Offene Software zur Geometrie

Anwendung in objektorientierter Programmierung

Von Kurt Endl

In vielen Anwendungsbereichen treten geometrische Probleme auf, zu deren Lösung keine „fertige Software“ existiert. Denn jede solche Software muß mit einer begrenzten Palette von Möglichkeiten aus Kostengründen auf einen möglichst breiten Anwenderkreis zugeschnitten sein. Probleme, die durch keine solche Software abgedeckt werden, bedürfen einer eigenen Behandlung. Um die Programmierung solcher Probleme mit einem Minimum an Zeit und Aufwand zu ermöglichen, wurde in den letzten acht Jahren eine Software in Turbo Pascal entwickelt. Diese stellt alle Hilfsmittel bereit, um eine anspruchsvolle Geometrie auf Bildschirm und Plotter darzustellen. Sie beinhaltet unter anderem einen großen „Werkzeugkasten“, in dem alle wesentlichen geometrischen Gegenstände und Operationen in Form von Typen, Prozeduren, Objekttypen usw. aufgeführt sind. Die „Software zur Geometrie“ ist in zwei Bänden mit vollständigem Quelltext und Diskette veröffentlicht. Sie wurde auf der CEBIT 93 in Hannover als Beitrag der Universität Gießen am Stand der Hessischen Universitäten vorgestellt. Im Herbst desselben Jahres wurde sie auf dem Hochschul-ComputerForum 93 in Berlin vom Bundesminister für Bildung und Wissenschaft mit dem Deutsch-Österreichischen Hochschul-Software-Preis 1993 als beste Lehrsoftware in Mathematik ausgezeichnet.

Im Gegensatz zu einer gewohnten Software befindet sich die „Software zur Geometrie“ auf Programmebene. Der Vorteil hierbei ist, daß die Programme, da sie jeweils für ein spezielles Problem erstellt werden, extrem kurz und damit schnell sind. Außerdem kann man viel effizienter Abänderungen vornehmen. Wenn ein Problem etwa von 50 Parametern abhängt und nur einer geändert werden soll, dann kann man das im Nu im Programm machen. Die Sprache ist Turbo-Pascal ab Version 5.5, die zum ersten Mal die objektorientierte Programmierung erlaubte. Der Nachteil ist, daß man etwas von der Mathematik bzw. der Geometrie verstehen muß.

Natürlich könnte man auch hier noch eine sogenannte Benutzeroberfläche darüberstülpen. Doch mit jeder Oberfläche wird die Sache, wie der Name schon sagt, oberflächlicher.

Die gesamte „Software zur Geometrie“ ist in der modernsten Form der Programmierkunst konzipiert, nämlich in der sogenannten objektorientierten Programmierung. Diese erlaubt, auch die kompliziertesten geometrischen Gebilde mit zwei Programmzeilen aufzurufen.

Einsatz in der Lehre

Eines der Hauptziele der „Software zur Geometrie“ ist ihr Einsatz in der Lehre. Das gebrochene Verhältnis vieler, sonst höchst aufgeschlossener Mitmenschen zur Mathematik hat zu einem guten Teil seine Ursache darin, daß der Lehrstoff zu trocken, d.h. zu unanschaulich, vermittelt bzw. nicht vermittelt wurde. Hier kann der Computer, vernünftig eingesetzt, Abhilfe schaffen.

Schon in den Oberstufen der höheren Schulen könnte die Mathematik und speziell die Geometrie sehr viel lebendiger gestaltet werden, als es bisher möglich ist. Dabei sollten die klassischen Inhalte jedoch nicht ersetzt sondern vertieft und veranschaulicht werden.

Mit der „Software zur Geometrie“ können der Schüler, die Schülerin oder die Studierenden geometrische Sachverhalte selbst programmieren. Hierbei ist einmal die volle Durchdringung der zugrundeliegenden mathematischen Sachverhalte notwendig: Nur das, was man wirklich verstanden hat, kann man auch programmieren. Zum anderen wird dabei die Anwendung einer Hochsprache wie Pascal geübt.

