c1^2 F3A^2 L^4 mu^2 w^2) Abs[dp]^2) /
  (16 c1 (-1+g) k L^2 mu Nu pm TcA^17/5 Abs[dp1i0] Abs[F10]))

(* Kontrolle linear einzelne Terme , delta dh *)
(term1 - (term1 /. A0)) /. InputsLinDDH /. CalcsLinDDH /. InputsLinDDH
(term2A - (term2A /. A0)) /. InputsLinDDH /. CalcsLinDDH /. InputsLinDDH
(term3B - (term3B /. A0)) /. InputsLinDDH /. CalcsLinDDH /. InputsLinDDH
(term5 - (term5 /. A0)) /. InputsLinDDH /. CalcsLinDDH /. InputsLinDDH
(term1 + term2A + term3B + term5 - ((term1 + term2A + term3B + term5) /. A0)) /.
  InputsLinDDH /. CalcsLinDDH /. InputsLinDDH

-0.000358754
0.0000202792
0.
0.
-0.000338475

```

```
(* Kontrolle linear einzelne Terme , delta T *)
(term1 - (term1 /. A0)) /. InputsLinDT /. CalcsLinDT /. InputsLinDT
(term2A - (term2A /. A0)) /. InputsLinDT /. CalcsLinDT /. InputsLinDT
(term3B - (term3B /. A0)) /. InputsLinDT /. CalcsLinDT /. InputsLinDT
(term5 - (term5 /. A0)) /. InputsLinDT /. CalcsLinDT /. InputsLinDT
(term1 + term2A + term3B + term5 - ((term1 + term2A + term3B + term5) /. A0)) /.
  InputsLinDT /. CalcsLinDT /. InputsLinDT
```

```
0.000409094
-0.0000660238
0.0000476781
1.76075×10-6
0.000392509
```

```
(* Kontrolle non-linear einzelne Terme , delta dh *)
(term1 - (term1 /. A0)) /. InputsNonLinDDH /. CalcsNonLinDDH /. InputsNonLinDDH
(term2A - (term2A /. A0)) /. InputsNonLinDDH /. CalcsNonLinDDH /. InputsNonLinDDH
(term3B - (term3B /. A0)) /. InputsNonLinDDH /. CalcsNonLinDDH /. InputsNonLinDDH
(term5 - (term5 /. A0)) /. InputsNonLinDDH /. CalcsNonLinDDH /. InputsNonLinDDH
(term1 + term2A + term3B + term5 - ((term1 + term2A + term3B + term5) /. A0)) /.
  InputsNonLinDDH /. CalcsNonLinDDH /. InputsNonLinDDH
```

```
-0.000046178
0.0000886448
-3.55559×10-7
-0.00184803
-0.00180592
```

```
(* Kontrolle non-linear einzelne Terme , delta T *)
(term1 - (term1 /. A0)) /. InputsNonLinDT /. CalcsNonLinDT /. InputsNonLinDT
(term2A - (term2A /. A0)) /. InputsNonLinDT /. CalcsNonLinDT /. InputsNonLinDT
(term3B - (term3B /. A0)) /. InputsNonLinDT /. CalcsNonLinDT /. InputsNonLinDT
(term5 - (term5 /. A0)) /. InputsNonLinDT /. CalcsNonLinDT /. InputsNonLinDT
(term1 + term2A + term3B + term5 - ((term1 + term2A + term3B + term5) /. A0)) /.
  InputsNonLinDT /. CalcsNonLinDT /. InputsNonLinDT
```

```
0.0000691785
-0.000051977
1.31706×10-6
0.00232996
0.00234848
```

```
(* Term 5 ohne kompressiblen Druckhubabfall *)
Simplify[(term5 - (term5 /. A0)) /. F3A → 0 /. F30 → 0]
  (F10 - F1A) p1aDOTdp
  2pm Abs [dp1i0] Abs [F10]
```

```

(* Kontrolle non-linear *)
C1 = 1 / (16 (g-1) Nu k Ta pm Abs [dpli0] Abs [F10]);
C2 = 4 C1 g pm ^2 / (c1 mu L^2);
C3 = 2 C1 w pm ;
C4 = C1 c1 L^2 mu w^2;

C5 = 4 C1 c1 (g-1) k Nu L^2 mu w / pm ;
C6 = 8 C1 (g-1) k Nu;

T1A = Ta^(17/10) / TcA^(17/10);
T2A = F1A^2 Ta^(24/10) dTmdxicA / TcA^(34/10);
T3A = F1A T1A (g-1) - 2 g T2A F2A;
T4A = F1A T1A (1-g) F2A + T2A g F2A^2;
(* Gedeonlösung (fehlerhaft)
   T3A = -F1A T1A (g+1) + 2 g T2A F2A;
   T4A = F1A T1A (g+1) F2A + T2A g F2A^2;
*)

T5A = g T2A F3A^2;
T6A = F1A F3A Ta;
(* linearer Fall: F1A=1,
d.h. tau8 ist Regeneratorunabhängig und hebt sich bei Reg A-Reg 0 auf *)
T7A = 2 F2A F3A T2A g - F1A F3A T1A (g-1);
T8A = F1A Ta;

(* Kontrolle, non-linear *)
Simplify[term1 - Abs [dp]^2 (C2 dhA^4 T2A + C4 T5A)]
FullSimplify[term2A - Ip1aDOTdp (C3 dhA^2 T3A - C5 / dhA^2 T6A)]
Simplify[term3B - Abs [p1]^2 C4 T4A]
FullSimplify[term5 - p1aDOTdp (C4 T7A - C6 T8A)]

0

0

0

0

(* Kontrolle Gedeon *)
GA = {F10 -> 1, F1A -> 1, dhA -> 2 gapA, c1 -> 96, F3A -> 0, F30 -> 0};

Simplify[(term1 /. GA) - Abs [dp]^2 (C2 dhA^4 T2A /. GA)]
FullSimplify[(term2A /. GA) - Ip1aDOTdp (C3 dhA^2 T3A /. GA)]
Simplify[(term3B /. GA) - Abs [p1]^2 (C4 T4A /. GA)]

0

0

0

Inputs = InputsLinDDH;
Calcs = CalcsLinDDH;

```



## 10.4 Beispielrechnung für Folienregenerator und Siebstapelregenerator

```

(*)
** Initialisierung**
*)
dp1i0=.;
dpc0=.;
F10=.;
F1A=.;
TcA=.;
Tc0=.;
F2A=.;
F20=.;
F30=.; F3A=.;
C1 = 1 / (16 (g-1) Nu k T a p m Abs [ dp1i0 ] Abs [ F10 ] );
C2 = 4 C1 g p m ^ 2 / ( c1 mu L ^ 2 );
C3 = 2 C1 w p m ;
C4 = C1 c1 L ^ 2 mu w ^ 2 ;
C5 = 4 C1 c1 (g-1) mu Nu w k L ^ 2 / p m ;
C6 = 8 C1 (g-1) k Nu ;