Der Einsatz einer „fertigen Software“, bei welcher der Anwender im Handbuch nachschaut, wie er was erzeugen kann und wie er die Maus herumschieben muß, kann dies nicht leisten. Der wirkliche Transfer von der Theorie zum Programm findet dabei nicht statt.

Umfang der Software

In der „Software zur Geometrie“ werden die folgenden wichtigen Flächen behandelt:
- Ebenen
- Rotationsflächen (Kugel, Kegel und Zylinder)
- Platonische Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder)

Von allen Flächentypen können in einem Programm beliebig viele Flächen gezeichnet werden, die hierbei beliebig ausgeschnitten und mit Ornamentik, inklusive Schrift, versehen werden können. Einen Eindruck dieser Möglichkeiten vermittelt der offizielle Poster zur CEBIT 93 (Abb. 1). Dieser stellt eine Art geometrische Landschaft dar.

Platonische Körper

Die „Software zur Geometrie“ bietet eine vollständige Behandlung der platonischen Körper. Neben der Kugel sind diese Körper die voll-

Abb. 1: Geometrische Landschaft

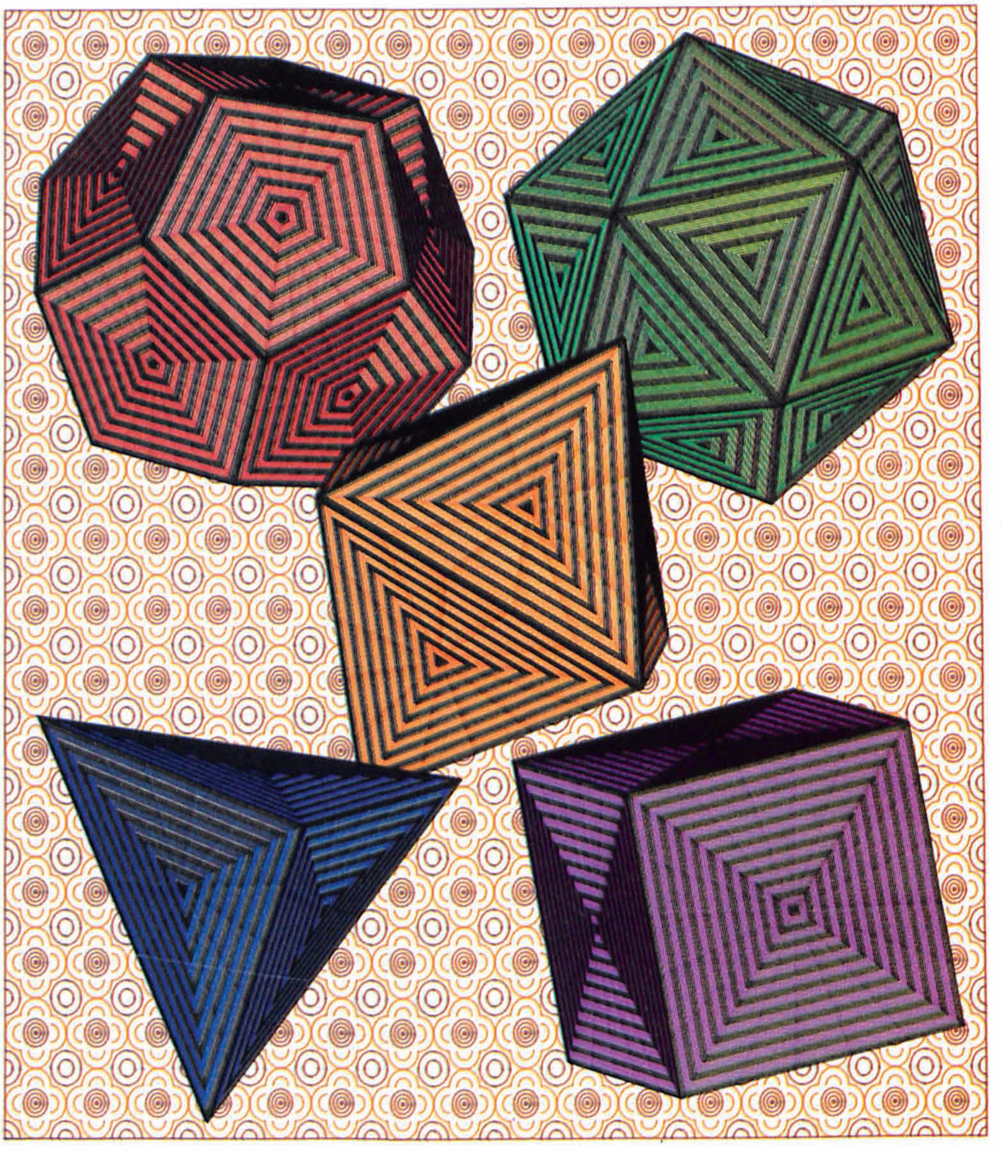

Abb. 2: Die fünf platonischen Körper

kommensten geometrischen Gebilde. Sie werden sämtlich von einer Art regelmäßiger Vielecke begrenzt: das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder von vier bzw. acht bzw. 20 gleichseitigen Dreiecken, der Würfel von sechs Vierecken und das Dodekaeder von zwölf gleichseitigen Fünfecken. Diese Körper waren schon den alten Griechen bekannt und wurden besonders von der platonischen Schule gepflegt, was ihnen auch den Namen gab. Die alten Griechen wußten auch schon, daß es nur diese fünf regelmäßigen Körper gibt.

Nun könnte der unbefangene Leser die Ansicht äußern, das sei doch nun wirklich lange genug her, und ob „so etwas" heute überhaupt noch wichtig sei. Im folgenden werden wir sehen, welchen Einfluß die platonischen Körper auch heute noch auf unser tägliches Leben haben, daß etwa häufig vorkommende Viren ihren Bauplan auf platonische Körper gegründet haben, daß selbst ein solch weitverbreiteter Volkssport wie der Fußball ohne die platonischen Körper nicht denkbar wäre. In der letzten Zeit erregt ein neues Molekül, das C-60 Molekül, die wissenschaftlichen Gemüter. Dieses wird in vielen Veröffentlichungen reichlich naiv das „Fußballmolekül" genannt, geht aber ebenfalls auf Plato zurück.

Dualität von Dodekaeder und Ikosaeder

Abb. 3: Dualität von Dodekaeder und Ikosaeder

Um die oben angesprochenen Querverbindun gen mit unserem täglichen Leben schnell ver stehen zu können, schicken wir die folgend harmlose Betrachtung einer Eigenschaft vo Dodekaeder und Ikosaeder voraus.

Wie alle platonischen Körper, so sind auc diese Körper Mittelpunktskörper, d.h. jede dieser Körper besitzt einen Mittelpunkt, vo dem alle Ecken denselben Abstand haben Nun kann man das Dodekaeder so in das Iko saeder legen, daß die Eckpunkte des Dodeka eders genau in den Mittelpunkten der Fläche des Ikosaeder liegen. Natürlich beschreibe die Mathematiker auch diesen einfachen Sach verhalt durch einen lateinischen Ausdruck: Si sagen, daß Dodekaeder und Ikosaeder in Du lität zueinander stehen.

Wenn wir nun das Dodekaeder ein wenig au blasen und alle Spitzen wegschneiden, dan entsteht ein hochinteressanter Körper, der nu aber nicht mehr von nur einer Art gleich Vielecke begrenzt ist, sondern von zwei Arte nämlich Fünfecken und Sechsecken. Zur Str fe darf sich dieser Körper auch nicht mehr pl