T1A = Ta ^ (17 / 10) / TcA ^ (17 / 10) ;
T2A = F1A ^ 2 Ta ^ (24 / 10) dTmdxicA / TcA ^ (34 / 10) ;
T3A = F1A T1A (g-1) - 2 g T2A F2A ;
T4A = F1A T1A (1-g) F2A + T2A g F2A ^ 2 ;
T5A = g F3A ^ 2 T2A ;
T6A = F1A F3A Ta ;
T7A = 2 F2A F3A T2A g - F1A F3A T1A (g-1) ;
T8A = F1A Ta ;
T10 = Ta ^ (17 / 10) / Tc0 ^ (17 / 10) ;
T20 = F10 ^ 2 Ta ^ (24 / 10) dTmdxic0 / Tc0 ^ (34 / 10) ;
T30 = F10 T10 (g-1) - 2 g T20 F20 ;
T40 = F10 T10 (1-g) F20 + T20 g F20 ^ 2 ;
T50 = g F30 ^ 2 T20 ;
T60 = F10 F30 Ta ;
T70 = 2 F20 F30 T20 g - F10 F30 T10 (g-1) ;
T80 = F10 Ta ;

(*)
** Kühlerparameter
*)
(* HLPRK (Fahranlage) 7 kW *)
CommonNonLinInputs = { dh0 -> 54.3 * 10 ^ -6, R -> 2070,
    w -> 2 Pi 50, Ta -> 300, Te -> 60, pm -> 20 * 10 ^ 5, p1 -> 3.42 * 10 ^ 5,
    dp -> 1.64 * 10 ^ 5 * Exp [ I (-143 * Pi / 180) ], L -> .075, k -> 0.157, Nu -> 4.57,
    mu -> 20 * 10 ^ -6, c1 -> 120, c2 -> 2, g -> 5 / 3, a -> 0.7267204357515678 ` ,
    b -> -0.033358175535912235 ` , c -> 0.0007568811354492122 ` };

```

```

(* HLPRK (Fahranlage) 1 kW *)
FAInputs1kW = {dh0 → 54.3 * 10^-6, R → 2070,
  w → 2 Pi 50, Ta → 300, Te → 60, pm → 20 * 10^5, p1 → 1.42 * 10^5,
  dp → 0.416 * 10^5 * Exp[I (-143 * Pi/180)], L → .075, k → 0.157, Nu → 4.57,
  mu → 20 * 10^-6, c1 → 120, c2 → 2, g → 5/3, a → 0.7267204357515678`,
  b → -0.033358175535912235`, c → 0.0007568811354492122`};

(* HLPRK (Fahranlage) 2 kW *)
FAInputs2kW = {dh0 → 54.3 * 10^-6, R → 2070,
  w → 2 Pi 50, Ta → 300, Te → 60, pm → 20 * 10^5, p1 → 1.96 * 10^5,
  dp → 0.69 * 10^5 * Exp[I (-142 * Pi/180)], L → .075, k → 0.157, Nu → 4.57,
  mu → 20 * 10^-6, c1 → 120, c2 → 2, g → 5/3, a → 0.7267204357515678`,
  b → -0.033358175535912235`, c → 0.0007568811354492122`};

(* Folienregenerators von Gedeon *)
CommonLinInputs =
  {dh0 → 2 * 90 * 10^-6, R → 2070, w → 2 Pi 100, Ta → 300, Te → 100, pm → 27 * 10^5,
  p1 → 2.72 * 10^5, dp → 0.071 * 10^5 * Exp[I (-193 * Pi/180)], L → .1, k → 0.157,
  Nu → 8.23, mu → 20 * 10^-6, c1 → 96, c2 → 0, g → 5/3, a → 1, b → 0, c → 0};

(* Antriebsplattform *)
APIInputsReg1 = {dh0 → 86.1 * 10^-6, R → 2070,
  w → 2 Pi 40, Ta → 318, Te → 265, pm → 25 * 10^5, p1 → 3.94 * 10^5,
  dp → 0.2323 * 10^5 * Exp[I (-77 * Pi/180)], L → .019, k → 0.157, Nu → 4.57,
  mu → 20 * 10^-6, c1 → 120, c2 → 2, g → 5/3, a → 0.7267204357515678`,
  b → -0.033358175535912235`, c → 0.0007568811354492122`};

APIInputsReg2 = {dh0 → 61.6 * 10^-6, R → 2070, w → 2 Pi 40,
  Ta → 265, Te → 70, pm → 25 * 10^5, p1 → 3.75 * 10^5,
  dp → 0.3756 * 10^5 * Exp[I (-92 * Pi/180)], L → .033, k → 0.157, Nu → 4.57,
  mu → 20 * 10^-6, c1 → 120, c2 → 2, g → 5/3, a → 0.7267204357515678`,
  b → -0.033358175535912235`, c → 0.0007568811354492122`};

NonLinInputsDT = Join[CommonNonLinInputs, {dhA → dh0, dT → 10}];
NonLinInputsDDH = Join[CommonNonLinInputs, {dhA → 1.022222 * dh0, dT → 0}];
LinInputsDT = Join[CommonLinInputs, {dhA → dh0, dT → 10}];
LinInputsDDH = Join[CommonLinInputs, {dhA → 1.022222 * dh0, dT → 0}];

(*
** Beispielrechnung Kryokühler,
nicht-linearer Reibungskoeffizient Störung im Temperaturprofil **
*)
Inputs = Join[FAInputs2kW, {dhA → dh0, dT → 10}];

(* Temperaturprofile *)
Tm0 [xi_] := Ta - xi (Ta - Te) /. Inputs (* immer lineares Profil *)
TmA [xi_] := Ta - xi (Ta - Te) + 4 dT (xi - xi^2) /. Inputs

xic =.;
(* Solution of Integrate 1/Tm {0,A} dxi *)
I00 = Integrate[1/Tm0 [x], {x, xic, xi2},
  Assumptions → {{xic, xi2} ∈ Reals, 0 ≤ xic ≤ 1, 0 ≤ xi2 ≤ 1}][[1]];
I0A = Integrate[1/TmA [x], {x, xic, xi2}, Assumptions →
  {{xic, xi2} ∈ Reals, 0 ≤ xic ≤ 1, 0 ≤ xi2 ≤ 1}][[1]];

```

```

(* Solution of Integrate (Tm {0,A}/Ta)^1.7 dxi *)
I10a = Integrate[(Tm0 [x]/Ta)^1.7 /. Inputs,
  {x, 0, xi4}, Assumptions -> {xi4 ∈ Reals, 0 ≤ xi4 ≤ 1}][[1]];
I1Aa = Integrate[(TmA [x]/Ta)^1.7 /. Inputs, {x, 0, xi4},
  Assumptions -> {xi4 ∈ Reals, 0 ≤ xi4 ≤ 1}][[1]];

(* Solution of Integrate_0^1 (Tm [{0,A}/Ta)^1.7 *)
n0 = Integrate[(Tm0 [x]/Ta)^1.7, {x, 0, 1}] /. Inputs;
nA = Integrate[(TmA [x]/Ta)^1.7, {x, 0, 1}] /. Inputs;

Off[NIntegrate::nlim]
Off[Solve::ratnz]
Off[NIntegrate::inumr]

(* Berechnung von xc, F2 und F3 *)
(* Regenerator 0 *)
PrintTemporary["XI: Iteration for Regenerator 0"];
oldxic = 0.4; xic = 0.5;
While[oldxic != xic,
  oldxic = xic;
  chi = 8 c2 dh0^3 pm / (RTa c1^2 mu^2 (Tm0 [xic]/Ta)^2.4) /. Inputs;
  I10 := NIntegrate[1/Tm0 [xi4] I10a /. Inputs, {xi4, xic, xi2}];
  F20 = NIntegrate[((Tm0 [xi2]/Ta)^1.7) * Ta I00 /. Inputs, {xi2, 0, 1}];
  F30 =
    1/n0 NIntegrate[((Tm0 [xi2]/Ta)^1.7) * NIntegrate[Ta I10a/Tm0 [xi4] /. Inputs,
      {xi4, xic, xi2}] /. Inputs, {xi2, 0, 1}];
  dpc0 = Iwp1/pm L^2 mu c1/(2 dh0^2) (F20 + dp/p1 F30) /. Inputs;
  dp1i0 = dp - dpc0 /. Inputs;
  F10 = a + b chi Abs[dp1i0/L] + c chi^2 Abs[dp1i0/L]^2 /. Inputs;
  (* F10 = -2/(chi Abs[dp1i0/L]) (1 - Sqrt[1 + chi Abs[dp1i0/L]]) /. NonLinInputs; *)
  gamma =
    2 c2 dh0^3 pm / (L RTa c1^2 mu^2 (Tm0 [xic]/Ta)^1.7) Abs[dp1i0 F10] /. Inputs /.
    Inputs;
  xic = xi /. FindRoot[(Tm0 [xi]/Ta)^1.7 + Tm0 [xi]/Ta gamma ==
    NIntegrate[(Tm0 [xi]/Ta)^1.7 + Tm0 [xi]/Ta gamma /. Inputs,
      {xi, 0, 1}] /. Inputs, {xi, xic}][[1]];
  PrintTemporary[oldxic, " ", xic];
]
xc0 = xic;
Tc0 = Tm0 [xc0];
Txi0 = Tm0 '[xc0];

(* Regenerator A *)
PrintTemporary["XI: Iteration for Regenerator A"];
oldxic = 0; xic = 0.5;
While[oldxic != xic,
  oldxic = xic;
  chi = 8 c2 dhA^3 pm / (RTa c1^2 mu^2 (TmA [xic]/Ta)^2.4) /. Inputs /. Inputs;
  I1A := NIntegrate[1/TmA [xi4] I1Aa /. Inputs, {xi4, xic, xi2}];
  F2A = NIntegrate[((TmA [xi2]/Ta)^1.7) * Ta I0A /. Inputs, {xi2, 0, 1}];
  F3A =

```

```

1/nANIntegrate[ ((TmA [xi2]/Ta)^1.7)*NIntegrate[Ta I1Aa/TmA [xi4] /. Inputs,
{xi4, xic, xi2}] /. Inputs, {xi2, 0, 1}];
dpcA = Iwp1/pm L^2mu c1/(2 dhA^2) (F2A+dp/p1 F3A) /. Inputs;
dpliA = dp - dpcA /. Inputs;
F1A = a + b chi Abs[dpliA/L] + c chi^2 Abs[dpliA/L]^2 /. Inputs /. Inputs;
(*F1A = -2/(chi Abs[dpliA/L]) (1 - Sqrt[1 + chi Abs[dpliA/L]]) /. NonLinInputs; *)
gamma =
2 c2 dhA^3 pm / (LR Ta c1^2 mu^2 (TmA [xic]/Ta)^1.7) Abs[dpliA F1A] /. Inputs /.
Inputs;
xic = xi /. FindRoot[(TmA [xi]/Ta)^1.7 + TmA [xi]/Ta gamma ==
NIntegrate[(TmA [xi]/Ta)^1.7 + TmA [xi]/Ta gamma /. Inputs,
{xi, 0, 1}] /. Inputs, {xi, xic}][[1]];
PrintTemporary[oldxic, " ", xic];
]
xCA = xic;
TcA = TmA [xCA];
TxiA = TmA '[xCA];

Print["Chi = ", chi]
Print["Tc0 = ", Tc0]
Print["TcA = ", TcA]
Print["xc0 = ", xc0]
Print["xcA = ", xCA]
Print["Txi0 = ", Txi0]
Print["TxiA = ", TxiA]
Print["F10 = ", F10]
Print["F1A = ", F1A]
Print["F20 = ", F20]
Print["F2A = ", F2A]
Print["F30 = ", F30 /. Inputs]
Print["F3A = ", F3A /. Inputs]
Print["F20+dp/p1 F30 = ", F20+dp/p1 F30 /. Inputs]
Print["F2A+dp/p1 F3A = ", F2A+dp/p1 F3A /. Inputs]