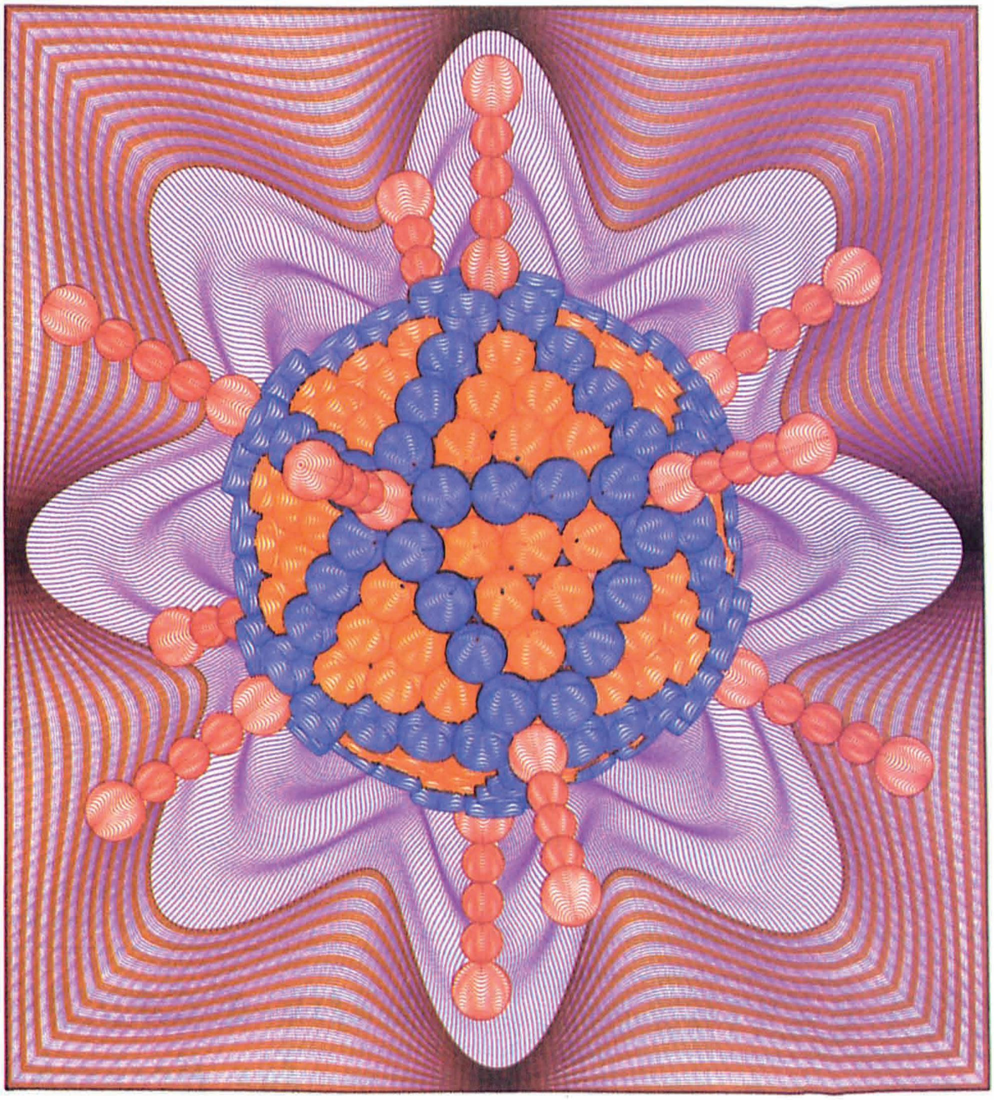

Abb. 4: Adenovirus

tonisch sondern nur noch archimedisch nennen. Dieser Körper, der sogenannte Ikosaederstumpf, ist die Grundlage für die folgenden Betrachtungen.

Abb. 5: Ikosaederstumpf

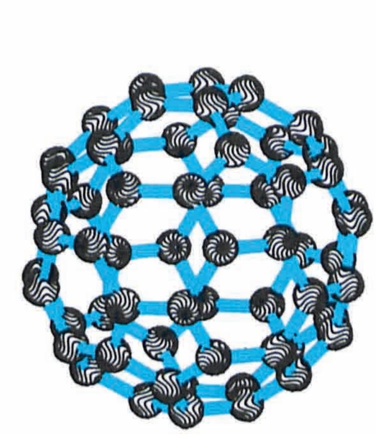

Abb. 6: C60-Molekül

Abb. 7: Eurofußball (siehe auch Titelbild)

C60-Molekül

Der eben eingeführte Körper besitzt 60 Ecken, wie man mühelos durch Nachzählen feststellt. Wenn wir um jede dieser Ecken eine kleine Kugel legen und diese noch durch Zylinder verbinden, so haben wir schon das Modell des C60-Moleküls.