Chi = 4.10529 x 10^-6

Tc0 = 186.862

TcA = 193.453

xc0 = 0.47141

xcA = 0.485576

Txi0 = -240

TxiA = -238.846

F10 = 0.60749

F1A = 0.616678

F20 = -0.0709341

F2A = -0.079243

F30 = -0.0718659

F3A = -0.0724862

F20+dp/p1 F30 = -0.0509977 + 0.0155761 i

```

F<sub>2A</sub>+dp/p1 F<sub>3A</sub> = -0.0591344+0.0157105 i

(\* 4. Berechne Terme \*)

sdot[comp1\_ , comp2\_ ] := {Re[comp1 ], Im [comp1 ]}.{Re[comp2 ], Im [comp2 ]}

dpc0 = Iwp1/pm L^2mu c1/(2 dh0^2) (F20+dp/p1 F30) /. Inputs;

term1x =

C2 Abs [dp] ^2 \* (T2A\*dhA^4 - T20\*dh0^4) /. dp1i0-> dp - dpc0 /. dTmdxic0 -> Txi0/.  
dTmdxicA -> TxiA/. Inputs /. Inputs;

term2x = C3 sdot [Ip1, dp] (dhA^2\*T3A - dh0^2\*T30) /. dp1i0-> dp - dpc0 /.  
dTmdxic0 -> Txi0/. dTmdxicA -> TxiA/. Inputs /. Inputs;

term3x = C4 Abs [p1] ^2 \* (T4A - T40) /. dp1i0-> dp - dpc0 /. dTmdxic0 -> Txi0/.  
dTmdxicA -> TxiA/. Inputs /. Inputs;

term4x = C4 Abs [dp] ^2 (T5A - T50) /. dp1i0-> dp - dpc0 /. dTmdxic0 -> Txi0/.  
dTmdxicA -> TxiA/. Inputs /. Inputs;

term5x = -C5 sdot [Ip1, dp] (T6A/dhA^2 - T60/dh0^2) /. dp1i0-> dp - dpc0 /.  
dTmdxic0 -> Txi0/. dTmdxicA -> TxiA/. Inputs /. Inputs;

term6x = C4 sdot [p1, dp] (T7A - T70) /. dp1i0-> dp - dpc0 /. dTmdxic0 -> Txi0/.  
dTmdxicA -> TxiA/. Inputs /. Inputs;

term7x = -C6 sdot [p1, dp] (T8A - T80) /. dp1i0-> dp - dpc0 /. dTmdxic0 -> Txi0/.  
dTmdxicA -> TxiA/. Inputs /. Inputs;

Print["1. Term = ", term1x \*10^6]

Print["2. Term = ", term2x \*10^6]

Print["3. Term = ", term3x \*10^6]

Print["4. Term = ", term4x \*10^6]

Print["5. Term = ", term5x \*10^6]

Print["6. Term = ", term6x \*10^6]

Print["7. Term = ", term7x \*10^6]

Print["(m<sub>DC</sub>)<sub>A</sub>/(m<sub>c1</sub>)<sub>0</sub> = ",

term1x +term2x +term3x +term4x +term5x +term6x +term7x ]

1. Term = 58.0624

2. Term = 7.59475

3. Term = 0.761721

4. Term = 0.0318534

5. Term = -19.483

6. Term = 0.22674

7. Term = 610.977

(m<sub>DC</sub>)<sub>A</sub>/(m<sub>c1</sub>)<sub>0</sub> = 0.000658172

## 10.5 Programmierung des Micromasters zum Betrieb eines Linearkompressors mit Spannungssteuerung

Tabelle 10.1: Parameter für die Motoreigenschaften.

Parameter	Beschreibung	default	neu	Bemerkungen
304	Motornennspannung	230 V	400 V	
305	Motornennstrom	55 A	35 A	
307	Motornennleistung	30 kW	10 kW	
310	Motornennfrequenz	50 Hz	70 Hz	
640	Motorüberlastfaktor	150 %	100 %	
1000	Auswahl Frequenzsollwertquelle	2, Anlagsollwert	3, Festfrequenz	
1080	Min Frequenz	0 Hz	50 Hz	
1082	Max Frequenz	50 Hz	70 Hz	
1120	Hochlaufzeit	10 s	3.5 s	
1121	Rücklaufzeit	10 s	1 s	
1300	Regelungsart	0, U/f linear	19, U/f mit unabh. Spannung	
1310	konstante Spannungsanhebung	50 %	0 %	Überspannung beim Anfahren verhindern
2100.0	Auswahl Alarmnummer	0	23	Fehler 23 wegen 1-Phasenmotor ignorieren
2100.1	Auswahl Alarmnummer	0	523	Fehler 523 wegen 1-Phasenmotor ignorieren

Tabelle 10.2: Parameter für die Notabschaltung.

Parameter	Beschreibung	default	neu	Bemerkungen
700	Auswahl Befehlsquelle	2	4	Steuerung über RS232
707	Funktion Digitaleingang 7	0, gesperrt	3, AUS2	Analogeingang für Notabschaltung genutzt
708	Funktion Digitaleingang 8	0, gesperrt	4, AUS3	Analogeingang für Notabschaltung genutzt
840	BI: EIN/AUS1	722:0	2032:1	Analogeingang für Notabschaltung genutzt
844	BI: 1. AUS2	1:0	2032:2	Analogeingang für Notabschaltung genutzt

Tabelle 10.3: Parameter für die Spannungssteuerung.

Parameter	Beschreibung	default	neu	Bemerkungen
1330	CI: Spannungsollwert	0:0	2880:0	
2800	Freigabe FFB	0, gesperrt	1, Enable	
2802.8	Aktivierung FFB	0, Inaktiv	1, Level 1	MUL 1 aktivieren
2802.9	Aktivierung FFB	0, Inaktiv	1, Level 1	MUL 2 aktivieren
2877.0	CI: MUL 1	755:0	1:0	Festsollwert 1 mit Spannung multiplizieren
2877.1	CI: MUL 1	755:0	2889:0	
2879.0	CI: MUL 2	755:0	2878:0	Ergebnis von MUL 1 mit Festwert 2 multiplizieren
2879.1	CI: MUL 2	755:0	2890:0	
2889	CO: Festsollwert 1	0 %	10 %	
2890	CO: Festsollwert 2	0 %	0 %	

## 10.6 Software PID-Regler

Abbildung 10.1 zeigt die verwendete Implementierung in LABVIEW. Als Besonderheit ist hier eine Begrenzung des Integralteils vorgesehen, um ein "Volllaufen" während des Abkühlvorgangs zu verhindern. Die entsprechenden PID-Parameter wurden mittels "Schwingungsmethode" nach [100] ermittelt.

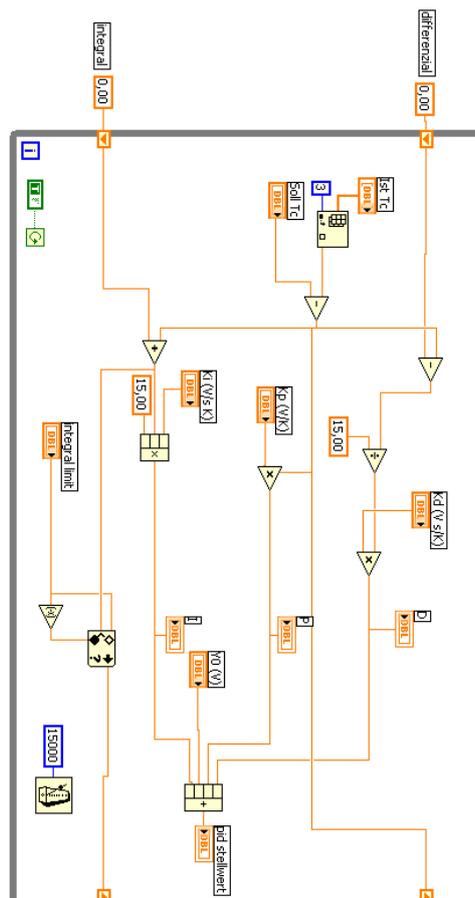


Abbildung 10.1: Implementierung des PID-Reglers in LABVIEW.

## 10.7 Programm zur Auswertung des Sage-Rechengitters

Das folgende PERL-Programm wurde zur Untersuchung der Energieflüsse entwickelt. Als Eingabe dient ein SAGE-Rechengitter (\*.grd Datei).

```
#!/usr/bin/perl
#
# Grid parser for Sage V4 and V5
#
# Copyright(C) 2006, 2007, 2008 Marc Dietrich <marvin24@gmx.de>
#
# This program is free software; you can redistribute it and/or
# modify it under the terms of the GNU General Public License
# as published by the Free Software Foundation; either version
# 3 of the License, or (at your option) any later versions.
#

$debug=0;
$/ = "\n";

$tref=300;
$RHe=8.31451 / 0.004;
$gamma=5/3;
$freq=50;
$cv=$RHe/($gamma-1);
$cp=$gamma * $cv;

$c1 = 0.5338;
$c2 = 0.05886;
$Tc = 5.19;
$Pc = 2.29*10**5;
$ahe = $c1 * $RHe**2 * $Tc**2.5 / $Pc;
$bhe = $c2 * $RHe * $Tc / $Pc;

use Math::Trig;

%solid_keys = (
    "DTw:_Tw-_Ts(K)" => "DTw",
    "Qx:_axial_heat_flux(W)" => "Qx_flux",
    "Qx:_axial_heat_flow(W)" => "Qx_flow",
    "Tp:_pos_y-face_temperature(K)" => "Tp",
    "Tn:_neg_y-face_temperature(K)" => "Tn",
    "Ts:_center-line_temperature(K)" => "Tsc",
    "Tsi:_initial_Ts(K)" => "Tsi",
    "Tsm:_mean_Ts(K)" => "Tsm",
    "Ts:_temperature(K)" => "Ts",
    "F:_Gx_connector_value(W/m)" => "FGx_sol",
    "F:_Gxt_connector_value(W/m)" => "GGxt_sol"
);

%gas_keys = (
    "A:_flow_area(m2)" => "A",
    "Dh:_mass_specific_enthalpy_change(J/kg)" => "Dh",
```

"DP: $\Delta$ pressure $\Delta$ rise $\Delta$ (Ppos - Pneg) $\Delta$ (Pa) "	=> "DP",
"F: $\Delta$ Gx $\Delta$ connector $\Delta$ value $\Delta$ (W/m) "	=> "FGx $\Delta$ gas",
"F: $\Delta$ Gxt $\Delta$ connector $\Delta$ value $\Delta$ (W/m) "	=> "FGxt $\Delta$ gas",
"KANeg: $\Delta$ neg $\Delta$ inlet $\Delta$ conductance $\Delta$ (W/m/K) "	=> "KANeg",
"KAPos: $\Delta$ pos $\Delta$ inlet $\Delta$ conductance $\Delta$ (W/m/K) "	=> "KAPos",
"Pneg: $\Delta$ neg - inlet $\Delta$ pressure $\Delta$ (Pa) "	=> "Pneg",
"Ppos: $\Delta$ pos - inlet $\Delta$ pressure $\Delta$ (Pa) "	=> "Ppos",
"P: $\Delta$ pressure $\Delta$ (Pa) "	=> "P",
"Qx: $\Delta$ axial $\Delta$ heat $\Delta$ flow $\Delta$ (W) "	=> "Qx",
"Re: $\Delta$ Reynolds $\Delta$ number "	=> "Re",
"Rho: $\Delta$ density $\Delta$ (kg/m3) "	=> "Rho",
"RhoEg: $\Delta$ neg - inlet $\Delta$ volume $\Delta$ specific $\Delta$ total $\Delta$ energy $\Delta$ (J/m3) "	=> "RhoEg",
"RhoEpos: $\Delta$ pos - inlet $\Delta$ volume $\Delta$ specific $\Delta$ total $\Delta$ energy $\Delta$ (J/m3) "	=> "RhoEpos",
"RhoE: $\Delta$ volume $\Delta$ specific $\Delta$ total $\Delta$ energy $\Delta$ (J/m3) "	=> "RhoE",
"RhoK: $\Delta$ volume - specific $\Delta$ turbulence $\Delta$ kinetic $\Delta$ energy $\Delta$ (J/m3) "	=> "RhoK",
"RhoNeg: $\Delta$ neg $\Delta$ inlet $\Delta$ mixed $\Delta$ density $\Delta$ (kg/m3) "	=> "RhoNeg",
"RhoPos: $\Delta$ pos $\Delta$ inlet $\Delta$ mixed $\Delta$ density $\Delta$ (kg/m3) "	=> "RhoPos",
"RhoUA: $\Delta$ mass $\Delta$ flow $\Delta$ rate $\Delta$ (kg/s) "	=> "RhoUA",
"RhoUw: $\Delta$ effective $\Delta$ wall $\Delta$ mass - velocity $\Delta$ (kg/(s $\Delta$ m2)) "	=> "RhoUw",
"Rt: $\Delta$ turbulent $\Delta$ Reynolds $\Delta$ number "	=> "Rt",
"Tb: $\Delta$ relative $\Delta$ turbulence $\Delta$ intensity "	=> "Tb",
"T: $\Delta$ bulk $\Delta$ temperature $\Delta$ (K) "	=> "T $\Delta$ bulk",
"Td: $\Delta$ tidal $\Delta$ amplitude $\Delta$ ratio "	=> "Td",
"ToffsetNeg: $\Delta$ temperature $\Delta$ neg $\Delta$ inlet $\Delta$ +1 $\Delta$ (K) "	=> "ToffsetNeg",
"ToffsetPos: $\Delta$ temperature $\Delta$ pos $\Delta$ inlet $\Delta$ -1 $\Delta$ (K) "	=> "ToffsetPos",
"T: $\Delta$ temperature $\Delta$ (K) "	=> "T",
"Tw: $\Delta$ negative $\Delta$ z $\Delta$ surface $\Delta$ temperature $\Delta$ (K) "	=> "TwNeg",
"Tw: $\Delta$ pos $\Delta$ z - surface $\Delta$ temperature $\Delta$ (K) "	=> "TwPos",
"UA: $\Delta$ volumetric $\Delta$ flow $\Delta$ rate $\Delta$ (m3/s) "	=> "UA",
"U: $\Delta$ mean $\Delta$ flow $\Delta$ velocity $\Delta$ (m/s) "	=> "U",
"U: $\Delta$ velocity $\Delta$ (m/s) "	=> "U",
"Va: $\Delta$ Valensi $\Delta$ number "	=> "Va",
"V: $\Delta$ volume $\Delta$ (m3) "	=> "V",
"RhoE1: $\Delta$ cnct $\Delta$ 1 $\Delta$ volume $\Delta$ specific $\Delta$ total $\Delta$ energy $\Delta$ (J/m3) "	=> "RhoEg",
"RhoE2: $\Delta$ cnct $\Delta$ 2 $\Delta$ volume $\Delta$ specific $\Delta$ total $\Delta$ energy $\Delta$ (J/m3) "	=> "RhoEpos",
"P1: $\Delta$ cnct $\Delta$ 1 $\Delta$ pressure $\Delta$ (Pa) "	=> "Pneg",
"P2: $\Delta$ cnct $\Delta$ 2 $\Delta$ pressure $\Delta$ (Pa) "	=> "Ppos",
"work $\Delta$ flow "	=> "W",
"enthalpy "	=> "H",
"entropy "	=> "RhoUAs",
"AE $\Delta$ loss $\Delta$ by $\Delta$ surface $\Delta$ heat $\Delta$ flow "	=> "SgenWall",
"AE $\Delta$ loss $\Delta$ by $\Delta$ pressure $\Delta$ drop "	=> "SgenDP",
"AE $\Delta$ loss $\Delta$ by $\Delta$ axial $\Delta$ heat $\Delta$ flow "	=> "SgenQx",
"mean $\Delta$ flow $\Delta$ velocity $\Delta$ amp "	=> "U $\Delta$ amp",
"mean $\Delta$ flow $\Delta$ velocity $\Delta$ phase "	=> "U $\Delta$ phase",
"pressure $\Delta$ drop $\Delta$ amp "	=> "DP $\Delta$ amp",
"pressure $\Delta$ drop $\Delta$ phase "	=> "DP $\Delta$ phase",
"pressure $\Delta$ amp "	=> "P $\Delta$ amp",
"pressure $\Delta$ phase "	=> "P $\Delta$ phase",
"volumetric $\Delta$ flow $\Delta$ rate $\Delta$ amp "	=> "UA $\Delta$ amp",