Plato als Designer des Eurofußballs

Die Genesis des Eurofußballs ist nun ebenfalls leicht nachvollziehbar. Wir errinnern uns daran, daß alle unsere bisher betrachteten Körper Mittelpunktskörper sind. Nichts liegt nun näher, als um unseren Ikosaederstumpf die Kugel zu legen, auf der gerade alle seine Ecken liegen. Wenn wir nun die Flächen dieses Körpers vom Mittelpunkt aus auf die Kugel projizieren, so entsteht der Eurofußball.

Plato und die Viren

Die überragenden Gesetzmäßigkeiten der platonischen Körper, insbesondere ihre Symmetrieeigenschaften, sind die Ursache für ihr Auftreten in der unbelebten und belebten Natur. Während aber ihre wichtige Rolle bei Kristallstrukturen noch verständlich erscheint, ist ihr Auftreten in der belebten Natur, z.B. bei Mikroorganismen, doch eine große Überraschung. Das folgende Beispiel zeigt das Papovavirus, dessen Geometrie auf die Dualität von Dodekaeder und Ikosaeder zurückgeht.

Als weiteres Beispiel sei hier das Adenovirus aufgeführt. Dessen Bauplan liegt das Ikosaeder zugrunde. Auf den Flächen des Ikosaeders sitzen kleine Kugeln, und von den Ecken gehen tentakelförmige Kugelreihen aus (Abb. 3).

Makros

Die objektorientierte Programmierung der „Software zur Geometrie" erlaubt die Konstruktion von „geometrischen Makros". Hierbei können beliebig viele einfache Gebilde, wie Ebenen, Rotationsflächen und platonische Körper, zu einem neuen Objekt zusammengebunden werden. Jedes dieser neuen Objekte erhält einen Fußpunkt, eine Achsenrichtung und einen Skalierungsfaktor. Als Beispiel seien eine Blume aus zehn Rotationsflächen und ein durchbrochenes Weinglas aus acht Rotationsflächen gegeben.

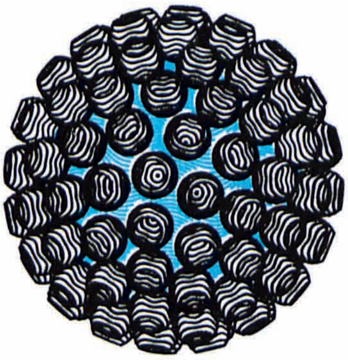

Abb. 8: Papovavirus

Abb. 9 und 10: Diverse Makros: Blume und Weinglas

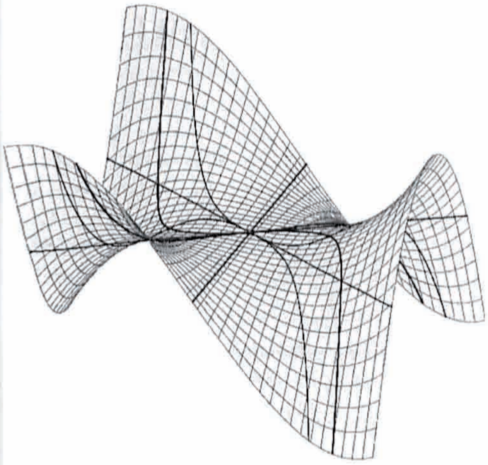

Abb. 11: Asymptotenlinie auf einem Affensattel

Anwendungen

Überall, wo die Darstellende Geometrie zum Einsatz kommt, kann die „Software zur Geometrie" herangezogen werden. In mehreren Diplomarbeiten wurden spezielle Problemstellungen behandelt.