```

    "volumetric_flow_rate_phase"      => "UA_phase",
    "density_amp"                     => "Rho_amp",
    "density_phase"                   => "Rho_phase",
    "mass_flow_rate_amp"              => "RhoUA_amp",
    "mass_flow_rate_phase"            => "RhoUA_phase",
    "bulk_temperature_amp"            => "T_amp",
    "bulk_temperature_phase"          => "T_phase",

    "Tm_S_flow_1"                     => "TS",
    "Tm_S_flow_2"                     => "W-H",
    "TOS_flow"                         => "TOS",
    "Exergy_flow"                     => "Chi",
    "Exergy_flow2"                    => "Chi2",
);

%piston_keys = (
    "F:Gt_connector_value(Pa)"        => "FGt_piston_press",
    "F:Gt_connector_value(N)"         => "FGt_piston_force",
    "X:displacement(m)"               => "X",
    "Xd:velocity(m/s)"                => "Xd",
    "Xdd:acceleration(m/s2)"          => "Xdd",
);

foreach $i (@ARGV) {
    ARG: {
        $i eq "-d" && do { print "*_enabled_debug_mode\n"; $debug=1; next ARG; };
        $i eq "-g" && do { dprint("_plot_gas\n"); $plot_gas = 1; next ARG; };
        $i eq "-s" && do { dprint("_plot_solid\n"); $plot_solid = 1; next ARG; };
        $i eq "-v" && do { dprint("_plot_volume\n"); $plot_volume = 1; next ARG; };
        $i eq "-rk" && do { dprint("_Redlich-Kwong\n"); $rk = 1; next ARG; };
        $i eq "-?" && do { usage(); exit; };
        dprint("using_$i_as_filename\n"); $filename = $i;
    }
}

print $filename;
open (FILE, $filename) or die("Fehler:!");

$ver      = <FILE>;      # Sage Version
$file     = <FILE>;     # file name
$header3  = <FILE>;     # blank
$model    = <FILE>;     # model name
$header5  = <FILE>;     # blank

($sage, $version, $t, $date) = ($ver =~ /(Sage version)(.+)(\-\-\-\-) (.*)/);

# if (($version ne "4.00") || ($version ne "5.0") || ($version ne "8")) {
# die "Error: wrong header or Sage version: ", $version, "\n"; }

chomp $model;

dprint("Found_root:_$model\n");
$model = format_path($model);
$path = $model;
dprint("setting_initial_path_to:_$path\n");

```

```

dprint("\nparsing_\n");

(@path) = (split ('_\|_', $header3));

LINE: while ($line = <FILE>) {

    chomp $line;
    $line =~ s/\s+$/;
    next LINE if ($line eq "");

    # path?
    if ($line =~ '_\|_') {
        $path = format_path($line);
        dprint("\nfound_path:\n");
        next LINE;
    }

    # useless stuff
    next LINE if ($line =~ "grid");
    next LINE if ($line =~ "^connector");

    # title line? (starts with character)
    if ($line =~ "[a-z]") {
        $found = 0;
        foreach $t (keys %gas_keys, keys %solid_keys, keys %piston_keys) {
            if ($line eq $t) {
                $title = $gas_keys{"$t"} || $solid_keys{"$t"} || $piston_keys{"$t"};
                dprint("\tfound_title:\n");
                $is_gas{"$path"} |= ($title eq "RhoUA");
                $is_volume{"$path"} |= ($title eq "A");
                $found=1;
                last;
            }
        }
        if (!$found) {
            print "found_unknown_keyword:>$line<!!!\n";
            exit;
        }
    }

    # get the numbers ....
    # ... in a 2D hash of 2D arrays !
} else {
    my @tmp = split "_", $line;
    # dprint("pushing $title into $path\n");
    push @{$a{"$path"}{"$title"}}, [ @tmp ];
    $ncells{"$path.$title"}++;
    # print $ncells{"$path.$title"} " ";
    # foreach $t (@tmp) { dprint("\t$t "); }
    # dprint($ncells{"$path.$title"}, " ");
}
}

close (FILE);

# hacky: find largest line for ncells

```

```

# and the target value for ncells inside a path
$ntcells = 0;
dprint("\nstructure:\n");
foreach $path (keys %a) {
    dprint("Path:␣$path\n");
    foreach $title (keys %{$a{"$path"}}) {
        dprint("\t$title\n");
        my $nt = @{$a{"$path"}{"$title"}[0]};
        if (($ntcells <= $nt) && (($title eq "A") || ($title eq "FGxt␣gas"))) { $ntcells =
            $nt; }
        if ($ncells{"$path"} <= $ncells{"$path.$title"}) { $ncells{"$path"} = $ncells{"
            $path.$title"}; dprint("$ncells{"$path"}␣"); }
        foreach $i (@{$a{"$path"}{"$title"}}) {
            dprint("\t\t");
            foreach $j (@{$i}) {
                dprint("$j␣");
            }
            dprint("\n");
        }
        dprint("\n");
    }
}
dprint("guessed␣number␣of␣time␣nodes:␣$ntcells\n\n");

foreach $path (sort keys %a) {

    next if( !$is_gas{"$path"}    && $plot_gas    );
    next if( $is_gas{"$path"}    && $plot_solid );
    next if( !$is_volume{"$path"} && $plot_volume );

    dprint("doing␣$path␣for␣$ncells{"$path"}␣spacial␣cells... \n");
    init_table();

    #####
    # Benutzerdefinierte Variablen I #
    #####

    for($space=0; $space<$ncells{"$path"}; $space++) {
        for($time=0, $sum=0; $time<$ntcells; $time++) {
            if ($is_gas{"$path"}) { # gas