Die geometrischen Eigenschaften der platonischen Körper bewirken in der Natur gewisse Minimaleigenschaften. Dies ist der Grund dafür, daß diese Körper gerade bei der Kristallbildung eine überragende Rolle spielen.

Eine wichtige Familie von Flächen bilden die Regelflächen. Zu ihrer Behandlung sind differentialgeometrische und numerische Methoden erforderlich.

Künstlerischer Bereich

Die „Software zur Geometrie" erlaubt auch Kreationen in mehr künstlerischer Richtung. Insbesondere die unbegrenzten Möglichkeiten, Ornamentik und Schrift auf beliebigen Flächen anzubringen, gestattet vielfältige Anwendung z.B. in der Werbebranche.

Ray-Tracing

Die „Software zur Geometrie" ist darauf angelegt, die erzeugten geometrischen Gebilde auf Bildschirm und Plotter auszugeben, d.h. sie stellt eine Software zum Zeichnen dar. Eine ganz andere Zielsetzung verfolgt das sogenannte „Ray-Tracing", das eine reine Bildschirmgrafik ist und nur mit den Pixels, d.h. Lichtpunkten des Bildschirms, arbeitet. Obwohl von der Zielsetzung also ganz verschieden, können die geometrischen Methoden der „Software zur Geometrie" sofort auch zur Generierung von geometrischen Motiven im Ray-Tracing herangezogen werden. Die Weiterverarbeitung erfolgt dann natürlich mit grundsätzlich anderen Routinen.

Differentialgeometrie

Die wichtigste Anwendung der „Software zur Geometrie" bisher ist ihre Erweiterung zu einer „Software zur Differentialgeometrie". Das für die Grundlagenforschung (Mathematik, Physik, Chemie usw.) und für die technisch-industrielle Anwendung eminent wichtige Gebiet der Differentialgeometrie ist eine Erweiterung der klassischen Geometrie, die erst durch die Einführung der Analysis, also der Differential- und Integralrechnung möglich wurde. Man kann die Differentialgeometrie kurz so charakterisieren, daß sie zusätzlich zu den Methoden der klassischen Geometrie auch noch die Methoden der Analysis heranzieht. Sie ist in der Lage, äußerst komplizierte Kurven und Flächen zu behandeln.

Während die Differentialgeometrie an jeder Universität und technisch orientierten Lehranstalt zum obligatorischen Lehrstoff gehört, war es bisher um die Darstellung der hochinteressanten und komplexen Objekte schlecht bestellt. In einer normalen Vorlesung über Differentialgeometrie bedecken zwar viele laufende Meter von zum Teil grausam komplizierten Formeln die Tafel, aber was dadurch berechnet wurde, sah der Studierende eigentlich nie.

Die technische Revolution des Computerzeitalters gab der Differentialgeometrie einen neuen, großen Anstoß. Zum ersten Mal war es möglich – in Verbindung mit den Fortschritten der numerischen Mathematik – die bisher nur in Formeln vorliegenden Kurven und Flächen zu veranschaulichen. Hierbei erschöpfte sich dieser Anstoß nicht nur in der Möglichkeit der grafischen Darstellung sondern eröffnete innerhalb der Differentialgeometrie völlig neue Problemstellungen. Denn schon immer war die Anschauung die Mutter der Erkenntnis.

In den letzten drei Jahren haben zwei meiner Mitarbeiter – Dr. habil. Eberhard Malkowsky und Dr. Wolfgang Nickel – im Anschluß an die Dissertation von Wolfgang Nickel eine „Software zur Differentialgeometrie" entwickelt, die im letzten Herbst in Buchform erschien. Hier handelt es sich um einen wesentlichen Weiterbau der „Software zur Geometrie", da alle analytischen Aspekte der Differentialgeometrie erst konzipiert und eingebracht werden mußten. Auch die Objekthierarchie mußte entscheidend abgeändert werden, da die Problemstellungen völlig anderer Natur sind.