#         calculate some user defined variables

#         Enthalpy flow

                $x1 = $a{"$path"}{"UA"}[$space][$time];
                $x2 = $a{"$path"}{"RhoE"}[$space][$time];
                $x3 = $a{"$path"}{"P"}[$space][$time];
                $u = $x1 * $x2;
                $w = $x1 * $x3;
                $a{"$path"}{"H"}[$space][$time] = $u + $w;
            }
        }
    }
}

```

```

@header = sort keys %{$a{"$path"}};
print("$path\n");
if($title_printed == 0) {
    foreach $title (@header) {
        print "$title\t";
        $title_printed = 1;
    }
    print "\n";
}

#####
# Mittelwerte berechnen #
#####

for ($space=0; $space<$ncells{"$path"}; $space++) { # space grid
    foreach $key (@header) { # ueber alle Variablen
        for ($time=0,$sum=0; $time<$ntcells; $time++) { # und durch die Zeit
            $sum += $a{"$path"}{"$key"}[$space][$time];
        }
        $mean{"$path"}{"$key"}["$space"] = $sum/$ntcells;
    }
}

#####
# Benutzerdefinierte Variablem II #
#####

for ($space=0; $space<$ncells{"$path"}; $space++) {
    if (${$a{"$path"}{"Tbulk"}}[0][0] > 0) {

        # work flow needs mean pressure and volume flow

        for ($time=0,$sum1=0,$sum2=0,$sum3=0,$sum4=0,$sum5=0,$sum6=0,$sum7=0; $time<
            $ntcells; $time++) {
#            work flow
            $sum1 += $a{"$path"}{"UA"}[$space][$time] *
                ($a{"$path"}{"P"}[$space][$time] - $mean{"$path"}{"P"}[$space]);

#            entropy creation by wall heat flow (z-direction)
            $sum2 += (($a{"$path"}{"TwNeg"}[$space][$time] - $a{"$path"}{"Tbulk"}}[$space][
                $time]) /
                ($a{"$path"}{"TwNeg"}[$space][$time] * $a{"$path"}{"Tbulk"}}[$space][
                $time]) *
                $a{"$path"}{"FGxtgas"}}[$space][$time];

#            ideal gas entropy
            $sum3 += ($cv * log($a{"$path"}{"Tbulk"}}[$space][$time]) + $RHe * log(1/$a{"
                $path"}{"Rho"}[$space][$time])) *
                $a{"$path"}{"RhoUA"}[$space][$time];

#            RK-gas entropy
            $sum4 += ($cv * log($a{"$path"}{"Tbulk"}}[$space][$time])
                + $RHe * log(1/$a{"$path"}{"Rho"}[$space][$time] - $bhe)
                - 0.5 * $ahe/$bhe * log(1 + $bhe * $a{"$path"}{"Rho"}[$space][$time])

```

```

        / $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space][$time]**(3/2)
    * $a{"$path"}{"RhoUA"}[$space][$time];

SWITCH: {
    if ($space == 0) {
# P(-1) = 1.5 * P(0) - 0.5 * P(2)
# dP(0) = 0.5 * ( P(1) - P(-1) )
# dP(0) = 0.5 * ( P(1) - ( 1.5 * P(0) - 0.5 * P(2) ) )
    $a{"$path"}{"DP"}[$space][$time] = 0.5 *
        ( $a{"$path"}{"P"}[$space+1][$time] - ( 1.5 * $a{"$path"}{"P"}[
            $space][$time] - 0.5 * $a{"$path"}{"P"}[$space+2][$time] ) );
    $sum5 += $a{"$path"}{"UA"}[$space][$time] * 0.5 *
        ( $a{"$path"}{"P"}[$space+1][$time] - ( 1.5 * $a{"$path"}{"P"}[
            $space][$time] - 0.5 * $a{"$path"}{"P"}[$space+2][$time] ) )
        / $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space][$time];

# T(-1) = 1.5 * T(0) - 0.5 * T(2)
# dT(0) = 0.5 * ( T(1) - T(-1) )
# = 0.5 * ( T(1) - ( 1.5 * T(0) - 0.5 * T(2) ) )
    $tm1 = 1.5 * $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space][$time] - 0.5 * $a{"$path"}{"T⊥
        bulk"}[$space+2][$time];
    $sum6 += 0.5 * ( $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space+1][$time] - $tm1 ) /
        ( $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space][$time] * $tm1 ) * $a{"$path"}{"Qx"
            }[$space+1][$time];

        last SWITCH;
    }
    if ($space >= $ncells{"$path"}-1) {
# $space == $ntcells - 1, last node in space grid
# P($space+1) = 1.5 * P($space) - 0.5 * P($space-2)
# dP($space) = 0.5 * ( P($space+1) - P($space-1) )
# = 0.5 * ( 1.5 * P($space) - 0.5 * P($space-2) - P($space-1) )
    $a{"$path"}{"DP"}[$space][$time] = 0.5 *
        ( 1.5 * $a{"$path"}{"P"}[$space][$time] - 0.5 * $a{"$path"}{"P"}[
            $space-2][$time] - $a{"$path"}{"P"}[$space-1][$time] );
    $sum5 += $a{"$path"}{"UA"}[$space][$time] * 0.5 *
        ( 1.5 * $a{"$path"}{"P"}[$space][$time] - 0.5 * $a{"$path"}{"P"}[
            $space-2][$time] - $a{"$path"}{"P"}[$space-1][$time] )
        / $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space][$time];

# space = ncells - 1
# T($space+1) = 1.5 * T($space) - 0.5 * T($space-2)
# dT($space) = 0.5 * ( T($space+1) - T($space-1) )
# = 0.5 * ( 1.5 * T($space) - 0.5 * T($space-2) - T($space-1) )
    $tsp1 = 1.5 * $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space][$time] - 0.5 * $a{"$path"}{"T⊥
        bulk"}[$space-2][$time];
    $sum6 += 0.5 * ( $tsp1 - $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space-1][$time] ) /
        ( $a{"$path"}{"T⊥bulk"}[$space-1][$time] * $tsp1 ) * $a{"$path"}{"
            Qx"}[$space+1][$time];

        last SWITCH;
    }
    {
# DP pos - neg!
    $a{"$path"}{"DP"}[$space][$time] = 0.5 * ( $a{"$path"}{"P"}[$space+1][$time]

```

```

        - ${"$path"}{"P"}[$space-1][$time]);
# entropy creation by flow friction
    $sum5 += ${"$path"}{"UA"}[$space][$time] * 0.5 * (${"$path"}{"P"}[$space
        +1][$time] - ${"$path"}{"P"}[$space-1][$time])
        / ${"$path"}{"Tbulk"}[$space][$time];