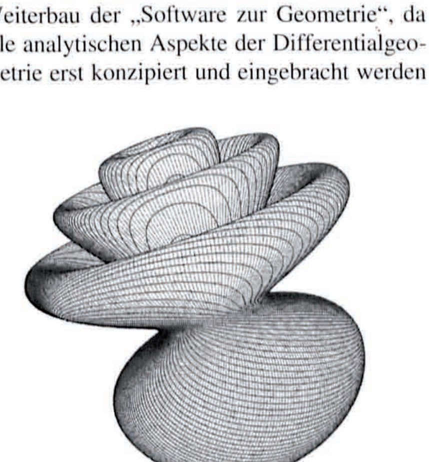

Abb. 12: Potentialfläche einer Kristalklasse

Literatur:

ENDL, Kurt/Endl Robert: Computergrafik 1, Eine Software zur Geometrie in Turbo Pascal, 448 S, mehrf., inkl. Diskette DM 78.00, ISBN 3-923210-95-7, Würfel-Verlag, 1989

ENDL, Kurt: Computergrafik 2, Eine Software zur Geometrie in objektorientierter Programmierung mit Turbo Pascal, 528 S, mehrfarbig, inkl. Diskette DM 88.00, ISBN 3-923210-95-7, Würfel-Verlag, 1991

ENDL, Kurt: Eine offene Software zur Geometrie in objektorientierter Programmierung, Messestand Hessische Hochschulen, Uni Gießen, CEBIT'92, 16 S.

ENDL, Kurt: Ästhetik der platonischen Körper, Gießener Hochschulgesellschaft 1993, 16 SEndl, Kurt: Kreative Computergrafik in Qbasic, 216 S, mehrf., inkl. Diskette DM 49.80, ISBN 3-923210-93-0, Würfel-Verlag, 1993

ENDL, Robert: Numerische Behandlung und computergrafische Darstellung geodätischer Linien auf Rotationsflächen, Diplomarbeit, Fachbereich Mathematik, Uni Gießen 1989

ENDL, Robert: Ray-Tracing mittels adaptiver Octree Nachbarsuche, Messestand Hessische Hochschulen, Universität Marburg, Cebit'92

FAILING, Markus: Allgemeine Polyeder und ihre computergrafische Darstellung, Diplomarbeit, Fachbereich Mathematik, Uni Gießen, 1992

MALKOWSKY, Eberhard/Nickel Wolfgang: Computergrafik in der Differentialgeometrie, 588 S., inkl. Diskette DM 148.00, ISBN 3-528-05357-7, Vieweg Verlag

MEINECKE, Armin G: Numerische Behandlung und computergrafische Darstellung von Regelflächen, Diplomarbeit Fachbereich Mathematik, Uni Gießen, 1993

NICKEL, Wolfgang: Differentialgeometrische Probleme und ihre computergrafische Darstellung, Dissertation, Fachbereich Mathematik, Uni Gießen 1992

WEESE, B: Rotationsflächen mit Splinekonturen aus Polynomen dritter Ordnung, Diplomarbeit Fachbereich Mathematik, Uni Gießen, 1992

Zum Autor:

Prof. Dr. rer. nat. Kurt Endl, *geb. 1930 in Ottobrunn bei München, 1949 bis 1953 Studium der Mathematik und Physik an der Universität Gießen, 1953 Diplom in Mathematik, 1954 Promotion in Mathematik, Universität Gießen; 1954 bis 1955 Stipendiat der Französischen Regierung an der Sorbonne in Paris, 1956 bis 1958 Attaché de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1958 Habilitation, Universität Gießen, 1959 bis 1965 Professor an verschiedenen Universitäten in den USA, 1971 Berufung an die TU Braunschweig, 1971 Berufung auf den Lehrstuhl Analysis, Universität Gießen, 1985 bis 1993 Beschäftigung mit Geometrie und Informatik, Entwicklung der „Software zur Geometrie", 1993 Deutsch-Österreichischer Hochschul-Software-Preis für die „Software zur Geometrie"*