# entropy creation by axial heat flow
    $sum6 += ((${"$path"}{"Tbulk"}[$space+1][$time] - ${"$path"}{"Tbulk"}[
        $space-1][$time]) /
        (${"$path"}{"Tbulk"}[$space+1][$time] * ${"$path"}{"Tbulk"}[
            $space-1][$time])) *
        ${"$path"}{"Qx"}[$space][$time] * 0.5;
    }
}
$sum7 += ${"$path"}{"DP"}[$space][$time];
}
$entropy = ($rk) ? $sum4 : $sum3;
$mean{"$path"}{"W"}[$space] = $sum1 / $ntcells;
$mean{"$path"}{"DP"}[$space] = $sum7 / $ntcells;
$mean{"$path"}{"SgenWall"}[$space] = - $tref * $sum2 / $ntcells / $ncells{"$path"
};
$mean{"$path"}{"SgenDP"}[$space] = - $tref * $sum5 / $ntcells;
$mean{"$path"}{"SgenQx"}[$space] = - $tref * $sum6 / $ntcells;
$mean{"$path"}{"RhoUAs"}[$space] = $entropy / $ntcells;
$mean{"$path"}{"TS"}[$space] = $mean{"$path"}{"Tbulk"}[$space] * $entropy
    / $ntcells;
$mean{"$path"}{"W-H"}[$space] = $mean{"$path"}{"W"}[$space] - $mean{"$path"
    }{"H"}[$space];
$mean{"$path"}{"TOS"}[$space] = $tref * $entropy / $ntcells;
$mean{"$path"}{"Chi"}[$space] = $mean{"$path"}{"H"}[$space] - $mean{"$path"
    }{"TOS"}[$space];
$mean{"$path"}{"Chi2"}[$space] = (1 - $tref/$mean{"$path"}{"Tbulk"}[$space])
    * $mean{"$path"}{"H"}[$space]
        + $tref/$mean{"$path"}{"Tbulk"}[$space] *
        $mean{"$path"}{"W"}[$space];
}

($mean{"$path"}{"DPamp"}[$space], $mean{"$path"}{"DPphase"}[$space]) =
    (fcoef(${ "$path"}{"DP"}[$space]));
($mean{"$path"}{"Pamp"}[$space], $mean{"$path"}{"Pphase"}[$space]) =
    (fcoef(${ "$path"}{"P"}[$space]));
($mean{"$path"}{"UAamp"}[$space], $mean{"$path"}{"UAphase"}[$space]) =
    fcoef(${ "$path"}{"UA"}[$space]);
($mean{"$path"}{"Tamp"}[$space], $mean{"$path"}{"Tphase"}[$space]) =
    fcoef(${ "$path"}{"Tbulk"}[$space]);
($mean{"$path"}{"Tscamp"}[$space], $mean{"$path"}{"Tscphase"}[$space]) =
    fcoef(${ "$path"}{"Tsc"}[$space]);
($mean{"$path"}{"Rhoamp"}[$space], $mean{"$path"}{"Rhophase"}[$space]) =
    fcoef(${ "$path"}{"Rho"}[$space]);
($mean{"$path"}{"RhoUAamp"}[$space], $mean{"$path"}{"RhoUAphase"}[$space]) =
    fcoef(${ "$path"}{"RhoUA"}[$space]);
($mean{"$path"}{"Uamp"}[$space], $mean{"$path"}{"Uphase"}[$space]) =
    fcoef(${ "$path"}{"U"}[$space]);
}

```

```

#####
# eine Zeile ausgeben #
#####

for ($space=0; $space<$ncells{"$path"}; $space++) {
    foreach $key (@header) {
#       print ">>> =". $mean{"$path"}{'T: temperature'}[$space] ." ($key)\n";

        printf "%e\t", $mean{"$path"}{"$key"}[$space];
    }
    print "\n";
}

close (FILE);

exit;

sub fcoef {
    $grid = shift(@_);
    for($j=0,$s1=0,$s2=0; $j<$ntcells; $j++) {
        $s1 += @{$grid}[$j] * cos(2*pi*$j/$ntcells);
        $s2 += @{$grid}[$j] * sin(2*pi*$j/$ntcells);
    }
    $a1 = $s1 * 2/$ntcells;
    $b1 = $s2 * 2/$ntcells;
    $r = sqrt($a1*$a1 + $b1*$b1);
    if($a1 != 0) {
        $p = atan(-$b1/$a1);
    } else {
        $p = 0;
    }

    return($r, $p);
}

sub format_path {
    my $sage_path = shift;
    my $new_path = sprintf("x%03u", $p++) . "\t" . join("\t", split('_\|_', $sage_path))
        ;
    $new_path =~ s/ /_/g;
    $new_path .= "/";
    return($new_path);
}

sub dprint {
    my $line = shift;
    print $line if $debug;
}

sub init_table {
    for($space=0; $space<$ncells{"$path"}; $space++) {
        if(!$plot_solid) {
            foreach $title (values %gas_keys) {
                if(!defined ${"$path"}{"$title"}[$space][$time]) { ${"$path"}{"$title"}[

```

```

        $space[$time] = 0; }
    }
}
}

sub usage {
    print "Sage_parser_V2.0_for_Sage_V4_and_V5\n";
    print "(C) 2006, 2007, 2008 by Marc Dietrich <marvin24@gmx.de>\n\n";
    print "Usage:\n";
    print "\t$0 [-g] [-s] [-v] [-rk] [-?] <filename.grd>\n\n";
    print "\t<filename.grd> is the Sage saved solution grid file\n\n";
    print "\t-? \t\tthis help\n";
    print "\t-g \tplots only gas components\n";
    print "\t-s \tplots only solid components\n";
    print "\t-v \tplots only gas components, which also have an flow area\n";
    print "\t-rk \tuse Redlich-Kwong entropy calculation\n\n";
}

```



## Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Insbesondere bedanke mich bei

- Prof. Dr. Günter Thummes, der diese Arbeit angeregt und betreut hat und mit dessen Unterstützung diese zu einem erfolgreichen Abschluss geführt wurde
- Prof. Dr. Lu-Wei Yang, Dr. Da-Ming Sun und Dr. Jiu-Ce Sun für die wertvollen Anregungen und Unterstützung bei den experimentellen Herausforderungen
- Herrn Yusuf Kücük Kaplan stellvertretend für die Mitarbeiter der Feinmechanischen Werkstatt, die immer ein offenes Ohr für die zahlreichen Probleme und Fragestellungen hatten
- den Mitgliedern des Instituts und insbesondere meiner Arbeitsgruppe für die angenehme Arbeitsatmosphäre
- Lucile Perez für das Korrekturlesen dieser Arbeit und die schier endlose Geduld mit mir
- meinen Eltern für die finanzielle Unterstützung während meines Studiums

**Erklärung gemäß §17 der Promotionsordnung der Gemeinsamen Kommission  
Naturwissenschaften für die Naturwissenschaftlichen Fachbereiche der  
Justus-Liebig-Universität Gießen vom 4.02.2005.**

Ich erkläre:

Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe.

Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht.

Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der "Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis" niedergelegt sind, eingehalten.

Marc Dietrich

Gießen, Dezember 2015